中国科学: 数学　2018 年　第 48 卷　第 1 期: 131 ～ 146

SCIENTIA SINICA Mathematica

《中国科学》杂志社
SCIENCE CHINA PRESS

论　文

双曲空间上的 Alexandrov-Fenchel 不等式

献给董光昌教授 90 华诞

葛宇新[1], 王国芳[2], 吴洁[3*]

1. Institut de Mathématiques de Toulouse, Université Paul Sabatier, Toulouse 31062 Cedex, France;
2. Mathematisches Institut, Albert-Ludwigs-Universität Freiburg, Freiburg D-79104, Germany;
3. 浙江大学数学科学学院, 杭州 310027

E-mail: yge@math.univ-toulouse.fr, guofang.wang@math.uni-freiburg.de, wujiewj@zju.pku.edu.cn

收稿日期: 2017-04-06; 接受日期: 2017-11-06; 网络出版日期: 2017-12-XX; * 通信作者
国家自然科学基金 (批准号: 11401553) 资助项目

摘要　本文在双曲空间 $\mathbb{H}^n$ $(n \geqslant 5)$ 中建立如下的双曲 Alexandrov-Fenchel 不等式: 若超曲面 Σ 为 h-凸的, 则有

$$\int_\Sigma \sigma_4 d\mu \geqslant C_{n-1}^4 \omega_{n-1} \left\{ \left(\frac{|\Sigma|}{\omega_{n-1}} \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{|\Sigma|}{\omega_{n-1}} \right)^{\frac{1}{2}\frac{n-5}{n-1}} \right\}^2,$$

等号成立当且仅当 Σ 为 $\mathbb{H}^n$ 中的测地球面.

关键词　Alexandrov-Fenchel 不等式　逆曲率流　双曲空间

MSC (2010) 主题分类　52A40, 53C65

1　引言

Alexandrov-Fenchel 不等式是关于 $\mathbb{R}^n$ 中凸区域上定义的均质积分 (quermassintegrals) 的几何不等式. 它是经典的等周不等式的一个推广, 在经典几何中起着重要的作用. 对于 $\mathbb{R}^n$ 中带有边界 $\partial\Omega = \Sigma$ 的有界光滑区域 Ω, 令 $\kappa = (\kappa_1, \kappa_2, \dots, \kappa_{n-1})$ 为 Σ 的主曲率构成的集合, $\sigma_k : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$ 为 k 次初等对称多项式函数, 则 Ω 上的均质积分可定义为

$$V_{n-k}(\Omega) = c_{n,k} \int_\Sigma \sigma_{k-1}(\kappa), \quad k \geqslant 1, \tag{1.1}$$

其中 $c_{n,k} = C_{n-1}^k / C_{n-1}^{k-1}$. 本文记 $C_{n-1}^k = \frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!}$, V_n 为区域 Ω 体积相差一个常数倍的因子, V_{n-1} 为 Σ 的面积. 著名的 Alexandrov-Fenchel 均质积分不等式可表述如下: 若 Ω 是凸的, 则对于任意 $0 \leqslant i < j < n$, 都有

$$\frac{V_{n-j}(\Omega)^{\frac{1}{n-j}}}{V_{n-j}(B)^{\frac{1}{n-j}}} \geqslant \frac{V_{n-i}(\Omega)^{\frac{1}{n-i}}}{V_{n-i}(B)^{\frac{1}{n-i}}}. \tag{1.2}$$

英文引用格式: Ge Y X, Wang G F, Wu J. Hyperbolic Alexandrov-Fenchel quermassintegral inequalities, I (in Chinese). Sci Sin Math, 2018, 48: 131–146, doi: 10.1360/N012017-00063

当 $i=0$ 且 $j=1$ 时, (1.2) 则化为经典的等周不等式. 注意到在 (1.1) 中, 当 $k\geqslant 1$ 时, 不等式 (1.2) 与

$$\int_\Sigma \sigma_k \geqslant C_{n-1}^k\omega_{n-1}\left(\frac{1}{C_{n-1}^j}\frac{1}{\omega_{n-1}}\int_\Sigma \sigma_j\right)^{\frac{n-1-k}{n-1-j}},\quad 0\leqslant j<k\leqslant n-1 \tag{1.3}$$

