Espaces de Hilbert et Séries de Fourier

A. Zeriahi

Version préliminaire du 20 novembre 2012

Note : C'est une version préliminaire des notes de cours que j'ai donné en Master M1 de Mathématiques à l'université Paul Sabatier pendant une partie du premier semestre 2012-2013. Elles sont destinées aux étudiants. Comme elles n'ont pas encore été relues en profondeur, elles peuvent contenir quelques coquilles, voire quelques erreurs. L'auteur serait ravi de toute remarque ou suggestion de nature à améliorer la rédaction de ces notes.

Introduction

Les espaces de Hilbert constituent une généralisation au cadre de la dimension infinie, des espaces euclidiens et hermitiens que l'on étudie au niveau du L2 de Mathématiques. D'une part, on peut y donner un sens aux concepts fondamentaux de la géométrie euclidienne classique tels que la notion d'angle fournie par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, la notion d'orthogonalité illustrée par le fameux théorème de Pythagore, la notion de projection orthogonale sur un sous-espace et enfin le concept de dualité qui est cachée en dimension finie.

Les deux premiers concepts sont de nature algébrique et ne sont finalement que des manifestations diverses des propriétés du produit scalaire. Par contre les deux derniers concepts sont de nature algébro-topologique. Pour les mettre en oeuvre dans le cadre de la dimension infinie, il faut faire usage de la notion d'espace complet, qui es automatique en dimension finie. A ce titre les espaces de Hilbert forment une classe importante d'espace de Banach qui est très utile dans les applications aussi bien en Mathématiques (EDP) qu'en Physique (Mécanique Quantique).

C'est un sujet classique qui a déja fait l'objet d'un cours en L3. Le but de ces notes est d'introduire ces concepts en insistant sur les aspects nouveaux et en les plaçant dans le cadre des espaces fonctionnels. Comme illustration, nous présentons dans le même esprit quelques aspects des séries de Fourier qui n'ont pas été vus en L3.

1 Rappels: Géométrie euclidienne

Le modèle standard d'espace euclidien est l'espace vectoriel réel $\mathbb{R}^n$ muni de la norme euclidienne dont le carré est donné par la formule suivante:

$$\|x\|^2 := \sum_{j=1}^{n} x_j^2, \text{ pour } x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n. \tag{1.1}$$

C'est une norme sur $\mathbb{R}^n$ qui a la particularité de provenir d'un *produit scalaire euclidien*. En effet la formule (1.1) est l'expression de la *forme quadratique positive définie* associée au produit scalaire euclidien canonique sur $\mathbb{R}^n$ qui est donné par la formule suivante:

$$< x, y >=< x, y >_{eucl} = x \cdot y := \sum_{j=1}^{n} x_j y_j,$$

où $x = (x_1, \cdots, x_n)$ et $y = (y_1 \cdots, y_n)$ sont des vecteurs de $\mathbb{R}^n$. Le produit scalaire de deux vecteurs est un nombre réel qui résulte d'un "accouplement" entre ces deux vecteurs: comme fonction des deux vecteurs, c'est une *forme bilinéaire symétrique positive définie* sur $\mathbb{R}^n$.

C'est cette particularité qui confère à $\mathbb{R}^n$ une géométrie particulièrement riche, que l'on appèlle la "Géométrie Euclidienne" qui est étudiée au Collège et au Lycée.

Dans le contexte de la géométrie complexe, le modèle standard d'espace hermitien est l'espace vectoriel complexe $\mathbb{C}^n$ muni de la norme hermitienne dont le carré est définie pour $z = (z_1, \cdots, z_n) \in \mathbb{C}^n$, par la formule suivante:

$$\|z\|^2 := \sum_{j=1}^{n} |z_j|^2,$$

C'est une norme sur $\mathbb{C}^n$ qui a la particularité de provenir d'un *produit scalaire hermitien* i.e. d'une *forme hermitienne positive définie* dont l'expression est donnée par la formule suivante:

$$(z|w) = z \cdot \bar{w} := \sum_{j=1}^{n} z_j \bar{w}_j,$$

où $z = (z_1, \cdots, z_n), w = (w_1, \cdot, w_n) \in \mathbb{C}^n$. Le produit scalaire hermitien est un nombre complexe qui résulte d'un "accouplement" entre deux vecteurs de $\mathbb{C}^n$ et qui définit une *forme sesquilinéaire hermitienne positive définie* sur $\mathbb{C}^n$ qui en particulier possiède la propriété de symétrie hermitienne $(z|w) = \overline{(w|z)}$. Pour comprendre la signification de ce produit hermitien, il faut observer qu'en identifiant $\mathbb{C}^n \cong \mathbb{R}^{2n}$ par l'application $can : z = (x_1 + iy_1, \cdot, x_n + iy_n) \longmapsto \xi = (x_1, y_1, \cdot, x_n, y_n)$, on a les relations suivantes:

$$\Re(z|w) =< z, w >_{eucl} = \sum_{j=1} (x_j y_j + u_j v_j),$$

où $z = (x_1, y_1, \cdots, x_n, y_n)$ et $w = (u_1, v_1, \cdots, u_n, v_n)$. Cette expression n'est autre que le produit scalaire euclidien des deux vecteurs dans $\mathbb{C}^n \cong \mathbb{R}^{2n}$ et

$$-\Im(z|w) = \sum_{j=1}^{n}(z_j \wedge w_j) = \sum_{j=1}^{n}(x_j v_j - y_j u_j),$$

est l'aire algébrique du parallélogramme orienté $\Pi(z, w)$ de $\mathbb{C}^n \cong \mathbb{R}^2 n$ engendré par les deux vecteurs z, w.

Ces notions permettent d'obtenir deux faits remarquables de nature essentiellement algébrique:

Identité de polarisation : Pour tout $x, y \in \mathbb{R}^n$,

$$< x, y >= \frac{1}{2}\left(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 + \|y\|^2\right).$$

Il en résulte le théoème de Pythagore: Soit $u, v \in \mathbb{R}^n$. Alors $< u, v >= 0 \Leftrightarrow \|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$.

Identité du parrallélogramme : Pour tout $x, y \in \mathbb{R}^n$,

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right).$$

Inégalité de Cauchy-Schwarz : Pour tout $u, v \in \mathbb{R}^n$,

$$| < u, v > | \leq \|u\| \cdot \|v\|,$$

avec égalité ssi u et v sont colinéaires.

Cette inégalité a pour conséquence l'inégalité suivante :

Inégalité de Minkowski : Pour tout $u, v \in \mathbb{R}^n$,

$$\|u+v\| \leq \|u\| + \leq \|v\|,$$

qui n'est autre que l'inéaglité triangulaire qui permet de montrer que la formule (1.1) définit une norme sur $\mathbb{R}^n$.

L'inégalité de Cauchy-Schwarz a une signification géométrique profonde. Elle permet en particlulier de définir la mesure de l'angle de deux vecteurs $u, v \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ et de donner une interprétation géométrique du produit scalaire. En effet grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on peut poser: Pour $u, v \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$, il existe un nombre réel unique $\theta(u, v)[0, \pi]$ tel que

$$< u, v >= \|u\| \cdot \|v\| \cos\theta(u, v).$$

Ce nombre mesure l'angle des deux directions portées par u et v.

Il en résulte les faits suivants:

1. $\theta(u, v) = \pi/2 \Leftrightarrow u \perp v$,
2. $\theta(u, v) = \pi \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}, u = \lambda v$.

Ces propriétés permettent de donner une interprétation géométrique du produit scalaire. Le nombre $\|v\| \cos \theta(u, v)$ peut être interprété comme la longueur (algébrique) de la projection du vecteur v sur la droite vectorielle orientée engendrée par le vecteur u de sorte que $< u, v >$ représente le produit de cette longueur par celle du vecteur u. D'un point de vue physique le travail effectuée par un champ de force $\vec{F}$ pour effectuer un dépalcement de longueur d sur un axe faisant un angle θ avec le vecteur $\vec{F}$ est donnée par $W = F \cdot dcos\theta =< \vec{F}, \vec{d} >$, où $\vec{d}$ est le vecteur déplacement.

Cela permet ensuite de définir la *projection orthogonale* d'un point sur un sous-espace affine de $\mathbb{R}^n$: si $M \in \mathbb{R}^n$ et $V \subset \mathbb{R}^n$ est un sous espace affine. La projection $P_V(M)$ est l'unique point de $M^* \in V$ tel que $\overrightarrow{MM^*}$ soit orthogonal au sous espace V. Si cela signifie que pour tout $P \in V$ on a $< \overrightarrow{M^*P}, \overrightarrow{M^*M} >= 0$. Il s'avère que c'est l'unique point de V qui est le "plus proche" de M i.e. minimise la distance $d(P, M) = \|\overrightarrow{PM}\|$ lorsque P varie dans V.

2 Espaces de Hilbert

2.1 Définition d'un produit scalaire

Ici on considèrera aussi bien des espaces vectoriels sur le corps $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ que sur $\mathbb{C}$.

Definition 2.1 *Soit E un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Une application $g : E^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ est appelé un poduit scalaire euclidien si elle vérifie les propriétés suivantes:*
1. $\forall x_1, x_2, y \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}$,

$$g(x_1 + \lambda x_2, y) = g(x_1, y) + \lambda g(x_2, y),$$

(linéarité en x).
2. $\forall x, y \in E, g(x, y) = g(y, x)$,
(symétrie)
3. $\forall x \in E, g(x, x) \geq 0$,
(positivité)
4. $x \in E, g(x, x) = 0 \Rightarrow x = 0$,
(g est dite définie).

Faisons quelques remarques sur cette définition.

Remarque 2.2 *1. Les deux premières propriétés impliquent la linéarité en y de sorte que g est une forme bilinéaire i.e. $\forall x_1, x_2, y_1, y_2 \in E, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$,*

$$g(x_1 + \lambda x_2, y_1 + \mu y_2) = g(x_1, y_1) + \lambda g(x_2, y_1) + \mu g(x_1, y_2) + \lambda\mu d(y_1, y_2).$$

2. Un produit scalaire euclidien g sur un espace vectoriel réel E est donc une forme bilinéaire symétrique définie positive. Le couple (E, g) est alors applelé un espace préhilbertien réel. Lorsqu'aucune ambiguité n'est possible, on notera un produit scalire rél par $g(x, y) =< x, y >$ pour $(x, y) \in E^2$.
3. La somme de deux produits scalaires sur E est un produit scalaire sur E. Si g est un produit scalaire euclidien sur E pour tout nombre réel $\alpha > 0$, la forme αg est un produit scalire euclidien sur E. Nous verrons qu'ils définissent la même mesure d'angle, on dit qu'ils sont conformes.

Dans le cas complexe voici la notion correspondante.

Definition 2.3 *Soit E un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{C}$. Une application $h : E^2 \longrightarrow \mathbb{C}$ est appelé un poduit scalaire euclidien si elle vérifie les propriétés suivantes:*
1. $\forall x_1, x_2, y \in E, \forall \lambda \in \mathbb{C}$,

$$h(x_1 + \lambda x_2, y) = h(x_1, y) + \lambda h(x_2, y),$$

(linéarité en x).
2. $\forall x, y \in E, h(x, y) = \overline{h(y, x)}$.
(Symétrie hermitienne) 3. $\forall x \in E, h(x, x) \geq 0$,
(positivité) 4. $x \in E, h(x, x) = 0 \Rightarrow x = 0$,
(h est dite définie).
Dans ce cas le couple (E, h) est appelé un espace préhilbertien complexe.

Quelques remarques s'imposent.

Remarque 2.4 *1. Les deux premières propriétés impliquent l'anti $\mathbb{C}-$linéarité en y de sorte que f est une forme sesquilinéaire i.e. $\forall x_1, x_2, y_1, y_2 \in E, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$,*

$$h(x_1 + \lambda x_2, y_1 + \mu y_2) = h(x_1, y_1) + \lambda h(x_2, y_1) + \bar{\mu} h(x_1, y_2) + \lambda \bar{\mu} h(y_1, y_2).$$

Un produit scalaire hermitien h sur un espace vectoriel complexe E est donc une forme herimitienne définie positive.
2. Si h est un produit scalaire hermitien sur un espace vectoriel complexe E, alors $g := \Re h$ est un produit scalaire euclidien sur l'espace vectoriel réel sous-jacent à E obtenu en restreignant le corps des scalaires à $\mathbb{R}$.

2.2 Géométrie d'un espace de Hilbert

Nous allons établir quelques identitiés remarquables qui révèlent la richesse de de la géométrie des espaces préhilbertiens.

Proposition 2.5 *1. Soit $(E, < \cdot, \cdot >)$ un espace préhilbertien réel. On a alors pour tout $x, y \in E$,*

$$< x, y >= \frac{1}{4} \left(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 \right). \tag{2.1}$$

(Identité de polarisation réelle).
2. Soit $(E, (\cdot|\cdot))$ un espace préhilbertien complexe. On a alors pour tout $x, y \in E$,

$$\Re(x|y) = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right). \tag{2.2}$$

$$(x|y) = \frac{1}{4}\left[\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\left(\|x+iy\|^2 + \|x-iy\|^2\right)\right]. \tag{2.3}$$

(Identité de polarisation complexe).

Theorem 2.6 *(Inégalité de Cauchy-Schwarz). Soit (E, h) un espace préhilbertien sur $\mathbb{K}$. Alors pour tout $(x, y) \in E^2$, on a*

$$|h(x,y)| \leq \sqrt{h(x,x)}\sqrt{h(y,y)}, \tag{2.4}$$

avec égalité si et seulement si il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ te que $x = \lambda y$ ou $y = \lambda x$.

Corollary 2.7 *Soit (E, h) un espace préhilbertien sur $\mathbb{K}$. Posant $\|x\|_h := \sqrt{h(x,x)}$ pour $x \in E$. Alors pour tout $(x, y) \in E^2$, on a*

$$\|x+y\|_h \leq \|x\|_h + \|y\|_h. \tag{2.5}$$

(Inégalité de Minkowski).
En aprticulier la fonction $x \longrightarrow \|x\|_h := \sqrt{h(x,x)}$ est une $\mathbb{K}-$norme sur le $\mathbb{K}-$espace vectoriel E, dite norme associée u produit scalaire.

Ainsi un espace prhilbertien hérite de façon naturelle d'une structure d'espace vectoriel normé. On peut donc définir une distance associée à cette norme et faire de la topologie sur E.

Definition 2.8 *Soit (E, h) un espace préhilbertien sur $\mathbb{K}$ et $\|\cdot\|_h$ la norme associée. Si l'espace normé sous-jacent $(E, \|\cdot\|_h)$ est complet, on dira que (E, h) est un espace de Hilbert réel si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, complexe si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.*

L'inégalité de Cauchy-Schwarz a une interprétation géométrique intéressante. Elle permet de définir la mesure de l'angle de deux vecteurs et de donner une interprétation géométrique du produit scalaire.

Soit $(E, < \cdot, \cdot >)$ un espace préhilbertien réel. Comme en dimension finie, on définir l'angle de deux directions. Pour $u, v \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$, on définit la mesure de l'angle non orienté des deux vecteurs u et v par la formule suivante:

$$\theta(u,v) := \text{angle}(u,v) := Arcos\left(\frac{< u, v >}{\|u\| \cdot \|v\|}\right).$$

Le nombre $\theta(u, v) \in [0, \pi]$ vérifie la formule suivante:

$$< u, v >= \|u\| \cdot \|v\| \cos\theta(u,v).$$

Proposition 2.9 *Soit* $(E, < \cdot, \cdot >)$ *un espace préhilbertien réel et* $u, v \in E \setminus \{\mathbf{0}\}$*. Alors on a:*
1. $\theta(u, v) = \ \pi/2 \Leftrightarrow < u, v >= 0$.
2. $\theta(u, v) = 0 \ \Leftrightarrow \exists \lambda > 0, u = \lambda v$.
3. $\theta(u, v) = \pi \ \Leftrightarrow \exists \lambda < 0, u = \lambda v$.

Cela suggère la définition suivante.

Definition 2.10 *Soit* $(E, < \cdot, \cdot >)$ *un espace préhilbertien réel. On dira que que deux vecteurs* $u, v \in E$ *sont orthogonaux si* $< u, v >= 0$ *et on note* $u \perp v$.

Le résultat fondamental suivant est une conséquence immédiate de l'identité de polarisation.

Theorem 2.11 *(Théorème de Pythagore). Soit* $(E, < \cdot, \cdot >)$ *un espace préhilbertien réel et* $u, v \in E$*. Alors on a*

$$u \perp v \Leftrightarrow \|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2.$$

La définition de l'angle permet de donner l'interprétation géométriques suivante.

Proposition 2.12 *Soit* $u, v \in E \setminus \{\mathbf{0}\}$.
1. $\theta(u, v) = 0 \ \Leftrightarrow \ < u, v >= 0$ *; on dira aussi que l'ange des deux vecteurs est droit. 1.* $0 < \theta(u, v) < \pi/2 \ \Leftrightarrow \ < u, v >> 0$*; on dira aussi que l'angle des deux vecteurs est aig.*
2. $\pi/2 < \theta(u, v) < \pi \ \Leftrightarrow \ < u, v >< 0$*; on dira aussi que l'angle des deux vecteurs est obtu.*

Nous allons voir que la norme associée à un produit scalaire jouit de propriétés remarquables.

Proposition 2.13 *Soit* $(E, < \cdot, \cdot >)$ *un espace préhilbertien réel et* $\| \cdot \|$ *la norme associée. Alors on a*
1. Pour tout $u, v \in E$,

$$\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2\left(\|u\|^2 + \|v\|^2\right).$$

(Identité du parrallélogramme).
2. Soit $u, v, w \in E^2$ *et* $m := \frac{u+v}{2}$ *le milieu, on a*

$$\|w - m\|^2 + \frac{1}{4}\|u - v\|^2 = \frac{1}{2}(\|w - u\|^2 + \|w - v\|).$$

(Identité de la médiane).

2.3 Exemples classiques

1. Soit I une partie non vide. On considère l'espace $\mathbb{K}^I$ des applications de I dans $\mathbb{K}$. Un élément $u \in \mathbb{K}^I$ est noté $u = (u_i)_{i\in I}$ et est applelé une famille de nombres réels (resp. complexes) lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) indéxée par I. Si I est fini, on a $I \cong \{1, \cdots, N\}$ et donc $\mathbb{C}^I \cong \mathbb{C}^N$. Lorsque $I = \mathbb{N}$, $\mathbb{K}^I$ est l'espace des suites de nombres réels ou complexes selon que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Definition 2.14 *1. On dit qu'une famille $u = (u_i)_{i\in I} \in \mathbb{K}^n$ est sommable s'il existe un nombre $z \in \mathbb{K}$ vérifiant la propriété suivante: pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une partie finie non vide $J_0(\varepsilon) \subset I$ telle que pour toute partie finie J, $J_0(\varepsilon) \subset J \subset I$, on a $|z - \sum_{j\in J} u_i| \leq \varepsilon$. Le nombre z vérifiant cette proriété est unique, lorsqu'il existe, on l'appelle la somme de la famille $(u_i)_{i\in I}$ et on le note $z = \sum_{i\in I} u_i$.*
2. On dit qu'une famille $u = (u_i)_{i\in I} \in \mathbb{K}^n$ est absolument sommable si la famille de nombres réels $(|u_i|)_{i\in I}$ est sommable. Dans ce cas on a

$$\sum_{i\in I} |u_i| = \sup_{J\in\mathcal{P}_{finie}(I)} \sum_{j\in J} |u_j|$$

On définit l'espace $\ell^2_{\mathbb{C}}(I) \subset \mathbb{K}^I$ comme le sous-ensemble des $u \in \mathbb{K}^I$ telles que la famille $(u_i)_{i\in I}$ soit de carr absolumenent sommable i.e.

$$\|u\|_2 := \sum_{i\in I} |u_i|^2 < +\infty.$$

Il résulte immédiatement de l'inégalité de Cauchy-Schwarz en dimension finie que si $u = (u_i)_{i\in I}, v = (v_i)_{i\in I} \in \ell^2_{\mathbb{C}}(I)$, alors la famille $((u_i\bar{v}_i))_{i\in I}$ est absoluement sommable. On peut donc poser

$$(u|v) := \sum_{i\in I} u_i\bar{v}_i.$$

On montre que $\ell^2_{\mathbb{C}}(I)$ muni de ce produit scalaire est un espace de Hilbert complexe. Le cas le plus courant est celui où I est dénombrable (e.g. $I = \mathbb{N}$ ou $I = \mathbb{Z}$).

3 Meilleure approximation, projection orthogonale

Un des problèmes fondamentaux que l'on rencontre dans les applications est celui de la recherche de la meilleure approximation d'un point point par les éléments d'un ensemble donné. Formulons le problème dans un cadre assez général. SOit (E, d) un espace métrique et $C \subset E$ un sous-ensemble non vide de E. Soit $x \in E$. On cherche un point $x^* \in C$ tel que

$$d(x, x^*) = d(x, C) = \inf\{d(x, y); y \in C\}.$$

Le point $x^* \in C$, lorsqu'il existe, est le point de C le plus proche de x: on l'appelle une *meilleure approximation* de x par les points de C.

Lorsque C est compact, il résulte des théorèmes de Weierstarss qu'un tel point existe, mais il n'est pas nécessairement unique comme le montre l'exemple obtenu en prenant la shpère unité dans $\mathbb{R}^n$ i.e. $C = S^{n-1}$ $(n \geq 1)$ et $x = \mathbf{0}$. Mais en général ce problème est difficile à résoudre.

Nous allons voir que dans le cas d'un espace préhilbertien, ce problème admet une solution unique pour certains sous-ensembles.

3.1 Projection sur un convexe complet

Rappelons la notion de convexité.

Definition 3.1 *Soit E un espace vecoriel réel. Une partie $C \subset E$ est dite convexe si pour tout $x, y \in C$ et tout $0 \leq t \leq 1$, $(1-t)x + ty \in C$ i.e. le segment joignant x à y défini par $[x, y] := \{(1-t)x + ty; 0 \leq t \leq 1\}$ est conteu dans C.*
L'ensemble C est dit strictement convexe si pour tout $x, y \in C$ et $t \in]0, 1[$, $(1-t)x + ty \in int(C)$.

Il est facile de donner des exemples de parties convexes qui ne sont pas strictement convexes.

Voici un résultat majeur de la géométrie euclienne "à la Pythagore" qui est fondamental dans toutes les constructions concernant l'orthogonalité.

Theorem 3.2 *(Théorème de projection sur un convexe complet). Soit E un espace préhilbertien réel ou complexe et $C \subset E$ un sous-ensemble convexe et complet de E (pour la norme $\|\cdot\|$ associée au produit scalaire). Alors pour tout $x \in E$, il existe un point unique $x^* = P_C(x) \in C$ tel que*

$$\|x - x^*\| = d(x, C) = \min_{a \in C} \|x - a\|. \tag{3.1}$$

Cet élément x^* est caractérisé par les inégalités suivantes

$$\forall a \in C, \quad \Re(x - x^* | a - x^*) \leq 0. \tag{3.2}$$

Il faut observer que si E est un espace de Hilbert, alors le théorème s'applique à tout convexe fermé C de E, puisque tout ous-ensemble fermé d'un espae métrique complet est lui-même complet pour la distance induite.

Remarque 3.3 *Il faut noter qua dans le cas d'un espace préhilbertien réel E muni de son produit scalaire euclidien $< \cdot, \cdot >$, la condition eq:AngleObtu s'écrit*

$$\forall a \in C, < x - x^* | a - x^* > \leq 0. \tag{3.3}$$

Dans tous les cas cette condition signifie que la projection x^* d'un point $x \in E \setminus C$ sur C est caractérisé par la propriété géométrique suivante: pour tout $a \in C \setminus \{x^*\}$, l'angle des deux vecteurs $x - x^*$ et $a - x^*$ est obtu. En effet cette condition s'écrit aussi

$$\cos(\mathit{angle}(x - x^*, a - x^*)) \leq 0.$$

3.2 Projection orthogonale sur un sous-espace complet

Ici nous allons considérer les propriétés de la projection sur un sous-espace complet V d'un espace espace préhilbertien E. Commençons par faire la remarque suivante.

Remarque 3.4 *Supposons que $C = V$ soit un sous-espace vectoriel complet de E. D'après le théorème précédent, pour tout $x \in E$ fixé, la projection x^* est un vecteur de V caractérisé par la propriété (3.2). En appliquant (3.2) aux vecteurs $a \in V$ et $2x^* - a$, on obtient $\Re(x - x^* | a - x^*) = 0$ pour tout $a \in V$. Dans le cas réel cela signifie que $< x - x^*, a - x^* >= 0$. Dans le cas complexe si on applique (3.2) aux vecteurs $a \in V$ et $b = x^* + i(a - x^*) \in V$ on obtient la condition $\Re(x - x^* | a - x^*) = 0$ et $\Im(x - x^* | a - x^*) == -\Re(x - x^* | b - x^*) = 0$, ce qui signifie que $(x - x^* | a - x^*) = 0$ pour tout $a \in V$.*

La remarque précédente suggère la définition suivante.

Definition 3.5 *Soit E un epsace préhilbertien réel ou complexe et $A \subset E$ une partie non vide. on définit l'orthogonal de A par*

$$A^\perp := \{x \in E; \forall a \in A, (a|x) = 0\}.$$

On a alors les propriétés suivantes faciles à démontrer (exercice).

Proposition 3.6 *Soit E un epsace préhilbertien réel ou complexe et $A, B \subset E$ des parties non vides.*
1. L'orthogonal $A^\perp$ de A est un sous-espace vectoriel fermé de E et l'on a

$$A^\perp = \mathit{Vect}(A)^\perp = \overline{\mathit{Vect}(A)}^\perp,$$

où $\mathit{Vect}(A)$ est le sous-espace vectoriel de E engendré par A et $\overline{\mathit{Vect}(A)}$ sa fermeture dans E.
2. On a $\{\mathbf{0}\}^\perp = E$ et $E^\perp = \{\mathbf{0}\}$.
3. Si $A \subset B$ alors $B^\perp \subset A^\perp$.
4. Si $V \subset E$ est un sous-espace vectoriel de E, on

$$(V^\perp)^\perp = \overline{V}.$$

Nous pouvons maintenant préciser le théorème précédent dans le cas d'un sous-espace vectoriel complet.