等价, 其中 ω_{n-1} 表示标准球面 $\mathbb{S}^{n-1}$ 的面积 (约定 $\sigma_0=1$). 因此, 不等式 (1.3) 也可以理解为等周不等式的推广. 当 $k=1$ 时, 它通常被称为 Minkowski 不等式. 当 $j=0$ 时, (1.1) 则化为

$$\int_\Sigma \sigma_k \geqslant C_{n-1}^k\omega_{n-1}\left(\frac{|\Sigma|}{\omega_{n-1}}\right)^{\frac{n-1-k}{n-1}}. \tag{1.4}$$

在过去几十年中, $\mathbb{R}^n$ 中的 Alexandrov-Fenchel 均质积分不等式已经得到了深入的研究. 读者可参见 Santaló [1]、Burago 和 Zalgaller [2] 以及 Schneider [3] 的经典书籍. 对于非凸区域上的相应不等式, 可参见 Guan 和 Li [4]、Huisken1)、Chang 和 Wang [5] 以及 Qiu [6] 近年来有意思的工作. 这里仅提醒读者关注 Alexandrov-Fenchel 均质积分不等式在单位球面 $\mathbb{S}^n$ 上的一个共形版本[7]. 比较有意思的是, 它与本文将要建立的双曲空间上的 Alexandrov-Fenchel 不等式有着非常密切的关系.

在本文中, 我们感兴趣的是建立 (1.1) 在双曲空间 $\mathbb{H}^n$ 中的类似不等式. 令 $\mathbb{H}^n=\mathbb{R}^+\times\mathbb{S}^{n-1}$, 配有度量

$$\bar{g}=dr^2+\sinh^2 r g_{\mathbb{S}^{n-1}},$$

其中 $g_{\mathbb{S}^{n-1}}$ 是单位球面 $\mathbb{S}^{n-1}$ 上的标准度量. 双曲空间 $\mathbb{H}^n$ 上的等周不等式最早是由 Schmidt [8] 得到的, 另可参见文献 [9] 中流的方法. 当 $n=2$ 时, 双曲空间上的等周不等式有显式表达式

$$L^2\geqslant 4\pi A+A^2,$$

其中 L 表示 $\mathbb{H}^2$ 中曲线 γ 的长度, A 为 γ 所围成区域的面积, 并且等号成立当且仅当 γ 是一个圆周. 近年来有许多尝试建立双曲空间 $\mathbb{H}^n$ 上的 Alexandrov-Fenchel 不等式的工作, 如文献 [10,11] 等. 另外, Gallego 和 Solanes [12] 利用积分几何的方法证明了以下感兴趣的几何不等式. 更具体地, 对于 $\mathbb{H}^n$ 中的凸区域, 有

$$\int_\Sigma \sigma_k d\mu > cC_{n-1}^k|\Sigma|, \tag{1.5}$$

其中 $|\Sigma|$ 表示曲面 Σ 的面积, $d\mu$ 表示关于 Σ 上诱导度量的面积元, 并且常数 c 满足当 $k>1$ 时, $c=1$; 当 $k=1$ 时, $c=(n-2)/(n-1)$. 感兴趣的读者还可参见文献 [13] 的类似工作. (1.5) 中的常数 c ($k>1$ 时) 不能再改进. 然而它还远不是最佳不等式 (这里最佳指的是等号可以取到且等号成立当且仅当超曲面为双曲空间中的测地球面), 尤其是当曲面 Σ 的面积 $|\Sigma|$ 很小的时候.

近来由于拟局部质量和 Penrose 不等式的研究, Brendle 等[14] 建立了如下的 Minkowski 型不等式 (即 $k=1$ 时的情形):

$$\int_\Sigma (\lambda' H-(n-1)\langle\bar{\nabla}\lambda',\nu\rangle)d\mu \geqslant (n-1)\omega_{n-1}^{\frac{1}{n-1}}|\Sigma|^{\frac{n-2}{n-1}}; \tag{1.6}$$

de Lima 和 Girão [15] 证明了相关的几何不等式

$$\int_\Sigma \lambda' H d\mu \geqslant (n-1)\omega_{n-1}\left(\left(\frac{|\Sigma|}{\omega_{n-1}}\right)^{\frac{n-2}{n-1}}+\left(\frac{|\Sigma|}{\omega_{n-1}}\right)^{\frac{n}{n-1}}\right), \tag{1.7}$$

1) Huisken H. In preparation. See also [4].