Corollary 3.7 *(Théorème de projection sur un sous-espace complet). Soit E un espace préhilbertien réel ou complexe et $V \subset E$ un sous-espace complet de E (pour la norme $\|\cdot\|$ associée au produit scalaire).*
1. Si $x \in E$ et $v \in V$, alors $v = P_V(x) \Longleftrightarrow x - v \in V^{\perp}$.
2. L'application P_V est un projecteur continue de E de norme 1 et l'on a Im $P_V = V$ et Ker $P_V = V^{\perp}$.
3. Pour tout $x \in E$, on a

$$\|x\|^2 = \|P_V(x)\|^2 + \|x - P_V(x)\|^2.$$

En particulier on a $E = V \oplus V^{\perp}$.
4. Si de plus E est un espace de Hilbert, on a $P_{V^{\perp}} = Id_E - P_V$.

Il faut observer que si E est un espace préhilbertien, alors le théorème s'applique à tout sous-espace de dimension finie. En effet sur un sous-espace $F \subset E$ de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes et F muni de l'une de ces normes est un espace de Banach.

Dans le cas d'un espace de Hilbert, le théorème s'applique à tout sous-espace fermé F de E.

4 Bases Hilbertiennes

4.1 Cas de la dimension finie

Rappelons que dans un espace euclidien de dimension finie l'existence d'une base orthonormée rend les calculs beaucoup plus simples. En effet suposons que $(E, (\cdot|\cdot))$ soit un espace hermitien de dimension finie N et $(e_i)_{1 \leq i \leq N}$ une base orthonormée de E. Alors tout $x \in E$ s'écrit $x = \sum_{i=1}^{N} (x|e_i)e_i$ et l'on a les deux propriétés fondamentales suivantes:
Si $V = \text{Vect } (e_i)_{1 \leq i \leq p}$, où $1 \leq p \leq N$, alors

$$P_V(x) = \sum_{i=1}^{p} (x|e_i)e_i,$$

et

$$\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{N} |(x|e_i)|^2.$$

L'objectif de ce paragraphe est de généraliser ces résultats et de monter comment on peut construire des bases orthonormés dans un sens approprié sur certains espaces de Hilbert.

4.2 Inégalité de Bessel et Identité de Parseval

Nous allons tout d'abord étudier les systm̀es orthonormés dans un espace préhilbertien.

Definition 4.1 *Un système* $(u_i)_{i\in I}$ *de vecteurs d'un espace préhilbertien* $(E,(\cdot|\cdot))$ *est dit orthogonal si pour tout* $i\in I, u_i\neq 0$ *et tout* $j,k\in\mathbb{N}$ *tels que* $j\neq k$, $(u_j|u_k)=0$ *et qu'il est orthonormé si pour tout* $j,k\in\mathbb{N}$ $(u_j|u_k)=\delta_{jk}$ *(symbole de Kronecker).*

On vérifie facilement la propriété suivante.

Exercice 4.2 *Dans un espace préhilbertien* $(E,(\cdot|\cdot))$ *tout système orthogonal* $(u_i)_{i\in I}$ *de vecteurs de* E *est un système linéairement indépendant.*

On a laors le résultat

Theorem 4.3 *Soit* $(u_i)_{i\in I}$ *un système orthonormé d'un espace préhilbertien* $(E,(\cdot|\cdot))$. *Soit* $J\subset I$ *une partie finie de* I *et* $V_J := Vect(e_j)_{j\in J}$. *Alors on a les propriétés suivantes:*
1. Pour tout $x\in E$, *la projection orthogonale de* x *sur* V_J *est donnée par la formule suivante:*

$$P_{V_J}(x)=\sum_{j\in J}(x|u_j)e_j,$$

et l'on a l'inégalité suivante:

$$\sum_{j\in J}|(x|u_j)|^2\leq\|x\|^2.$$

2. La famille $((x|u_i))_{i\in I}$ *est de carré absolument sommable et l'on a l'inégalité suivante:*

$$\sum_{i\in I}|(x|u_i)|^2\leq\|x\|^2,$$

(Inégalié de Bessel).

<u>Démonstration:</u> Soit $J\subset I$ une partie finie.

Theorem 4.4 *Soit* $(u_i)_{i\in I}$ *un système orthonormé d'un espace préhilbertien* $(E,(\cdot|\cdot))$. *Alors les assertions suivantes sont équivalentes:*
1. La famille $(u_i)_{i\in I}$ *est un système orthonormé maximal (pour l'inclusion).*
2. Pour tout $x\in E$, *la famille* $((x|u_i))_{i\in\mathbb{N}}$ *est de carré absoluement sommable et l'on*

$$x=\sum_{i\in I}(x|u_i)u_i$$

3. Pour tout $x\in E$, *la famille* $((x|u_i))_{i\in\mathbb{N}}$ *est de carré absoluement sommable et l'on a l'identité suivante:*

$$\sum_{i\in I}|(x|u_i)|^2=\|x\|^2.$$

(Identité de Parseval).

Démonstration:

▶

Nous alons définir la notion de base hilbertienne.

Definition 4.5 *Soit E un espace préhilbertien réel ou complexe. On dira qu'un système orthonormé $(e_i)_{i\in I}$ est une base hilbertienne de E si c'est un système orthnormé maximal i.e. il n'esxiste aucun système orthonormé de E qui le contienne strictement. D'après le théorème précédent pour tout $x \in E$, on a alors*

$$x = \sum_{j\in I} (x|e_j)e_j,$$

la famille $((x|e_j))_{i\in I}$ étant de carré absolument sommable.

Observons que ce développement est unique. En effet supposons qu'il existe une famille de scalaires $(c_j)_{j\in I}$ de carré absoluement sommable telle que

$$x = \sum_{j\in I} c_j e_j.$$

Alors on a $c_j = (x|e_j)$, pour tout $j \in I$.
Lorsque I est dénombrable, cette écriture peut s'interpéter à l'aide des séries. En effet, si $\sigma : \mathbb{N} \longrightarrow I$ est une bijection de $\mathbb{N}$ sur I alors

$$\lim_{n\to+\infty} \|x - \sum_{p=0}^{n} c_{\sigma(p)} e_{\sigma(p)}\| = 0,$$

cette proriété étant indépendante de la bijection choisie.

Les scalaires $\hat{x}_j := (x|e_j)$ pour $j \in I$ sont appelés les coefficients de Fourier de x suivant la base hilbertienne $(e_j)_{j\in I}$ et la décomposition précédente s'appelle la décomposition de x en série de Fourier dans la base hilbertienne $(e_j)_{j\in I}$.

Observons que si I est dénombrable et si $\sigma : \mathbb{N} \longrightarrow I$ est une bijection de $\mathbb{N}$ sur I, alors en posant $f_n := c_{\sigma(p)}$ pour $n \in \mathbb{N}$, on obtient une base hilbertienne $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de H indéxée par $\mathbb{N}$, ce que l'on supposera dans la suite.

On peut facilement démontrer en appliquant le théorème de Zorn, l'existence d'une base hilbertienne dans tout espace de Hilbert.

Proposition 4.6 *Soit H un espace de Hilbert. Alors tout système orthonormé $(u_j)_{j\in J}$ de H peut être complété en une base hilbertienne.*

Démonstration:

Cet énoncé nous donne un résultat d'existence mais il n'est pas constructif. Nous verrons au paragraphe suivant un résultat plus concret basé sur un procédé constructif qui fournit des bases hilbertiennes très utiles dans les applications.

4.3 Construction d'une base hilbertienne dans un espace de Hilbert séparable

Les résultats prédents montrent qu'il est essentiel de pouvoir construire des bases orthornormées. Cela se fait gr ce à une méthode classique, connue sous le nom de procédé de "Gram-Schmidt" que nous allons rappeler maintenant.

Lemma 4.7 *Soit E un espace préhilbertien et $(u_n)_{n\in N}$ un système linéairement indépendant de E. Notons pour $p\in\mathbb{N}$, $V_p := Vect\ ((u_i)_{1\leq i\leq p})$. Alors il existe un système orthonormé $(e_n)_{n\in I}$ de E tel que pour chaque entier $p\in\mathbb{N}$ on ait*

$$Vect\ (e_i)_{1\leq i\leq p} = V_p. \tag{4.1}$$

Rappelons qu'un système $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de vecteurs de E est dit orthogonal si tout $j,k\in\mathbb{N}$ tels que $j\neq k$, $(e_j|e_k)=0$ et qu'il est orthonormé si pour tout $j,k\in\mathbb{N}$ $(e_j|e_k)=\delta_{jk}$ (symbole de Kronecker). Démonstration: La construction se fait par récurrence. Nous allons démontrer que pour tout $m\in\mathbb{N}$, il existe un système orthonormé $(e_j)_{0\leq j\leq m}$ tel que pour tout $0p\leq m$ on ait la condition (4.1).

Si $m=0$, il est clair que le vecteur $e_0 := \frac{u_0}{\|u_0\|}$ convient. On peut donc supposer que $m\geq 1$. Observons que la condition (4.1) implique que pour chaque $1\leq p\leq m$, $e_p\in V_p\cap V_{p-1}^{\perp}$. Supposons alors que pour un entier $0\leq q\leq m-1$ on ait construit un système orthonormé de vecteurs $(e_i)_{0\leq i\leq q}$ tel que pour tout entier $0\leq p\leq q$, la propriété (4.1) soit satisfaite. Il suffit de construire un vecteur normé $e_{q+1}\in V_{q+1}\cap V_q^{\perp}$. Observons que $u_{q+1}\in V_{q+1}\setminus V_q$. Comme V_q est un sous-espace de dimension fini, nous avons déja observé que V_p est complet pour la norme induite. Posons alors $v_{q+1} := u_{q+1} - P_{V_q}(u_{q+1})$. On $v_{q+1}\in V_{q+1}\cap V_q^{\perp}$ et $v_{q+1}\neq \mathbf{0}$, mais il n'est peut-être pas normé. Il suffit alors de le normaliser en posant

$$e_{q+1} := \frac{v_{q+1}}{\|v_{q+1}\|}.$$

►

Remarque 4.8 *Il est important pour les applications d'observer que la preuve de ce lemme est constructive. On dira que le système orthonormé $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est obtenu à partir du système $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt. En effet, on sait d'après ce qui précède que*

$$P_{V_q}(u_{q+1}) = \sum_{j=0}^{q}(u_{q+1}|e_j)e_j$$

Par ailleurs, on peut également exprimer la projection de u_{q+1} à l'aide des vecteurs $(u_i)_{0\leq i\leq q}$. En effet puisque $P_{V_q}(u_{q+1}) \in V_q$, on peut l'écrire

$$P_{V_q}(u_{q+1}) = \sum_{j=0}^{q} \lambda_j u_j,$$

où $\lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_q) \in \mathbb{K}^{q+1}$. Pour caculer le vecteur composanteλ, il suffit d'écrire que $u_{q+1} - P_{V_q}(u_{q+1}) \in V_q^{\perp}$ i.e. orthogonal à chacun des vecteur u_j pour $j = 0, \cdots, q$. On a donc est obtenu en résolvant l'équation matricielle

$$G_q \cdot [\lambda_0, \cdots, \lambda_q]^{\tau} = W,$$

où $[\lambda_0, \cdots, \lambda_q]^{\tau}$ est la matrice colonne transposée de la la matrice vecteur $[\lambda_0, \cdots, \lambda_q]$, W est la matrice colonne dont les entrées sont données par $w_j = (u_q|u_j)$ pour $0 \leq j \leq q$ et G_q est la matrice de Gram du système $(u_j)_{0\leq j\leq q}$.

Nous allons maintenant nous intéresser au problème de l'existence d'une base hilbertienne.

Remarque 4.9 *1. Supposons que l'espace préhilbertien E possède une base hilbertienne dénombrable $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Alors $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un système linéairement indépendant dénombrable de E. Il en résulte que E n'est pas de dimension finie (au sens algébrique) et que l'espace vectoriel $V = Vect((e_n)_{n\in\mathbb{N}})$ engendré par le système dénombrable $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dense dans E.*
2. Il est important de ne pas confondre base hilbertienne et base algébrique dans le contexe des espaces de Hilbert. En effet si E est un espace vectoriel qui n'est pas de dimension finie, alors il possède au moins un système infini S de vecteurs linéairement indépendants. On peut alors montrer en appliquant le théorème de Zorn que ce système peut être complété en une base algébrique de E (théorèmede la base incompète). De plus toutes les bases algébriques de E ont le même cardinal, appelé la dimension algébrique de E.

Supposons maintenant que E est un espace de Banach de dimension algébrique infinie. Alors aucune base algébrique de E ne saurait être dénombrable. En effet si tel était le cas on aurait $E = \cup_{n_i n\mathbb{N}} V_n$, où (V_n) est une suite de sous-espaces de dimension finie. Comme chaque V_n est de dimension fini, il est fermé dans E et d'intérieur vide, ce qui contredirait le théorème de Baire puisque E est complet.

Cette remarque justifie la définition suivante.

Definition 4.10 *Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel normé. On dit qu'un système dénombrable de vecteurs $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E est total dans E si le $\mathbb{K}-$sous-espace vectoriel $V = Vect\ ((v_n)_{n\in\mathbb{N}})$ de H engendré par $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dense dans E. Cette propriété signifie que si V est l'ensemble des combinaisons $\mathbb{K}-$linéaires* *finies de vecteurs du système* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$*, alors pour tout* $x \in H$ *il existe une suite* $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de vecteurs donnés par* $h_n = \sum_{i=1}^{N_n} \lambda_{ni} v_i$ *pour* $n \in \mathbb{N}$ *et telle que* $\lim_{n\to+\infty} \|x - h_n\| = 0$.