其中 $\lambda'(r)=\cosh r$, 而且曲面 Σ 满足的条件都是星型的 (star-shaped) 且为平均凸的 (即 $H>0$). 这个带有权重因子 λ' 的全平均曲率积分很自然地出现在 Brown-York 拟局部质量的定义以及与渐近双曲图流形相关的 Penrose 型不等式[16] 中. 它的高阶形式 $\int \lambda'\sigma_{2k-1}$ 同样很自然地出现在我们关于渐近双曲图流形的新质量文献 [17] 中. 能否将不等式 (1.6) 和 (1.7) 推广到一般的 k 情形将是一个非常有意思的问题.

本文中, 我们感兴趣的是双曲空间中与不带权重因子 λ' 的曲率积分 $\int_\Sigma \sigma_k d\mu$ 有关的 Alexandrov-Fenchel 均质积分不等式. 不同于欧氏空间情形, 此曲率积分与 $\mathbb{H}^n$ 中的均质积分有着非常密切的关系, 可参见文献 [1,11,12]. 近年来, Li 等[18] 首先证明了关于 σ_2 的不等式

$$\int_\Sigma \sigma_2 d\mu \geqslant \frac{(n-1)(n-2)}{2}\left(|\Sigma|+\omega_{n-1}^{\frac{2}{n-1}}|\Sigma|^{\frac{n-3}{n-1}}\right), \tag{1.8}$$

条件是曲面 $\Sigma\subset\mathbb{H}^n$ 满足是星型的且为 2- 凸超曲面, 即 $\sigma_1\geqslant 0$ 和 $\sigma_2\geqslant 0$.

若曲面 $\Sigma\subset\mathbb{H}^n$ 满足所有的主曲率都大于等于 1, 则称其为 h- 凸的. 本文得到下面的定理:

定理 1.1　令 $n\geqslant 5$. 若 $\Sigma\subset\mathbb{H}^n$ 是 h- 凸的, 则有

$$\int_\Sigma \sigma_4 d\mu \geqslant C_{n-1}^4\omega_{n-1}\left\{\left(\frac{|\Sigma|}{\omega_{n-1}}\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\frac{|\Sigma|}{\omega_{n-1}}\right)^{\frac{1}{2}\frac{n-5}{n-1}}\right\}^2, \tag{1.9}$$

此句不通顺，是否应将“在”改为“对”？

其中 ω_{n-1} 为单位球面 $\mathbb{S}^{n-1}$ 的面积且 $|\Sigma|$ 表示 Σ 的面积, 并且等号成立当且仅 $n=5$ 时, (1.9) 成立条件可减弱为 $\Sigma\subset\mathbb{H}^n$ 是星型的且为 2- 凸超曲面, 即 $\sigma_1\geqslant 0$ 和 $\sigma_2\geqslant 0$.

定理 1.1 蕴含了一个新的等周型结果: 在一类具有固定面积的 h- 凸超曲面中, 曲率积分 $\int\sigma_4 d\mu$ 的最小值仅由测地球面取到.

不同于欧氏空间情形, 我们相信, 在双曲空间中, 曲率 σ_k 中 k 的奇偶性在 Alexandrov-Fenchel 均质积分不等式有着重要的作用2). 也就是说, 当 k 为奇数时, Alexandrov-Fenchel 均质积分不等式的形式应该形如 (1.6) 或 (1.7); 而当 k 为偶数时, (1.8) 和 (1.9) 应该是对且是最好的形式. 同样参见下面的定理 3.7. 关于一般的 k 情形的 Alexandrov-Fenchel 均质积分不等式的工作, 可参见文献 [19,20].

h- 凸性是一个非常自然的概念, 它在几何上等价于对任意一点 $p\in\Sigma$, 其围成的区域 Ω 都完全包含在通过点 p 的某个极限球面 (horosphere) $S_h(p)$ 所围成的球内. 而且从我们的工作来看, 它应该是不等式 (1.9) 成立的 (几乎) 最好的条件. 参见下面的注 3.4 和 3.5.