On dira qu'un $\mathbb{K}-$*espace vectoriel normé est séparable s'il possède un système dénombrable total de vecteurs.*

Nous avons remarqué que cette condition topologique est nécéssaire pour qu'un espace de Hilbert de dimension infinie possède une base hilbertienne. Nous allons voir qu'elle est suffisante.

Lemma 4.11 *Soit* E *un espace préhilbertien et* $\mathcal{S} = (e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *un système orthonormé. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes:*
(i) *Le système* $\mathcal{S}$ *est une base hilbertienne de* E.
(ii) *Le système* $\mathcal{S}$ *est total dans* E.
(iii) *Le système* $\mathcal{S}$ *est complet i.e.* $(Vect(e_n)_{n\in\mathbb{N}})^{\perp} = \{\mathbf{0}\}$.

Theorem 4.12 *Soit* H *un* $\mathbb{K}-$*espace de Hilbert séparable de dimension infinie et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite dénombrable totale de* H*. Alors on peut construire une base hilbertienne dénombrable* $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de* H *telle que pour tout* $n \in \mathbb{N}$*,* $Vect\ ((e_j)_{0\le j\le n}) = Vect\ ((v_{m_j})_{0\le j\le n})$*, où* $(m_j)_{j\in\mathbb{N}}$ *est une suite strictement croissante d'entiers.*

Démonstration: La première étape consiste à en extraire de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une ssous-suite $(v_{m_j})_{j\in\mathbb{N}}$ de vecteurs $\mathbb{K}$-linéairement indépendant qui est encore totale dans H. On procède par récurrence pour montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on peut trouver n des vecteurs linéairement indépendant Pour $n = 0$, il suffit de choisir un vecteur non nul $u_0 = v_{m_0} \neq 0$ du système. Supposons que l'on a construit des vecteurs $u_0 = v_{m_0}, \cdot, u_n = v_{m_n}$ linéairement indépendants , avec $m_0 < \cdots < m_n$, tels que $V_n :=$ Vect $(u_0, \cdots, u_n) =$ Vect $(v_0, \cdots, v_{m_n}$. Comme H est de dimesion infinie, on a $V_n \neq H$. Il existe donc un vecteur $v_p \notin V_n$. On a alors $p > m_n$. On peut donc définir m_{n+1} comme le plus petit entier $p > m_n$ tel que $v_p \notin V_n$. Si on pose $u_{n+1} := v_{m_{n+1}}$, on obtient par construction un système $u_0, \cdot, u_{n+1}$ de vecteurs linéairement indépendants qui tel que Vect $(u_0, \cdots, u_{n+1}) =$ Vect $(v_0, \cdots, v_{m_{n+1}})$. Il en résulte par construction que Vect $((u_j)_{j\in\mathbb{N}})$ est dense dans H.

La deuxième étape consiste à appliquer le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt pour construire à partir du système $(u_j)_{j\in\mathbb{N}}$ un système orthonormé $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, Vect $(e_0, \cdots e_n) =$ Vect $(u_0, \cdots u_n)$ de sorte que Vect $((e_n)_{n\in\mathbb{N}}) =$ Vect $((u_j)_{j\in\mathbb{N}})$ est dense dans H. La conclusion résulte du lemme. ▶

4.4 Applications des bases hilbertiennes

On alors le résultat important suivant.

Theorem 4.13 *Soit H un $\mathbb{K}-$espace de Hilbert muni de son produit scalaire $(\cdot|\cdot)$ et de la norme associée $\|\cdot\|$. Supposons que H possède une base hilbertienne $(e_i)_{i\in I}$. Alors pour tout $x \in H$,*

$$\|x\|^2 = \sum_{i\in I} \|(x|e_i)\|^2.$$

(Identité de Parseval).

En particulier, l'application $\mathcal{F} : H \longrightarrow \ell^2_{\mathbb{K}}(I)$ qui à $x \in H$ associe la suite $\hat{x} = (\hat{x}_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de ses coefficients de Fourier suivant la base hilbertienne $(e_i)_{i\in I}$ est un ismorphisme isométrique.

Le théorème précédent semble indiquer qu'à isomorphisme près les espace de Hilbert sont tous modelés sur les espaces $\ell^2_{\mathbb{K}}(I)$, où I est un ensemble non vide, mais il faut observer que l'isomorphisme décrit dans le théorème est non canonique dans le sens où il dépend de la base hilbertienne choisie. De ce fait chaque espace de Hilbert séparable aura un intérêt particulier et le problème essentiel sera de contruire une base hilbertienne adaptée au problème considéré comme on le verra plus loin.

4.5 Le théorème de représentaion de Riesz

Rappelons que si $(E, \|\cdot\|)$ est un $\mathbb{K}$-espace normé, son dual topologique $E' = \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(H, \mathbb{K})$, défini comme l'espace des formes $\mathbb{K}-$linéaires continues sur sur E, est un espace normé pour la norme duale définie pour $\xi \in E'$ par la formule

$$\|\xi\|^* := \sup |\xi(x)|; x \in E, \|x\| = 1\}.$$

Il est facile de voir que $(E', \|\cdot\|^*)$ est un espace de Banach, même si l'espace $(E, \|\cdot\|)$ n'est pas complet. Il est en général difficile de décrire le dual d'un espace normé même si celui-ci est complet, mais vous verrez plus loin que le dual cet espace jouit de meilleures proriétés de compacité que l'espace lui-mêm

Nous allons voir que pour les espaces de Hilbert, on dispose d'une description simple du dual et que celui-ci hérite d'une structure naturelle d'espace de Hilbert. La caractérisation du dual d'un space de Hilbert que nous allons donner est fondamentale, elle a de nombreuses applications dans divers domaines des mathématiques.

Theorem 4.14 *Soit $(H, (\cdot|\cdot))$ un espace de Hilbert sur le corps $\mathbb{K}$. Alors on a*

1. Si $u \in H$, l'application $\xi_u : H \longrightarrow \mathbb{K}$ définie par $\xi_u(x) = (x|u)$ pour $x \in H$, est une forme $\mathbb{K}$-linéaire continue sur H de norme $\|\xi_u\|^* = \|a\|$.

2. Inversement si $\xi : H \longrightarrow \mathbb{K}$ est une forme $\mathbb{K}$-linéaire continue sur H, il existe un vecteur unique $u \in H$ qui représente ξ i.e. tel que

$$\forall x \in H,\ \xi(x) = (x|u).$$

De plus le vecteur $u \in H$ représente ξ si et seulement si u minimise la fonction à valeurs réelles définie sur H par $f_\xi(x) := \frac{1}{2}\|x\|^2 - \Re\xi(x)$.

Rappelons que si $(E, \|\cdot\|)$ est un $\mathbb{K}$-espace normé, son dual topologique $E' = \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(H, \mathbb{K})$ est défini comme l'espace des formes $\mathbb{K}-$linéaires continues sur E. Le dual est muni d'une norme naturelle, dite norme duale, définie pour $\xi \in E'$ par la formule

$$\|\xi\|^* := \sup\{|\xi(x)|; x \in E, |x| = 1\}.$$

De plus on montre facilement que $(E', \|\cdot\|^*)$ est un espace de Banach (même si $(E, \|\cdot\|)$ n'est pas complet).

Si $(H, (\cdot|\cdot))$ un espace de Hilbert sur le corps $\mathbb{K}$, on désigne par $H' := \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(H, \mathbb{K})$ H son dual topologique. L'espace H' hérite d'une structure d'espace de Hilbert (la préciser).

Corollary 4.15 *Soit $(H, (\cdot|\cdot))$ un espace de Hilbert sur le corps $\mathbb{K}$ et $H' := \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(H, \mathbb{K})$. Alors l'application $H \ni u \longrightarrow \xi_u \in H'$ est un isomorphisme anti-$\mathbb{C}$-linéaire isométrique de H sur H'.*

5 Séries de Fourier

5.1 Série de Fourier dans $L^2(\mathbb{T})$

Le cadre naturel pour étudier les fonctions $2\pi-$périodique sur $\mathbb{R}$ est celui des fonctions définies sur le cercle cercle unité $\mathbb{T}$. En effet, en identifiant le cercle unité $\mathbb{T}$ au quotient $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ par l'homéomorphisme exponentiel $\exp : \theta \longrightarrow e^{i\theta}$, une fonction continue $h : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{C}$ définit de façon naturelle une fonction continue $2\pi-$périodique $\tilde{h} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ par la formule $\tilde{f} := f \circ \exp$. Inversement pour toute fonction continue $f : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{C}$, il existe une unique fonction continue $2\pi-$ériodique $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ vérifiant la relation $\tilde{h} = f$. Pour étudier les fonctions $2\pi-$périodiques, il suffira de se restreindre à un intervalle de longueur 2π.

On identifiera dans la suite la fonction f avec la fonction h que l'on supposera définie sur l'intervalle symétrique $[-\pi, +\pi]$ et prenant la même valeur aux étrémités.

On dira que la fonction $f : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{C}$ est *mesurable*(resp. *intégrable*) au sens de Lebesgue sur $\mathbb{T}$ si par définition $\tilde{f} = h \circ \exp$ est intégrable au sens de Lebesgue sur $[-\pi, +\pi]$. On définit alors l'intégrale de Lebesgue (normalisée) sur le cercle $\mathbb{T}$ par la formule suivante:

$$\int_{\mathbb{T}} f(\zeta) d\sigma(\zeta) := \int_{-\pi}^{+\pi} f(e^{i\theta}) \frac{d\theta}{2\pi},$$

où $f \in \mathbb{L}^1(\mathbb{T}) = \mathbb{L}^1_{\mathbb{C}}([-\pi, +\pi], \frac{d\theta}{2\pi}))$.

Cette intégrale est celle associée à la mesure σ sur le cercle $\mathbb{T}$ définie comme suit: une partie $A \subset \mathbb{T}$ est mesurable si son image réciproque $\exp^{-1}(A)$ est une partie mesurable au sens de Lebesgue de $\mathbb{R}$. On défnit ainsi une tribu $\mathcal{L}(T)$ sur $\mathbb{T}$, appelée la tribu de Lebesgue sur $\mathbb{T}$ et on pose pour $A \in \mathcal{L}(T)$,

$$\sigma(A) := \frac{1}{2\pi}\lambda\left(\{\theta \in [-\pi, +\pi]; e^{i\theta} \in A\}\right).$$

C'est la mesure image directe notée $\sigma := E_*(\lambda/2\pi)$ de la mesure de Lebesgue normalisée sur $[-\pi, +\pi]$ par l'application exponentielle $E = \exp|[-\pi, +\pi] : [-\pi, +\pi] \longrightarrow \mathbb{T}$. On l'appelle la mesure de Lebesgue normalisée sur $\mathbb{T}$.

Pour chaque $p \geq 1$, on notera $\mathbb{L}^p(\mathbb{T}) = \mathbb{L}^p_{\mathbb{C}}([-\pi, +\pi], \frac{d\theta}{2\pi})$ l'espace de Lebesgue d'exposant p associé.

En particulier, d'après de théorème de Riesz-Fischer, l'espace $\mathbb{L}^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{T})$ est un espace de Hilbert complexe pour le produit scalaire hermitien défini pour $f, g \in \mathbb{L}^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{T})$ par la formule suivante:

$$(5.1) \qquad (f|g) := \int_{\mathbb{T}} f(\zeta)\overline{g(\zeta)}d\sigma(\zeta) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(\theta)\overline{g(\theta)}\frac{\theta}{2\pi}.$$

Posons pour $n \in \mathbb{Z}$,

$$e_n(\zeta) := \zeta^n = e^{in\theta}, \quad \zeta = e^{i\theta} \in \mathbb{T}.$$

Les fonctions e_n sont de classe C^∞) sur $\mathbb{T}$. On a alors le résultat élémentaire suivant.

Lemma 5.1 *$(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est un système orthonormé de l'espace de Hilbert $\mathbb{L}^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{T})$.*

Démonstration: En effet pour $m, n \in \mathbb{Z}$, on a de façon évidente

$$(e_n|e_m) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} e^{i(n-m)\theta}d\theta.$$

Si $n = m$ on a alors $(e_n|e_n) = 1$. Si $n \neq m$, on a

$$(e_n|e_m) = \left[\frac{e^{i(n-m)\theta}}{i(n-m)}\right]_{\theta=-\pi}^{+\pi} = \frac{2}{n-m}\left[sin(n-m)\theta\right]_{\theta=-\pi}^{+\pi} = 0,$$

ce qui prouve que $(e_n|e_m) = \delta_{nm}$. ▶
Le système orthonormé $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est appelé le *système trigonométrique complexe.*

Pour $f \in \mathbb{L}^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{T})$, on pose

$$(5.2) \quad \hat{f}_n = c_n(f) = (f|e_n) = \int_{\mathbb{T}} f \cdot \overline{e_n}d\sigma = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(e^{i\theta}))e^{-int}dt, \ n \in \mathbb{Z},$$

Le nombre complexe $\hat{f}_n$ est applelé le *coefficient de Fourier complexe* d'ordre n, tandis que la série de fonctions périodiques $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)e_n$ est appelée la *série de Fourier* de f. Ses sommes partielles bilatérales sont définies par

$$S_N(f) := \sum_{n=-N}^{+N} c_n(f)e_n, N \in \mathbb{N}.$$

On appelle polynoôme trigonomérique complexe de degré au plus n, une combinaison linéaire complexe finie de la forme $\sum_{j=-n}^{n} d_j e_j$ et on désigne par $\mathcal{T}_n$ l'espace vectoriel complexe des polynômes trigonomérique complexes de degré n. On a alors

Proposition 5.2 *Soit $f \in \mathbb{L}^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{T})$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, la projection orthogonale de f sur $\mathcal{T}_n$ est donnée par la formule suivante:*

$$P_{\mathcal{T}_n}(f) = S_N(f) = \sum_{j=-n}^{+n} c_j(f)e_j,$$

de sorte que pour tout polynôme trigonomérique complexe $T = \sum_{j=-n}^{n} d_j e_j \in \mathcal{T}_N$, on a

$$\int_{\mathbb{T}} \left| f(\theta) - \sum_{k=-n}^{+n} c_k(f)e^{ik\theta} \right|^2 d\theta \leq \int_{\mathbb{T}} \left| f(\theta) - \sum_{k=-n}^{n} d_k e^{ik\theta} \right|^2 d\theta.$$

De plus, on a l'inégalité suivante:

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_k(f)|^2 \leq \int_{\mathbb{T}} |f(\theta)|^2 \frac{d\theta}{2\pi}$$

(Inégalité de Bessel).

On a alors une application naturelle

$$\mathcal{F} : \mathbb{L}^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{T}) \longrightarrow \ell^2(\mathbb{Z})$$

qui à une fonction $f \in \mathbb{L}^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{T})$ associe la suite $\hat{f} = (\hat{f}_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ de ses coefficients de Fourier. C'est une application linéaire continue d'après l'inégalité de Bessel. En appliquant les résultat de la théorie des espaces de Hilbert, on obtient le résultat suivant.

Theorem 5.3 *Le système trigonométrique ($e_n n \in \mathbb{Z}$) est complet dans $\mathbb{L}^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{T})$, c'est donc une base hilbertienne de $\mathbb{L}^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{T})$ de sorte que pour tout $f \in \mathbb{L}^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{T})$ on a la représentation suivante:*

$$f \;=_{\mathbb{L}^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{T})} \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)e_n,$$

ce qui signifie que la série du second membre converge en moyenne quadratique vers f i.e.

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{\mathbb{T}}|f-S_n(f)|^2 d\sigma = 0.$$

En particulier on a l'identité de Parseval

$$|c_0|^2+\sum_{n=1}^{+\infty}(|\hat{f}_n|^2+|\hat{f}_{-n}|^2)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}|f(\theta)|^2 d\theta,$$

ce qui signifie que la transformée de Fourier discrète

$$\mathcal{F}:\mathbb{L}^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{T})\longrightarrow \ell^2(\mathbb{Z})$$

est un isomorphisme isométrique de $\mathbb{L}^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{T})$ sur $\ell^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{Z})$.

Démonstration: La seule chose à démontrer est que le système trigonomérique est complet. Cela peut être déduit du théorème de Weierstrass. En effet supposons

Il sera plus commode dans la suite de considérer le système trigonométrique réel. En effet, pour $f\in\mathbb{L}^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{T})$, posons

$$a_0(f):=2c_0(f),\ a_k(f):=c_k(f)+c_{-k}(f), b_k(f):=i(c_k(f)-c_{-k}(f)),\ k\in\mathbb{N}^*,$$

de sorte que les nombres complexes obtenus vérifient les relations suivantes

$$c_k(f)=\frac{a_k(f)-ib_k(f)}{2},\ c_{-k}=\frac{a_k(f)+ib_k(f)}{2},\ \forall k\in\mathbb{N}^*.$$

Il en résulte que pour $n\in\mathbb{N}$, la somme partielle symétrique d'ordre n de la série de Fourier de f s'écrit

$$S_nf(t)=S_n(t):=\sum_{k=-n}^{+n}c_k(f)e^{ikt}=\frac{1}{2}a_0(f)+\sum_{k=1}^{n}(a_k(f)\cos kt+b_k(f)\sin kt).$$

Observons qu'à partir des formules (5.2), on obtient facilement les formules suivantes pour les coefficients $a_k(f)$ et $b_k(f)$, appelées formules d'Euler:

$$\begin{aligned} a_kf) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}f(t)\cos(kt)dx,\ k\in\mathbb{N},\\ b_k(f) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}f(t)\sin(kt)dt,\ k\in\mathbb{N}^*.\end{aligned}$$

L'avantage de ces coefficients est qu'ils sont réels si f est à valeurs réelles de sorte que la série de Fourier est une somme de fonctions $2\pi-$périodiques réelles.

Theorem 5.4 *Le système des polynômes trigonométriques réels suivant*

(5.3) $\qquad 1, \sqrt{2}\cos x, \sqrt{2}\sin x, \ldots, \sqrt{2}\cos kx, \sqrt{2}\sin kx, \ldots, k \in \mathbb{N}^*$

est une base orthonormée de $\mathbb{L}^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{T})$*, appelé le système trigonométrique réel.*

Les sommes partielles de la série de Fourier de f *suivant ce système orthonormé sont précisément les sommes partielles symétriques de* f *suivant le le système trigonométrique complexe i.e.*

$$S_n(f)(\theta) = \sum_{k=-n}^{+n} c_k(f)e^{ik\theta} = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k(f)\cos k\theta + b_k(f)\sin k\theta).$$

On a l'identité de Parseval suivante:

$$|a_0(f)|^2/2 + \sum_{k=1}^{+\infty}\left(|a_k(f)|^2 + |b_k(f)|^2\right) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}|f|^2 dt.$$

Démonstration: En effet, pour vérifier que ce système est un système orthogonal dans dans $\mathbb{L}^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{T})$, posons $\varphi_0(\theta) = 1,\ \varphi_k(\theta) = \cos(k\theta),\ \psi_k(\theta) := \sin(k\theta)$ pour $k \in \mathbb{N}^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Alors $\varphi_k = (1/2)(e_k + e_{-k})$ pour $k \in \mathbb{N}$ et $\psi_k = (1/2i)(e_k - e_{-k})$ pour $k \in \mathbb{N}^*$. Par suite, puisque $e_n \perp e_{-m}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $m \in \mathbb{N}^*$ on a

$$(\varphi_k|\psi_l) = \frac{1}{4i}(e_k + e_{-k}|e_l - e_{-l}) = \frac{1}{4i}((e_k|e_k) - (e_l|e_l)) = 0$$

pour tout $k \in \mathbb{N}$ et $l \in \mathbb{N}^*$.

D'autre part puisque $e_n \perp e_m$ si $n \neq m$ on a pour $k \in \mathbb{N}$ et $l \in \mathbb{N}$ tels que $k \neq l$ $(\varphi_k|\varphi_l) = \frac{1}{4}(e_k + e_{-k}|e_l + e_{-l}) = 0$ de même que $(\psi_k|\psi_l) = \frac{1}{4i}(e_k - e_{-k}|e_l - e_{-l}) = 0$.

Enfin on a $(\varphi_k|\varphi_k) = (1/4)\|e_k + e_{-k}|^2 = 1/2$ et $(\psi_k|\psi_k) = (1/4)\|e_k - e_{-k}|^2 = 1/2$. Il en résulte que

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\frac{1}{2}dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\cos^2(kx)dx = 1, \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\sin^2(kx)dx = 1,\ \forall k \in \mathbb{N}^*.$$

Ces identités résultent également des formules trigonométriques suivantes:

$$\begin{aligned}
2\cos(nx)\cos(mx) &= \cos(n+m)x) + \cos(n-m)x,\\
2\sin(nx)\sin(mx) &= \cos(n-m)x - \cos(n+m)x,\\
2\sin(nx)\cos(mx) &= \sin(n+m)x + \sin(n-m)x.
\end{aligned}$$

Posons $E_0 = 1$ et pour $k \in \mathbb{N}^*$, $E_{2k} = \sqrt{2}\cos(k\theta), E_{2k+1} = \sqrt{2}\sin(k\theta)$. Comme

$$(f|E_0) = \frac{a_0(f)}{2},\ (f|E_{2k}) = \frac{1}{\sqrt{2}}a_k(f),\ (f|E_{2k+1}) = \frac{1}{\sqrt{2}}b_k(f),$$

on en déduite que les sommes partielles de f suivant le système trigonométrique réel (E_m) sont données par

$$\sum_{m=0}^{n}(f|E_{2k})E_m == \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k(f)\cos k\theta + b_k(f)\sin k\theta).$$

Il en résulte les sommes partielles de f suivant le système trigonométrique réel sont précisément les sommes partielles symétriques de la série de Fourier de f. On en déduit immédiatement l'identité de Parseval

$$|a_0(f)|^2/2 + \sum_{k=1}^{+\infty}\left(|a_k(f)|^2 + |b_k(f)|^2\right) \leq \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}|f|^2 dt.$$

▶

Remarque 5.5 *L'utilisation du système trigonométrique réel a plusieurs avantages.*

- *La série de Fourier suivant le système trigonométrique réel est une série ordinaire (unilatérale).*
- *Si f est à valeurs réelles, les coefficients $a_k(f)$ et $b_k(f)$ sont des nombres réels puisque dans ce cas $\overline{c_k(f)} = c_{-k}(f)$ et donc $a_k(f) = 2\Re c_k(f)$ et $b_k(f) = -2\Im c_k(f)$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.*
- *Si f est à valeurs réelles, pour chaque $n \in \mathbb{N}$, la somme de Fourier partielle d'ordre n, $S_n f$ est un polynôme trigonométrique réel de degré n.*
- *Si f est impaire (resp. paire) on a $a_k(f) = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ (resp. $b_k(f) = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.)*

L'espace de Hilbert $\mathbb{L}^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{T})$ contient plusieurs sous-espace intéressants.

- L'espace des fonctions continues sur le cercle i.e. des fonctions continues 2π-périodiques sur $\mathbb{R}$.
- L'espace des fonctions continues 2π-périodiques sur $\mathbb{R}$, de classe C^1 par morceaux. Une fonction $f : [-\pi, +\pi] \longrightarrow \mathbb{C}$ est de classe C^1 par morceaux s'il existe une subdivision finie de $[-\pi, +\pi]$ telle que pour chaque segment $[x_i, x_{i+1}]$ de la subdivision il existe une fonction f_i de classe C^1 sur $[x_i, x_{i+1}]$ telle que $f = f_i$ sur $]x_i, x_{i+1}[$. Observons qu'une telle fonvtion n'est pas continue mais elle possère une limite à droite et une limite à gauche en tout point. On modifie alors f suivant Dirichlet en posant

$$\tilde{f}(\theta) := \frac{f(\theta^+) + f(\theta^+)}{2},$$

où $f(\theta^+)$ est la limite à droite de f en θ et $f(\theta^-)$ est est la limite à gauche de f en θ.

Nous allons étudier le comportement de la série de Fourier dans chacune des classes précédents.

5.2 Séries de Fourier dans $L^1(\mathbb{T})$: le lemme de Riemann-Lebesgue

Il s'agit de décrire le comportement des coefficients de Fourier d'une fonction intégrable. D'après ce qui précède, si $f \in \mathbb{L}^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{T})$, l'inégalité de Bessel s'écrit

$$2\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|^2 = |a_0(f)|^2/2 + \sum_{k=1}^{+\infty}(|a_k(f)|^2 + |b_k|^2)\Big) \leq \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} |f(t)|^2 dt.$$

Ce qui prouve que la suite des coéficients de Fourier de f est de carré absoluement sommable. En particulier

$$\lim_{k\to+\infty} a_k(f) = \lim_{k\to+\infty} b_k(f) = 0.$$

D'une façon plus générale, si $f : [-\pi, +\pi] \longrightarrow \mathbb{C}$ est une fonction intégrable (e.g. continue par maorceaux), on peut définir les coéficients de Fourier de f par la formule habituelle

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(t)e^{int}dt,\ n \in \mathbb{N},$$

et l'on a pour tout $n \in \mathbb{Z}$,

$$|c_n(f)| \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} |f(t)|dt.$$

On peut donc associer à $f \in L^1(\mathbb{T})$ sa série de Fourier:

$$f \sim \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)e^{inx} = \frac{1}{2}a_0 + \sum k \geq 1(a_k(f)\cos kx + b_k(f)\sin kx)$$

où

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(t)e^{int}dt,\ n \in \mathbb{N}.$$

Nous aurons besoin du lemme suivant qui décrit le comportement des coéfficients de Fourier d'une fonction intégrable (au sens de Lebesgue).

Lemma 5.6 *(Lemme de Riemann-Lebesgue). Soit $g : [a,b] \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction intégrable. Alors on a*

$$\lim_{|\tau|\to+\infty}\int_a^b g(s)e^{i\tau s}ds = 0.$$

En particulier, si $f \in \mathbb{L}^1(\mathbb{T})$, on a

$$\lim_{|n| \to +\infty} \hat{f}_n = 0.$$

Démonstration: Observons tout d'abord que si g est de classe C^1 sur $[a, b]$, alors par intégration par parties, on en déduit que pour $\tau \neq 0$

$$\int_a^b g(s) e^{i\tau s} ds = \Big[\frac{g'(s) e^{i\tau s}}{i\tau}\Big]_{\tau=a}^{\tau=b} - \int_a^b g'(s) e^{i\tau s} \frac{ds}{i\tau}.$$

Le résultat en découle par passage à la limite.