此句不通顺，请修改

证明上述的几何不等式的本质思想是相同的: 需要取一个适当的泛 证明所取的泛函在几何流下具有某种单调性. 若几何流最后能收敛到标准球面, 则我们得到了一个最佳的几何不等式, 其最佳常数可由标准球面取到. 这里采用的流是文献 [21] 中的逆曲率流

$$\frac{\partial X}{\partial t}=\frac{n-4}{4}\frac{\sigma_3}{\sigma_4}\nu, \tag{1.10}$$

其中 ν 表示 Σ 的单位外法向.

我们遇到的第一个困难是, 对于要研究的不等式 (1.9), 取什么泛函比较适合? 受到 Brendle 等[14]、de Lima 和 Girão[15] 以及 Li 等[18] 工作的启发, 我们猜测泛函

$$Q(\Sigma):=|\Sigma|^{-\frac{n-5}{n-1}}\int_{\Sigma_t}\left\{\sigma_4-\frac{(n-3)(n-4)}{6}\sigma_2+\frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{24}\right\} \tag{1.11}$$

2) 李海中有类似的想法. Li H. A private communication.

可能是一个好的选择. 实际上泛函中的积分项

$$l_2 := \left(\sigma_4 - \frac{(n-3)(n-4)}{6}\sigma_2 + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{24}\right)$$

在相差一个常数倍的意义上就是 Gauss-Bonnet 曲率 L_2. 我 请核实此处的“商”是否有误？ 率 L_2 是一个内蕴几何量, 且为数量曲率 R 的一个自然推广. 对于 Gauss-Bonn [illegible] 趣的读者可参见文献 [22]. 这里提醒读者注意文献 [18] 中所考虑的泛函实际上是关于数量曲率的 Yamabe 商, 而本文考虑的泛函 (1.11) 同样也是关于 L_2 曲率的 Yamabe 商. 由于双曲空间的几何带来的复杂性, $\int_\Sigma l_2$ 的变分公式中有三项需要我们来处理. 然而不同于不等式 (1.6)–(1.8) 的证明, 我们并不能直接简单地利用 Newton-MacLaurin 不等式 (引理 2.1) 来处理. 更具体地, 由 Newton-MacLaurin 不等式可知 (3.1) 中出现的三项中,

$$5\frac{\sigma_5\sigma_3}{\sigma_4} - \frac{4(n-5)}{n-4}\sigma_4 \quad 和 \quad \frac{4(n-3)}{n-4}\sigma_2 - 3\frac{\sigma_3^2}{\sigma_4}$$

是非正项, 而

$$\frac{\sigma_1\sigma_3}{\sigma_4} - \frac{4(n-1)}{n-4}$$

是非负项. 然而为了得到泛函 Q 沿着曲率流 (1.10) 的单调性, 我们需要证明这三项的和非正. 因此, 我们需要将这三项放在一起统一来考虑. 由于这些项关于 κ 的伸缩尺度并不相同, 因此不能期望这三项的和对于所有满足条件 $\kappa = (\kappa_1, \dots, \kappa_{n-1}) \in \mathbb{R}_+^{n-1}$ 都是非正的. 然而幸运的是, 我们发现对于满足 h-凸性的 κ 可以证明这三项的和确实是非正的, 见命题 3.3. 这正是本文的关键点之一, 其中 h- 凸性的假设起着非常重要的作用. 利用 Gerhardt 在逆曲率流中的工作, 我们还可以证明 h- 凸的性质沿着曲率流 (1.10) 是保持的, 从而得到 (1.11) 中定义的泛函 Q 沿着曲率流 (1.10) 是单调不增的. 因此为证想要的不等式, 仅需考察泛函 Q 沿着曲率流 (1.10) 下的极限. 然而, 现在我们遇到了另一个困难: 流 (1.10) 仅是在渐近的意义下收敛 (命题 2.2), 即流最后渐近收敛到共形于标准单位球面度量的球面. 我们证明了沿着流 (1.10), 若演化超曲面一直是 h- 凸的, 则上面的诱导度量有 (渐近) 正的 Schouten 张量. 对于 $\mathbb{S}^{n-1}$ 上这样的度量, 可以利用文献 [7] 中的关于共形几何中推广的 Sobolev 型不等式. 这里 h- 凸性再一次起了非常重要的作用. 应用这个不等式, 我们可以得到定理 3.7 中的关于 Q 的最佳估计, 从而证明定理 1.1. 这里非常有意思的是, 球面上共形几何中的结果与 $\mathbb{H}^n$ 中的双曲 Alexandrov-Fenchel 不等式有着如此紧密的联系, 而它们之间的桥梁则是文献 [21] 中的逆曲率流, 也可参见文献 [23] 以及近年来的相关工作 [13, 24, 25].

本文的其余部分组织如下. 第 2 节列出关于基本对称多项式函数 σ_k 的一些基本知识, σ_k 的变分公式以及文献 [7] 中一般的 Sobolev 型不等式, 并证明了文献 [21] 中的逆曲率流下 h- 凸性的保持以及流的收敛性. 第 3 节证明了最重要的 Q 的单调性, 并分析了它沿着曲率流 (1.10) 下的极限行为, 从而最终证明了定理 1.1.

2 准备知识

k 次初等对称多项式函数 $\sigma_k : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$ 定义为

$$\sigma_k(\Lambda) = \sum_{i_1 < \cdots < i_k} \lambda_{i_1} \cdots \lambda_{i_k}, \quad 对于\ \Lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}.$$

很容易将这样定义的 σ_k 推广到所有对称矩阵构成的集合上. Garding 锥 Γ_k^+ 定义为

$$\Gamma_k^+ = \{\Lambda \in \mathbb{R}^{n-1} \mid \sigma_j(\Lambda) > 0, \forall\, j \leqslant k\}.$$

下面列出一些本文中将需要用到的一些关于 σ_k 的基本性质. 对于其他相关的性质, 参见管鹏飞的综述文章 [26] 或文献 [18].

引理 2.1 对于 $\Lambda \in \Gamma_k^+$, 我们有 Newton-MacLaurin 不等式:

$$\frac{\sigma_{k-1}\sigma_{k+1}}{\sigma_k^2} \leqslant \frac{k(n-k-1)}{(k+1)(n-k)}, \tag{2.1}$$

$$\frac{\sigma_1\sigma_{k-1}}{\sigma_k} \geqslant \frac{k(n-1)}{n-k}, \tag{2.2}$$

并且不等式 (2.1) 或 (2.2) 在 Λ 处等号成立当且仅当 $\Lambda = c(1,1,\dots,1)$.

Newton-MacLaurin 不等式在证明上述的几何不等式中有着非常重要的作用. 然而, 我们将看到对于不等式 (1.9) 的证明, Newton-MacLaurin 不等式是不够的.

令 $\mathbb{H}^n = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{S}^{n-1}$, 配有度量

$$\bar{g} = dr^2 + \sinh^2 r g_{\mathbb{S}^{n-1}},$$

其中 $g_{\mathbb{S}^{n-1}}$ 表示单位球面 $\mathbb{S}^{n-1}$ 上的标准度量, 且 $\Sigma \subset \mathbb{H}^n$ 为 $\mathbb{H}^n$ 中的光滑闭超曲面, 其单位外法向为 ν. 令 h 为 Σ 的第二基本形式, $\kappa = (\kappa_1, \dots, \kappa_{n-1})$ 表示 Σ 在 $\mathbb{H}^n$ 中关于 ν 的法曲率构成的集合. 曲面 Σ 的 k 阶中曲率定义为

$$\sigma_k = \sigma_k(\kappa).$$

现在考察下面的曲率演化方程:

$$\frac{d}{dt}X = F\nu, \tag{2.3}$$

其中 $\Sigma_t = X(t,\cdot)$ 为 $\mathbb{H}^n$ 中的一族超曲面, ν 表示 $\Sigma_t = X(t,\cdot)$ 的单位外法向, F 为可能依赖于位置向量 X 以及 Σ_t 的主曲率的速度函数. 可以验证沿着流 (2.3), 有

$$\frac{d}{dt}\int_\Sigma \sigma_k d\mu = (k+1)\int_\Sigma F\sigma_{k+1} d\mu + (n-k)\int_\Sigma F\sigma_{k-1} d\mu. \tag{2.4}$$