Supposons maintenant que g soit une fonction intégrable sur $[a, b]$. Alors il existe une suite $(g_n)_{n\geq 0}$ de polynômes qui converge en moyenne sur $[a, b]$ vers f.

Alors pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et $p \in \mathbb{N}$ on a

$$\int_a^b f(s) e^{i\tau s} ds = \int_a^b (f - g_p)(s) e^{i\tau s} ds + \int_a^b g_p(s) e^{i\tau s} ds =: I_p(\tau) + J_p(\tau).$$

Comme pour tout $p \in \mathbb{N}$ et $\tau \in \mathbb{R}$, on a

$$|I_p(\tau)| := |\int_a^b (g - g_p)(s) e^{i\tau s} ds| \leq \int_a^b |g(t) - g_p(t)|$$

, il en résulte que $I_p(\tau) \to 0$ uniformément en $\tau \in \mathbb{Z}$ lorsque $p \to +\infty$. Pour $\varepsilon > 0$ on peut donc trouver un ranp $p_0 \geq 1$ indépendant de $\tau \in \mathbb{R}$ tel que $|I_p(\tau)| \leq \varepsilon$ pour tout $p \geq p_0$ et tout $\tau \in \mathbb{R}$.

On sait d'après la première partie que $\lim_{\tau| \to +\infty} J_{p_0}(\tau) = 0$. Il existe donc un réel $A > 0$ tel que pour $|\tau| \geq A$ on ait $|J_{p_0}(\tau)| \leq \varepsilon$. On en déduit finalement que pour $|\tau| \geq A$ on a $| \int_a^b g(s) e^{i\tau s} ds| \leq 2\varepsilon$.▶

Il en résulte la propriété suivante de la transformée de Fourier discrère.

Corollary 5.7

$$\mathcal{F} : L^1(\mathbb{T}) \longrightarrow c_0(\mathbb{Z}),$$

où $c_0(\mathbb{Z})$ est l'espace des suites $c = (c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ de nombres complexes tendant vers 0 i.e. $\lim_{|n|\to+\infty} |c_n| = 0$ muni de la norme $\|c\|_\infty := \sup_{n\in\mathbb{Z}} |c_n|$.

On peut montrer que cette application n'est pas surjective (voir TD).

5.3 Série de Fourier d'une fonction de classe C^1 par morceaux

Nous allons étudier l'influence de la régularité d'une fonction sur le comportement des coefficients de Fourier et par voie de conséquence sur la convergence de sa série de Fourier.

Proposition 5.8 *1) Si $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ est une fonction continue $2\pi-$périodique de classe C^1 par morçeaux, alors*

$$c_n(f) = \frac{1}{in} c_n(f'), \forall n \in \mathbb{Z}^*$$

ou encore

$$a_k(f) = -\frac{1}{n} b_k(f') \text{ et } b_k(f) = -\frac{1}{n} a_k(f') \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

En particulier $c_n(f) = o(1/|n|)$ lorsque $|n| \to +\infty$.
Si f est de classe C^{m-1} et sa dérivée d'ordre m est continue par morceaux, alors $c_n(f) = o(|n|^m)$ lorsque $|n| \to +\infty$.
2) Si $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ est une fonction $2\pi-$périodique continue par morçeaux, alors la fonction F définie par la formule

$$F(x) := \int_0^x f(t)dt - \frac{a_0(f)}{2} x, \ x \in \mathbb{R},$$

est continue, $2\pi-$périodique et de classe C^1 par morçeaux sur $\mathbb{R}$ et ses coéfficients de Fourier sont donnés par la formule

$$c_n(F) = \frac{1}{in} c_n(f), \forall n \in \mathbb{Z}^*,$$

avec $a_0(F) = 0$.

<u>Démonstration:</u> En effet, en intégrant par parties, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi} (\int_{-\pi}^{+\pi} f(t) e^{int} dt.$$

Corollary 5.9 *Si $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ est une fonction continue $2\pi-$périodique de classe C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$, alors sa série de Fourier*

$$\frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} (a_k(f) \cos kt + b_k(f) \sin kt)$$

converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers f.

En effet d'après les formules ci-dessus, on a

$$|a_k(f)| + |b_k(f)| = \frac{1}{k} (|a_k(f')| + |b_k(f')|), \forall k \in \mathbb{N}^*.$$

Utilisant l'inégalité triviale $2\alpha\beta \leq (\alpha^2 + \beta^2)$ pour tout $\alpha, \beta \geq 0$, on en déduit que pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\sum_{k \geq 1} \max_{t \in \mathbb{R}} |a_k(f) \cos kt + b_k(f) \sin kt| \quad \leq \quad \sum_{k \geq 1} \frac{1}{2k^2} + \frac{1}{2} (|a_k(f')|^2 + |b_k(f)|^2),$$

$$\leq \sum_{k\geq 1} \frac{1}{2k^2} + \|f'\|^2 < \infty.$$

Il en résulte que la série de Fourier de f converge normalement et donc uniformément sur $\mathbb{R}$. Si on note g la somme de cette série, on en déduit que g est une fonction continue $2\pi-$périodique sur $\mathbb{R}$ telle que les coefficients de Fourier de g coincident avec ceux de f. Comme le système trigonométrique est complet d'après le corollaire 3.3, on en deduit que $f \equiv g$. ►

Donnons quelques exemples pour illustrer les résultats obtenus précédemment.

Exemple : Soit $f : [-\pi, +\pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = -1$ si $-\pi \leq x \leq 0$ et $f(x) = 1$ si $0 < x \leq +\pi$. Alors f est continue par morceaux et paire par conséquent $a_n(f) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour $n \in \mathbb{N}^*$ on a

$$b_n(f) = (2/\pi)\int_0^\pi \sin ntdt = \frac{2}{\pi n}(1 - \cos(n\pi)).$$

Il en résulte que $b_{2p} = 0$ et $b_{2p+1} = 4/(2p+1)\pi$.

D'après l'identité de Parseval, on en déduit que

$$\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

Observons que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p)^2} + \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2},$$

d'où il résulte immédiatement que

$$\frac{3}{4}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2},$$

et donc

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Exemple : Soit f la fonction $2\pi-$périodique sur $\mathbb{R}$ définie par $|x|$ pour $|x| \leq \pi$. Comme cette fonction est continue et paire sur $[-\pi, +\pi]$, de classe C^1 par morceaux. Il en résulte que $b_n(f) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et

$$a_n(f) = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi t\cos(nt)dt, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Il est clair que $a_0(f) = \pi$ et que si $n \in \mathbb{N}^*$, une simple intégration par parties montre que

$$a_n(f) = \frac{2}{\pi}\frac{(-1)^n - 1}{n^2}.$$

Comme la fonction est de classe C^1 par morceaux, il résulte du théorème précédent que

$$|x| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)}^2, \forall x \in [-\pi, +\pi],$$

la convergence étant uniforme sur l'intervalle $[-\pi, +\pi]$.

En posant $x = 0$, on en déduit que

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8},$$

ce qui avait déja été obtenu dans l'exemple 1.

5.4 Fonctions continues dont la série de Fourier diverge

Nous allons voir grâce au théorème de Baire qu'il existe beaucoup de fonctions (au sens topologique de Baire) $2\pi-$périodiques sur $\mathbb{R}$ dont la série de Fourier ne converge pas en un point donné.

5.4.1 Les formules de Dirichlet

Pour étudier la série de Fourier d'une fonction intégrable sur $[-\pi, +\pi]$, nous allons exprimer ses sommes de Fourier à l'aide de moyennes pondérées de f par un noyau explicite.

Proposition 5.10 *Soit $f : [-\pi, +\pi] \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction intégrable au sens de Riemann. Alors ses sommes partielles de Fourier sont données par les formules intégrales suivantes:*

$$(5.4) \qquad S_n^f(t) = \int_{-\pi}^{+\pi} f(\theta) D_n(t-\theta) d\theta = \int_{-\pi}^{+\pi} f(t+s) D_n(s) ds, \ \forall n \in \mathbb{N},$$

où pour chaque $n \in \mathbb{N}$,

$$(5.5) \qquad D_n(t) := \frac{1}{\pi} \Re\Big(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} e^{ikt}\Big) = \frac{1}{2\pi} \frac{\sin(n+1/2), t}{\sin(t/2)}, t \in \mathbb{R},$$

est un polynome trigonométrique pair de degré n vérifiant l'identité

$$\int_{-\pi}^{+\pi} D_n(t) dt = 1.$$

Démonstration: En effet par définition, pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} S_n f(t) &= \sum_{k=-n}^{n} c_k(f) e^{ikt} \\ &= = \sum_{k=-n}^{n} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(\theta) e^{ik(t-\theta)} d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \Big(1 + \sum_{k=1}^{n} (e^{ik(t-\theta)} + e^{-ik(t-\theta)}\Big) f(\theta) d\theta. \end{aligned}$$

En posant

$$D_n(\tau) := \frac{1}{\pi} \Re\Big(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} e^{ik\tau}\Big)$$

, on a obtient la formule suivante:

$$S_n f(t) = \int_{-\pi}^{+\pi} f(\theta) D_n(t-\theta) d\theta,$$

ce qui prouve la première égalité dans (**??**).

Pour obtenir la deuxième égalité, il suffit d'observer que si $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ est une fonction intégrable et $2\pi-$périodique, alors

$$\int_{-\pi}^{+\pi} g(s+a) ds = \int_{-\pi+a}^{+\pi+a} g(t) dt = \int_{-\pi}^{+\pi} g(t) dt, \forall a \in \mathbb{R}.$$

En effet, la première identité s'obtient en posant $s := t + a$. Pour obtenir la deuxième identité, on fait le changement de variable $t = s + 2\pi$ pour voir que $\int_{-\pi+a}^{-\pi} g(t)dt = \int_{\pi+a}^{+\pi} g(s)ds = -\int_{\pi}^{+\pi+a} g(s)dts$ et en déduire que $\int_{-\pi+a}^{+\pi+a} g(s)ds = \int_{-\pi+a}^{-\pi} g(s)ds + \int_{-\pi}^{+\pi} g(s)ds + \int_{+\pi}^{\pi+a} g(s)ds = \int_{-\pi}^{+\pi} g(s)ds.$

On en déduit alors que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$S_n f(t) = \int_{-\pi}^{+\pi} f(t+s) D_n(s) ds.$$

D'autre part, on a

$$D_n(t) = \frac{1}{\pi} \Re\ \Big(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} e^{ikt}\Big),\ \forall t \in \mathbb{R}.$$

De plus pour $t \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$, on a

$$\begin{aligned} \Re\Big(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} e^{ikt}\Big) &= \Re\Big(\frac{1}{2} + e^{it} \frac{e^{int} - 1}{e^{it} - 1}\Big) \\ &= \Re\Big(\frac{1}{2} + \frac{e^{i(n+1/2)t} - e^{it/2}}{e^{it/2} - e^{-it/2}}\Big). \end{aligned} \tag{5.6}$$

Comme

$$
\begin{aligned}
\Re\frac{e^{i(n+1/2)t}-e^{it/2}}{e^{it/2}-e^{-it/2}}\Big) &= \Re\Big(\frac{1}{2\sin(t/2)}\frac{e^{i(n+1/2)t}-e^{it/2}}{i}\Big) \\
&= \frac{\sin(n+1/2)t}{2\sin t/2}-1/2, \qquad (5.7)
\end{aligned}
$$

il résulte de (3.3) et (3.4) que le noyau de Dirichlet est donné par la formule suivante:

$$
D_n(t)=\frac{\sin(n+1/2)t}{2\pi\sin(t/2)},\ \forall n\in\mathbb{N},\forall t\in\mathbb{R}. \tag{5.8}
$$

Notons que le second membre de la formule (5.8) est bien défini en 0 modulo 2π, sa valeur étant obtenue par prolongement par continiuité de la fonction considérée de sorte que $2\pi D_n(0)=2n+1$pour tout $n\in\mathbb{N}$. Cette formule montre que D_n est un polynôme trigonométrique de degré n ayant exactement $n+1$ zéros dans l'intervalle $[0,\pi]$ et change de signe au voisinage de chacun de ses zéros.

On a alors

$$
S_nf(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}f(\theta+t)\frac{\sin(n+1/2)\theta}{\sin(\theta/2)}d\theta,\ \forall n\geq 0.
$$

Observons que si $f\equiv 1$, on a $a_0(f)=2$ et $a_k(f)=b_k(f)=0$ pour tout $k\in\mathbb{N}^*$ et donc $S_nf(t)=1$ pour tout $t\in\mathbb{R}$ et $n\in\mathbb{N}$, de sorte que le noyau de Dirichlet a la propriété suivante:

$$
\int_{-\pi}^{+\pi}D_n(t)dt=1,\forall n\in\mathbb{N}.
$$

▶
La fonction D_n est un polynôme trigonométrique pair de degré n appellé le *noyau de Dirichlet* d'ordre $n\in\mathbb{N}$.

5.4.2 Application du théorème de Baire

Nous allons utiliser les formules de Dirichlet pour démontrer le résultat suivant.