证明可以参见文献 [27]. 这里采用记号 $\sigma_{-1} = 0$. 如果将 $\mathbb{H}^n$ 中的流 (2.3) 与 $\mathbb{R}^n$ 中超曲面的演化方程相比较, 将会发现 (2.4) 中的最后一项是额外项. 这个额外项是由双曲空间的截曲率为 -1 造成的, 它使得 $\mathbb{H}^n$ 中超曲面的现象与欧氏空间中的大不相同.

如前面所述, 我们具体采用的是下面的逆曲率流:

$$\frac{d}{dt}X = \frac{n-4}{4}\frac{\sigma_3}{\sigma_4}\nu. \tag{2.5}$$

利用 Gerhardt [21] 的结果, 我们有下面的命题:

命题 2.2 若初始时的超曲面 Σ 是 h- 凸的, 则流 (2.5) 的解具有长时间存在性并且流的过程中一直保持 h- 凸的性质. 而且, 超曲面 Σ_t 在流的过程中在主曲率一致收敛并且指数收敛到 1 的意义下, 变得越来越接近全脐曲面. 具体地, 令 $h_j^i = g^{ik}h_{kj}$, 其中 g 为诱导度量, h 为第二基本形式, 则有

$$|h_j^i - \delta_j^i| \leqslant C\mathrm{e}^{-\frac{t}{n-1}}, \quad t > 0.$$

证明 Gerhardt [21] 在初始曲面为星型的这个更弱的条件下研究了下面的更一般的逆曲率流:

$$\frac{d}{dt}X = -\Phi(F)\nu, \tag{2.6}$$

其中函数 $\Phi(r) = -r^{-1}$ $(r > 0)$, 且 F 为一个光滑的齐一次的曲率函数, 满足单调递增性和凹性. 因此, 利用 Gerhardt 的结果, 我们对于流 (2.5) 或者是更一般的流 (2.6), 只需要验证 h- 凸性的保持.

由文献 [21] 中关于第二基本形式 h^i_j 的 (4.23), 我们得到 $\tilde{h}^i_j := h^i_j - \delta^i_j$ 的演化方程如下:

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{h}}^i_j &= Q(\nabla^2\tilde{h}, \nabla\tilde{h})^i_j + \dot{\Phi}F^{kl}h_{lr}h^r_k\tilde{h}^i_j + \dot{\Phi}F^{kl}h_{lr}h^r_k\delta^i_j\\ &\quad + (\Phi - \dot{\Phi}F)\tilde{h}^{ik}\tilde{h}_{kj} + 2(\Phi - \dot{\Phi}F)\tilde{h}^i_j + (\Phi - \dot{\Phi}F)\delta^i_j\\ &\quad - \{(\Phi + \dot{\Phi}F)\delta^i_j - \dot{\Phi}F^{kl}g_{kl}\tilde{h}^i_j - \dot{\Phi}F^{kl}g_{kl}\delta^i_j\}\\ &=: Q(\nabla^2\tilde{h}, \nabla\tilde{h})^i_j + H^i_j,\end{aligned} \tag{2.7}$$

其中

$$\begin{aligned}Q(\nabla^2\tilde{h}, \nabla\tilde{h})^i_j &= \dot{\Phi}F^{kl}\tilde{h}^i_{j;kl} + \dot{\Phi}F^{kl,rs}\tilde{h}_{kl;j}\tilde{h}_{rs;}{}^i + \ddot{\Phi}(F^{kl}\tilde{h}_{kl;j})(F^{rs}\tilde{h}_{rs;}{}^i)\\ &=: \dot{\Phi}F^{kl}\tilde{h}^i_{j;kl} + N^i_j.\end{aligned}$$

为了应用 Andrews [28] 关于对称张量的极大值原理 (它是熟知的 Hamilton 极大值原理[29] 的推广), 我们需要验证以下两个论述:

(i) $H^i_j a^j a_i \geqslant 0$;

(ii) $N^i_j a_i a^j + \dot{\Phi}\sup_\Gamma 2F^{kl}(2\Gamma^p_k\tilde{h}_{ip;l}a^i - \Gamma^p_k\Gamma^q_l\tilde{h}_{pq}) \geqslant 0$,

对任何满足 $\tilde{h}^i_j a^j = 0$ 条件的 $a = (a_1, \dots, a_{n-1})$ (其中 $a^j = g^{jl}a_l$) 都成立.

从 (2.7) 易见,

$$H^i_j a^j a_i = \dot{\Phi}(F^{kl}h_{lr}h^r_k + F^{kl}g_{kl} - 2F)|a|^2.$$

由于 F 是齐一次的, 所以有

$$F = F^{kl}h_{kl}.$$

又因为 F^{kl} 是正定的, 从而在正交基下成立

$$\begin{aligned}F^{kl}h_{lr}h^r_k + F^{kl}g_{kl} - 2F &= F^{kl}g_{ls}(\tilde{h}^s_r + \delta^s_r)(\tilde{h}^r_k + \delta^r_k) + F^{kl}g_{kl} - 2F^{kl}g_{ls}(\tilde{h}^s_k + \delta^s_k)\\ &= F^{kl}g_{ls}\tilde{h}^s_r\tilde{h}^r_k \geqslant 0.\end{aligned}$$

另一方面, $\dot{\Phi} > 0$. 从而 (i) 得证.

注意到

$$N^i_j = (\Phi(F))^{kl,rs}\tilde{h}_{kl;j}\tilde{h}_{rs;}{}^i,$$

以及 h 的最小特征值为 1, 因此, 我们可以利用 Andrews[28] 的工作来得到论述 (ii) 成立. 从而 (2.5) 下 h- 凸性的保持由 Andrews 的极大值原理得到. □

Cabezas-Rivas 和 Miquel [30] 证明了在保持体积不变的平均曲率流下 h- 凸性是保持的. 同样参见 Makowski 的工作 [9].

令 g 为 M^{n-1} 上的一个 Riemann 度量, Ric_g 和 R_g 分别表示关于 g 的 Ricci 张量和数量曲率. Schouten 张量定义为

$$A_g = \frac{1}{n-3}\left(\mathrm{Ric}_g - \frac{R_g}{2(n-2)}g\right).$$

令 Λ_g 表示关于度量 g 的 Schouten 张量 A_g 的特征值构成的集合. 由 Viaclovsky 引入的 σ_k- 数量曲率可定义为

$$\sigma_k(g) := \sigma_k(\Lambda_g).$$

显然这是数量曲率 R 的一个自然推广. 事实上, 我们有 $\sigma_1(g) = \frac{1}{2(n-2)}R$. 由于 M 的维数为 $n-1$, 我们现在只需考虑标准球面 $\mathbb{S}^{n-1}$ 上的共形类 $[g_{\mathbb{S}^{n-1}}]$ 以及下面的泛函:

$$\mathcal{F}_k(g) = \mathrm{vol}(g)^{-\frac{n-1-2k}{n-1}} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \sigma_k(g)\, dg, \quad k = 0, 1, \dots, n-1. \tag{2.8}$$

若度量 g 对任意 $j \leqslant k$ 都有 $\sigma_j(g) > 0$, 则称其为 k- 正的, 并记 $g \in \Gamma_k^+$. 下面引用一些推广的 Sobolev 型不等式结果.

命题 2.3 令 $0 < k < \frac{n-1}{2}$, $g \in [g_{\mathbb{S}^{n-1}}]$ 为 k- 正的, 则

$$\mathcal{F}_k(g) \geqslant \mathcal{F}_k(g_{\mathbb{S}^{n-1}}) = \frac{C_{n-1}^k}{2^k}\omega_{n-1}^{\frac{2k}{n-1}}. \tag{2.9}$$

而且当 $k=2$、$n>5$ 以及 $g \in [g_{\mathbb{S}^{n-1}}]$ 为 1- 正时, 上述不等式仍然成立.