Theorem 5.11 *Pour chaque point $t_0\in[-\pi,+\pi]$, il existe au moins une fonction continue $2\pi-$périodique sur $\mathbb{R}$ dont la série de Fourier au point t_0 ne converge pas. D'une façon plus précise, l'ensemble des fonctions continues $2\pi-$périodiques sur $\mathbb{R}$ dont la série de Fourier au point t_0 ne converge pas est dense dans l'espace $\mathcal{C}(\mathbb{T})$.*

Démonstration: Il est clair que l'espace $\mathcal{C} = \mathcal{C}(\mathbb{T})$ identifié
'a l'espace des fonctions complexes 2π-périodiques continues sur $\mathbb{R}$ muni de la norme de la convergence uniforme $\|.\|_\infty$ est un espace de Banach.

Supposons pour simplifier que $t_0 = 0$ et désignons par $\mathcal{U}$ l'ensemble des fonctions $f \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$ telle que la suite des nombres complexes $(S_n f(0))_{n\in\mathbb{N}}$ soient non bornée. Nous allons montrer que $\mathcal{U}$ est un ensemble de type G_δ partout dense ou encore que son complémentaire est un ensemble de type F_σ d'intérieur vide.

Observons d'abord que les sommes de Fourier $f \longmapsto S_n f(t_0)$ au point 0 définissent des fonctionnelles $\Lambda_n : \mathcal{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ linéaires continues sur l'espace de Banach complexe $(\mathcal{C}, \|.\|_\infty)$. En effet posons pour $n \in \mathbb{N}$ et $f \in \mathcal{C}$,

$$\Lambda_n(f) := S_n f(0) = \int_{-\pi}^{+\pi} f(t) D_n(t)| dt.$$

Il est clair que pour chaque $n \in \mathbb{N}$, Λ_n est une forme linéaire sur $\mathcal{C}$ et que

$$|\Lambda_n(f)| \leq \|f\|_\infty \int_{-\pi}^{+\pi} |D_n(t)| dt.$$

Il en résulte en particulier que la normes d'opérateur vérifie

$$|||\Lambda_n||| \leq \int_{-\pi}^{+\pi} |D_n(t)| dt.$$

Nous allons démontrer le lemme suivant qui calcule la norme de cet operateur.

Lemma 5.12 *1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la norme d'opérateurs de la fonctionnelle Λ_n est donnée par la formule suivante*

$$|||\Lambda_n||| = \int_{-\pi}^{+\pi} |D_n(t)| dt.$$

2) Les noyaux de Dirichlet ont la propriété fondamentale suivante:

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \int_{-\pi}^{+\pi} |D_n(t)| dt = +\infty. \tag{5.9}$$

Démonstration: 1) En effet fixons $n \in \mathbb{N}$ et observons que la fonction signe de D_n définie par $\delta_n : \mathbb{R} \ni t \longmapsto \mathrm{sgn}(D_n(t))$, qui n'est pas continue aux zéros de D_n, a une norme sup égale à 1 et que formellement au moins, la valeur de la fonctionelle Λ_n sur la fonction δ_n est précisément égale la valeur de l'intégrale du second membre de l'identité (**??**), ce qui tendrait à montrer cette identité. Pour la justifier procédons par approximation continue de la fonction δ_n. En effet considérons pour $n \in \mathbb{N}$,la fonction continue affine par morceaux et impaire telle que $\chi_p(x) = 1$ pour $1/p \leq x \leq \pi$ et posons $\varphi_p(t) := \chi_p(D_n(t)$

pour $t \in \mathbb{R}$. Alors il est clair que $\varphi_n \in \mathcal{C}$ et $\|\varphi_n\|_\infty = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Observer au passage que la suite (φ_p) converge ponctuellement vers δ_n en chaqu'un de ses points de continuité. Par ailleurs, $n \in \mathbb{N}$ étant fixé, on a pour tout $p \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned}
\Lambda_n(\varphi_p) &= \int_{-\pi}^{+\pi} \varphi_p(D_n(t))D_n(t)dt \\
&\geq \int_{1/p|D_n(t)|\leq\pi} |D_n(t)\|dt \\
&= \int_{-\pi}^{+\pi} |D_n(t)\| - \int_{|D_n(t)|\leq 1/p} |D_n(t)\| \\
&\geq \int_{-\pi}^{+\pi} |D_n(t)\| - 2\pi/p.
\end{aligned}$$

En faisant tendre p vers $+\infty$ on obtient la formule (**??**).

2) En observant que pour $0 \leq t \leq \pi$ on a $0 \leq \sin(t/2) \leq t/2$, on obtient

$$\int_{-\pi}^{+\pi} |D_n(t)|dt \geq \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{|\sin(n+1/2)t|}{t}dt.$$

En faisant le changement de variable $s = (n+1/2)t$, on en déduit que

$$\int_{-\pi}^{+\pi} |D_n(t)|dt \geq \frac{1}{\pi}\int_0^{(n+1/2)\pi} \frac{|\sin t|}{t}dt,$$

ce qui prouve le résultat puisque l'on sait que l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} \frac{|\sin t|}{t}dt$ diverge. ▶

Pour achever la preuve du théorème, considérons pour chaque entier $p \in \mathbb{N}$, l'ensemble suivant:

$$\mathcal{F}_p := \{f \in \mathcal{C}; \sup_{n\in\mathbb{N}} |\Lambda_n(f)| \leq p\}.$$

Alors $\mathcal{F}_p$ est un sous-ensemble fermé de l'espace de Banach $\mathcal{C}$. Montrons que pour tout $p_i n\mathbb{N}$, $\mathcal{F}_p$ est d'intérieur vide. En effet, sinon l'un au moins des fermés $\mathcal{F}_p$ serait d'intérieur non vide et donc la suite (Λ_n) serait uniformément bornée sur une boule de l'espace de Banach $\mathcal{C}$, ce qui contredirait la propriété (5.9).

On a donc une suite $(\mathcal{F})_{p\in\mathbb{N}}$ de fermés d'intérieurs vides. D'après le théorème de Baire, l'ensemble réunion $\mathcal{F} := \mathcal{C} \setminus \mathcal{U} = \bigcup_{p\geq 1} \mathcal{F}_p$ est un ensemble de type F_σ d'intérieur vide. Par conséquent $\mathcal{U}$ est un ensemble de type G_δ dense dans $\mathcal{C}$ donc non vide. ▶

5.5 Convergence de la série de Fourier: Jordan, Dirichlet et Dini

5.5.1 Le critère de Dini

Pour énoncer le résultat essentiel de ce chapitre, on aura besoin d'une définition.

Definition 5.13 *Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction $2\pi-$périodique localement intégrable sur $\mathbb{R}$ et $x_0 \in [-\pi, +\pi]$. On dit que f vérifie la condition de Dini au point x_0 s'il existe un nombre complexe $\ell \in \mathbb{C}$ tel que la fonction*

$$t \longrightarrow \phi_a := \frac{f(a+t) + f(a-t) - 2\ell}{t}$$

soit intégrable sur l'intervalle $[0, \pi]$ i.e.

$$\int_0^\pi \frac{|f(x_0+t) + f(x_0-t) - 2\ell|}{t} dt < +\infty \tag{5.10}$$

Faisons quelques remarques pour expliquer cette condition.

Remarque 5.14 *1). Il est clair que le nombre complexe ℓ vérifiant (5.10), lorsqu'il existe, est uniquement déterminé par la formule*

$$2\ell = \lim_{t \to 0^+} \left(f(x_0+t) + f(x_0-t)\right). \tag{5.11}$$

Il en résulte que si f vérifie la condition de Dini en un point $x_0 \in [-\pi, +\pi]$ qui est une discontinuité de première espèce de f alors $2\ell = f(x_0^+) + f(x_0^-)$.
2). Observons que si f est continue par morceaux et si elle admet une dérivée à droite et une dérivée à gauche au point x_0 alors elle vérifie la condition de Dini au point x_0 avec $2\ell = f(x_0^+) + f(x_0^-)$.

Nous sommes en mesure de démontrer le résultat essentiel suivant.

Theorem 5.15 *(Critère de Dini). Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction intégrable $2\pi-$périodique vérifiant la condition (5.11) en un point $x_0 \in [-\pi, +\pi]$. On suppose de plus que f vérifie la condition de Dini (5.10) au point x_0. Alors on a*

$$\lim_{n \to +\infty} S_n f(x_0) = \ell.$$

<u>Démonstration:</u> Posons $S_n = S_n f$ pour $n \in \mathbb{N}$.

Alors d'apès les formules de Dirichlet, on a pour $n \in \mathbb{N}$

$$S_n(x_0) - \ell = \int_0^{+\pi} \left(f(x_0+t) + f(x_0-t) - 2\ell\right) \frac{\sin(n+1/2)t}{\sin(t/2)} dt.$$

Comme par hypothèse la fonction

$$t \longrightarrow \phi_{x_0}(t) := \frac{f(x_0+t)+f(x_0-t)-2\ell}{t}$$

est intégrable sur $[0,\pi]$, il en est de même de la fonction

$$t \longrightarrow \psi_{x_0}(t) = \frac{f(x_0+t)+f(x_0-t)-2\ell}{\sin(t/2)} = \phi_{x_0}(t)\frac{t}{\sin(t/2)}.$$

On a alors pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$S_n(x_0) - 2\ell = \int_0^{+\pi} \psi_{x_0}(t)\sin((n+1/2)t)dt.$$

Comme la fonction ψ_{x_0} est intégrable sur $[0,\pi]$, le résultat est alors une conséquence du lemme de Riemann-Lebesgue.▶

5.5.2 Le théorème de Jordan-Dirichlet

Pour énoncer ce théorème bien connu, nous avons besoin de rappeler la définition suivante. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction ayant au point $x_0 \in \mathbb{R}$ une discontinuité de première espèce. On dira que f est dérivable à droite au point x_0 ssi le prolongement par continuité de la restriction $f|]x_0, x_0+\delta[$ (où $\delta > 0$ est assez petit) est dérivable à droite au point x_0. Autrement dit la limite suivante

$$f'_d(x_0^+) := \lim_{t \to 0^+} \frac{f(x_0+t) - f(x_0^+)}{t}$$

existe dans $\mathbb{C}$. On définit de façon analogue la notion de dérivabilité à gauche au point x_0.

Corollary 5.16 *(Théorème de Jordan-Dirichlet). Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue par morçeaux, $2\pi-$périodique et dérivable à droite et à gauche en un point $x_0 \in [-\pi, +\pi]$. Alors la série de Fourier de f au point $x_0 \in \mathbb{R}$ converge vers $\tilde{f}(x_0) := (f(x_0^+) + f(x_0^-))/2$.*

Démonstration: En effet, sous les conditions du corrolaire, la fonction φ_{x_0} est continue et bornée sur un intervalle assez petit $]0, \delta]$ et donc intégrable, ce qui prouve que f vérifie la condition de Dini au point x_0. Le résultat est donc une conséquence du théorème précédent. ▶

Donnons un cas où la convergence de la série de Fourier est uniforme.

Theorem 5.17 *Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction satisfaisant à la condition de Hölder d'ordre $\alpha \in]0,1]$ suivante:*

$$|f(x) - f(y)| \leq C|x-y|^\alpha, \forall x, y \in \mathbb{R},$$

où $C > 0$ est une constante uniforme.

Alors la série de Fourier de f converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers f.

Démonstration: Rappelons la formule de Dirichlet dans ce cas. Pour tout $x \in [-\pi, +\pi]$ et $n \in \mathbb{N}$ on a

$$S_n f(x) - f(x) = \int_0^{+\pi} \psi_x(t) \sin((n+1/2)t) dt.$$

Compte tenu de l'hypothèse, on a

$$|\phi_x(t)| \leq 2Ct^{\alpha-1}, \forall t > 0, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Il en résulte que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\max_{|x|\leq\pi} |S_n(x) - f(x)| \leq 2C \int_0^{+\pi} t^{\alpha-1} \sin((n+1/2)t) dt.$$

Comme la fonction $t \longrightarrow t^{\alpha-1}$ est intégrable sur $[0, \pi]$, on conclut comme précédemment grâce au lemme de Riemann-Lebesgue. ▶

Exemple 1: Soit la fonction impaire sur $[-\pi, +\pi]$ telle que $f(t) = \pi/4$ pour $0 < t < \pi$. On peut alors prolonger f en une fonction en escalier, impaire et $2\pi-$périodique sur $\mathbb{R}$. Les coefficients de Fourier de f sont alors donnés par les formules suivantes: $a_k(f) = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et

$$b_k(f) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\pi}{4} \sin(kt)\ dt = \frac{1-(-1)^k}{2k},\ \forall k \in \mathbb{N}^*.$$

Comme la fonction f est continue par morceaux et dérivable sur $]0, \pi[$ d'après le théorème de Jordan-Dirichlet, on a

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin(2k+1)t}{2k+1} = \frac{\pi}{4}, \forall t \in]0, \pi[.$$

En particulier pour $t = \pi/2$ on obtient

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4}$$

et pour $t = \pi/4$ on pbtient

$$1 + \sum_{\ell=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{\ell+1}}{4\ell+1} = \frac{\pi}{4}.$$

Enfin en appliquant l'identité de Parseval, on obtient

$$\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} = \pi^2/8.$$

Comme

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}^2 = \frac{1}{4}\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^2} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2},$$

on en déduit que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Exemple 2: Soit f la fonction impaire et $2\pi-$périodique définie sur $]0,\pi]$ par la formule $f(t) := (\pi - t)/2$ pour $t \in]0,\pi]$. Alors f est continue par morçeaux et les coefficients de Fourier de f sont donnés par $a_k(f) = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et

$$b_k(f) = \frac{2}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} (\pi - t)\sin ktdt.$$

Un simple calcul par intégration par parties montre que $b_k(f) = 1/k$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$. La série de Fourier de f donnée par

$$\sum_{n\geq 1} \frac{\sin nt}{n}$$

converge uniformément sur tout compact de l'intervalle $[-\pi,+\pi]$ ne contenant pas l'origine. Mais la convergence n'est pas uniforme au voisinage de 0 puisque f n'est pas continue en 0. Observons qu'en 0 la série converge vers 0 qui est bien la moyenne arithmétique des limites à droite et à gauche de f en 0 conformément au résultat du théorème.

5.6 Série de Fourier dans $C^0(\mathbb{T})$: le théorème de Féjer

Nous avons démontré qu'il existe des fonctions continues dont la série de Fourier ne converge pas. Nous avons éalement montré que dès que la fonction possède un peu de régularité, sa série de Fourier converge. Cela explique pourquoi il est difficle de donner des exemples explicites de fonctions continues dont la la série de Fourier ne converge pas.

La question qui nous intéresse ici est de savoir s'il est possible de décrire le comportement de la série de Fourier d'une fonction continue. Nous allons montrer qu'en fait la suite des sommes de Fourier partielles d'une fonction continue converge en un sens approrié.

5.6.1 Convergence au sens de Césaro

Rappelons que si $(u_n)_n$ une suite de nombres réels ou complexes, on peut lui associer à la série $\sum_{n\geq 1} u_n$, la suite de ses sommes partielles

$$s_n := \sum_{k=0}^{n} u_k, n \geq 0.$$

Par définition, la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge vers un nombre réel ou complexe s ssi la suite $(s_n)_{n\geq 1}$ converge vers s. Il arrive souvent qu'une série diverge. Il existe alors plusieurs procédés de resommantion qui aboutissent à une nouvelle série qui converge. Le procédé le plus simple est celui de Césaro. Au lieu de la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on considère la suite de ses moyennes arithmétiques

$$\sigma_n := \frac{s_0 + \ldots + s_n}{n+1}, n \geq 0.$$

Il est bien connu que si la suite $(s_n)_{n\geq 1}$ possède une limite ℓ (éventuellement infinie dans le cas réel), alors la suite $(\sigma_n)_{n\geq 0}$ tend vers s.

Mais la réciproque est fausse puisque la suite $n \longrightarrow (-1)^n$ est divergente alors que la suite de ses moyennes arithmétiques converge vers 0.

Pourquoi considérer une telle suite ? Pour répondre à cette question, il suffit d'observer que l'on a la formule suivante

$$\sigma_n = \sum_{j=0}^{n} \left(1 - \frac{j}{n+1}\right) u_j = u_0 + \frac{n}{n+1} u_1 + \cdots + \frac{1}{n+1} u_n,$$

qui montre que σ_n est une moyenne pondérée des $(n+1)$ premiers termes de la suite (u_k) qui a pour conséquence d'atténuer les contributions des termes u_j dans la somme au fur et à mesure que j s'approche de n, et ce d'autant que n devient grand. C'est ce qui explique au moins intuitivement pourquoi il arrive que (σ_n) converge alors même que la suite (s_n) diverge.

Lorsque la suite des moyennes arithmétiques d'une suite $(s_n)_{n\geq}$ converge vers un nombre réel ℓ, on dira que la suite $(s_n)_{n\geq}$ ou que la série $\sum_n u_n$ converge au sens de Césaro vers ℓ.

Nous allons montrer que pour une fonction continue $f \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$, la sérife de Fourier converge au sens de Césaro dans l'espace de Banach $(\mathcal{C}, \|.\|_\infty$.

5.6.2 Formules de Féjer

On note comme précédemment

$$S_n(x) = S_n(f)(x) := \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k(f)\cos kx + b_k(f)\sin kx), n \geq 1,$$

les sommes partielles de la série de Fourier de f et on note

$$\sigma_n(f)(x) = \sigma_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n} S_k(x), \ n \in \mathbb{N}$$

la suite de ses moyennes arithmétiques.

D'après les calculs faits dans la section préc'edente, on a

$$S_n(x) = \int_{-\pi}^{+\pi} f(x+t)D_n(t)dt, \ n \in \mathbb{N}.$$

Il en résulte que

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{n+1}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x+t)\sum_{p=0}^{n} D_p(t)dt, \ n \in \mathbb{N}.$$

Considérons le noyau de Féjer défini comme suit:

$$K_n(t) := \frac{1}{2\pi(n+1)}\sum_{p=0}^{n} D_p(t), t \in \mathbb{R}$$

de sorte que

$$\sigma_n(x) = \int_{-\pi}^{+\pi} f(x+t)K_n(t), \ n \in \mathbb{N}. \tag{5.12}$$

Observons que K_n est un polynôme trigonométrique pair de degré n.

Calculons explicitement le noyau de Féjer en utilisant l'expression explicite du noyau de Dirichlet:

$$\begin{aligned} K_n(t) &= \frac{1}{2\pi(n+1)}\sum_{k=0}^{n}\frac{sin(k+1/2)t}{\sin(t/2)} \\ &= \frac{1}{2\pi(n+1)}\sum_{k=0}^{n}\frac{\sin(t/2)\sin(k+1/2)t}{\sin^2(t/2)}, \end{aligned} \tag{5.13}$$

Grâce à la formule du produit des sinus, on a

$$\sin(t/2)\sin(k+1/2)t = \frac{1}{2}(\cos(kt) - \cos(k+1)t),$$

et donc

$$K_n(t) = \frac{1}{2\pi(n+1)}\frac{1-cos(n+1)t}{\sin^2(t/2)} = \frac{1}{\pi(n+1)}\frac{\sin^2(n+1)(t/2)}{\sin^2(t/2)}, n \in \mathbb{N}.$$

Contrairement au noyau de Dirichlet, le noyau de Féjer est positif. C'est le résultat de l'opération "moyenne arithmétique" des noyaux de Dirichlet qui a eu pour conséquence de favoriser des compensations en atténuant la contribution des termes D_n.

Observons que si on fait $f \equiv 1$ dans la formule (5.12), on a $\sigma_n \equiv 1$ et donc

$$\int_{-\pi}^{+\pi} K_n(t)dt = 2\int_0^{\pi} K_n(t)dt = 1, \forall n \in \mathbb{N}. \tag{5.14}$$

D'autre part, on a pour $0 < \delta < \pi$, on a

$$\sup_{\delta \leq t \leq \pi} K_n(t) \leq \frac{1}{\pi(n+1)\sin^2(\delta/2)}, \tag{5.15}$$

ce qui implique que

$$\lim_{n \to 0} \sup_{t \geq \delta} K_n(t)dt = 0. \tag{5.16}$$

5.6.3 Le théorème de Féjer

On est en mesure de démontrer le résultat fondamental suivant qui est une vesrion locale du théorème de Féjer habituel.

Theorem 5.18 *(Théorème de Féjer, version locale). Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction intégrable 2π-périodique telle qu'en un point $x_0 \in [-\pi, +\pi]$ la limite suivante*

$$2\ell := \lim_{t \to 0^+} (f(x_0 + t) + f(x_0 - t))$$

existe dans $\mathbb{C}$. Alors la suite des sommes de Féjer converge au point t_0 vers ℓ i.e.

$$\lim_{n \to +\infty} \sigma_n(t_0; f) = \ell$$

Démonstration: D'après les résultats précédents, on a pour $\forall n \in \mathbb{N}$ et $x \in [-\pi, +\pi]$,

$$\sigma_n(x) = \int_0^\pi (f(x+t) + f(x-t))K_n(t)dt.$$

Il en résulte que

$$\sigma_n(x_0) - \ell = \int_0^{+\pi} \Big(f(x_0 + t) + f(x_0 - t) - 2\ell\Big)K_n(t)dt, \;\; n \in \mathbb{N}.$$

On a alors

$$\sigma_n(x_0) - \ell = \int_0^{+\pi} \Big(f(x_0 + t) + f(x_0 - t) - 2\ell\Big)K_n(t)dt.$$

Par définition, étant donné $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que $|f(x_0 + t) + f(x_0 - t) - 2\ell)| \leq \varepsilon$ pour $0 \leq t \leq \delta$.

De là il résulte immédiatement que $(\sigma_n(x_0))$ converge vers ℓ. ▶

Corollary 5.19 *(Théorème de Féjer). Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction 2π-périodique intégrable sur $\mathbb{R}$. Supposons que f est continue sur un intervalle compact $J := [a, b] \subset [-\pi, +\pi]$. A lors la suite des sommes de Féjer $(\sigma_n(.; f))$ converge uniformément sur J vers f.*

Si f est continue sur l'intervalle $[a, b] \subset [-\pi, +\pi]$, alors pour chaque $x \in J$, on a $\lim_{t\to 0+}(|f(x+t) + f(x-t)) = 2f(x)$ et donc par continuité uniforme, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour $x \in [a, b]$ et $t \in [-\delta, +\delta]$ on a $|f(x+t) - f(x)| \leq \varepsilon$.

Alors d'après ce qui précède, on obtient pour $x \in [a, b]$ et $n \in \mathbb{N}$,

$$\sigma_n(x) - f(x) = \int_{-\pi}^{+\pi} (f(x+t) - f(x))K_n(t)dt.$$

Par suite, on en déduit que

$$\sup_{a\leq x\leq b} |\sigma_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon + \sup_{\delta\leq|t|\leq+\pi} K_n(t) \int_{\delta\leq|t|\leq+\pi} |f(x+t) - f(x)|dt.$$

Ce qui prouve le résultat compte tenu de la propriété (5.16). ▶
Ce résultat admet plusieurs conséquences intéressantes que nous allons donner. Commençons par une conséquence immédiate mais interessante qui montre ce que peut être la limite de la Série de Fourier de f lorsqu'elle existe.

Corollary 5.20 *Soit $f : [-\pi, +\pi] \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction intégrable au sens de Riemann ayant en un point $t_0 \in]-\pi, +\pi[$ des discontinuités de première espèce. Alors si la série de Fourier de f converge au point t_0 sa limite est égale à $\tilde{f}(t_0) := (f(t_0^-) + f(t_0^+))/2$.*

Voici la version trigonométrique du théorème d'approximation de Weierstrass.

Corollary 5.21 *L'espace $\mathcal{T}$ des polynômes trigonométriques complexes est dense dans l'espace de Banach $(\mathcal{C}(\mathbb{T}), \|.\|_\infty)$.*

A partir du théorème précédent, on peut déduire un autre preuve du théorème d'approximation de Weierstrass classique.

Theorem 5.22 *Pour toute fonction continue $F : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ sur un segment $[a, b] \subset \mathbb{R}$, il existe une suite de polynômes algébriques $(P_n)_{n\geq 0}$ (avec $deg(P_n) \leq n, \forall n \in \mathbb{N}$) telle que*

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in[a,b]} |F(x) - P_n(x)| = 0.$$

Autrement dit l'espace $\mathcal{P}([a, b])$ des fonctions polynomiales sur $[a, b]$ est dense dans l'espace de Banach $(\mathcal{C}([a, b]), \|.\|_\infty)$.

<u>Démonstration:</u> Par translation et homothétie dans $\mathbb{R}$, on se ramème au cas où F est une fonction continue sur l'intervalle unité $[a, b] = [-1, +1]$. Posons $f(\theta) = F(cos\theta)$ pour $\theta \in [0, \pi]$ et prolongeons f en une fonction continue

et paire sur $[-\pi+\pi]$, puis en une fonction continue $2\pi-$périodique sur $\mathbb{R}$, encore notée f. Comme f est paire, on a $b_n(f)=0$ pour tout $n\in\mathbb{N}$. Alors

$$s_n(\theta)=\frac{1}{2}a_0+\sum_{k=1}^{n}a_k\cos k\theta, n\in\mathbb{N},\theta\in[-\pi+\pi].$$

En posant $x=\cos\theta$ pour $\theta\in[0,\pi]$, on a $\sin\theta=\sqrt{1-x^2}$ et donc $\cos k\theta = \Re e^{ik\theta}=\Re(\cos\theta+i\sin\theta)^k=\Re(x+i\sqrt{1-x^2})^k$ de sorte que

$$\cos k\theta=\sum_{0\leq p\leq k/2}C_{2p}^{k}x^{k-2p}(1-x^2)^p=:T_k(x)$$

est un polynôme en x de degré k appelé *polynôme de Tchebysheff* de degré k. Ainsi

$$T_n^f(x):=S_n(\theta)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}a_kT_k(x)$$

est un polynôme en x de degré au plus n et d'après le théorème de Féjer cette suite de polynômes converge au sens de Césaro uniformément vers $F(x)$ sur $[-1,+1]$, ce qui prouve le résultat. ▶

Remarque 5.23 *Soit $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{C}$ une fonction mesurable au sens de Lebesgue sur $[a,b]$. Le raisonnement précédent montre qu'il existe une suite de polynômes associés à f telle que si $f\in\mathbb{L}^2([a,b])$, cette suite converge en moyenne quadratique vers f sur $[a,b]$, autrement dit l'espace vectoriel des polynômes est dense dans l'espace $\mathbb{L}^2([a,b])$. On peut en déduire que l'espace des polynômes est dense dans $\mathbb{L}^1([a,b])$. Mais ces théorèmes se démontrent dans un cadre plus général grâce au procédé de régularisation par convolution.*