由于不等式 (2.9) 当 $k=1$ 时恰好是最佳的 Sobolev 不等式, 从而不等式 (2.9) 可看成是一种 Sobolev 不等式的推广, 如文献 [31, 32].

证明 第一部分成立是由于文献 [7, 定理 1.A]. 当 $k=2$、$n>5$ 以及 $g \in [g_{\mathbb{S}^{n-1}}]$ 为 1- 正时, 利用文献 [33, 定理 1] (同样可参见文献 [34]), 我们得到

$$\left(\int_{\mathbb{S}^{n-1}} \sigma_1(g)\, dg\right)^{-\frac{n-5}{n-3}} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \sigma_2(g)\, dg \geqslant \left(\frac{n-1}{2}\right)^{-\frac{n-5}{n-3}} \frac{(n-1)(n-2)}{8}\omega_{n-1}^{\frac{2}{n-3}}.$$

另一方面, 由于 g 是 1- 正的, 所以有 $\mathcal{F}_1(g) \geqslant \mathcal{F}_1(g_{\mathbb{S}^{n-1}}) = \frac{n-1}{2}\omega_{n-1}^{\frac{2}{n-1}}$. 因此命题得证. □

3 双曲空间中的 Alexsandrov-Fenchel 不等式

首先, 通过直接的计算我们可以得到下面的引理.

引理 3.1 沿着逆曲率流 (2.5), 我们得到

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\int_\Sigma \left\{\sigma_4 - \frac{(n-3)(n-4)}{6}\sigma_2 + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{24}\right\} \\
&\quad = (n-5)\int_\Sigma \left\{\sigma_4 - \frac{(n-3)(n-4)}{6}\sigma_2 + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{24}\right\} \\
&\qquad + \frac{n-4}{4}\left\{\int_\Sigma \left(5\frac{\sigma_5\sigma_3}{\sigma_4} - \frac{4(n-5)}{n-4}\sigma_4\right) + \frac{(n-4)(n-5)}{6}\left(\frac{4(n-3)}{n-4}\sigma_2 - 3\frac{\sigma_3^2}{\sigma_4}\right)\right. \\
&\qquad \left. + \int_\Sigma \frac{(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{24}\left(\frac{\sigma_1\sigma_3}{\sigma_4} - \frac{4(n-1)}{n-4}\right)\right\}.
\end{aligned} \tag{3.1}$$

证明 利用 (2.3) 和 (2.4) 可得

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\int_\Sigma \left\{\sigma_4 - \frac{(n-3)(n-4)}{6}\sigma_2 + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{24}\right\} \\
&\quad = \int_\Sigma 5\sigma_5 F - \frac{(n-4)(n-5)}{2}\sigma_3 F + \frac{(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{24}\sigma_1 F.
\end{aligned}$$

再将 $F = \frac{n-4}{4}\frac{\sigma_3}{\sigma_4}$ 代入上面的公式并重新整理, 即得需证结果 (3.1). □

注 3.2 当 $n=5$ 时, 由于 $\int_\Sigma l_2$ 与 Euler 积分项 Σ 只相差一个常数倍的关系, 故引理 3.1 蕴含了 $\int_\Sigma l_2$ 为常数.

如果将 (3.1) 中的后三项与 Newton-MacLaurin 不等式 (2.1) 和 (2.2) 相比较, 立即可见这三项中前两项是非正项, 但最后一项符号非负. 因此不同于文献 [14, 15, 18] 等, 我们并不能直接应用 Newton-MacLaurin 不等式来建立我们需要的不等式, 而是需要建立更精细的不等式. 幸运的是, 我们发现它在 h- 凸条件

$$\kappa \in \{\kappa=(\kappa_1,\kappa_2,\dots,\kappa_{n-1})\in\mathbb{R}^{n-1} \mid \kappa_i \geqslant 1\} \tag{3.2}$$

下是成立的. 这正是本文的一个关键点.

命题 3.3 令 $n>5$, 则对任何满足 (3.2) 条件的 κ, 我们有加细的 Newton-MacLaurin 不等式:

$$\begin{aligned}&\left(5\frac{\sigma_5\sigma_3}{\sigma_4}-\frac{4(n-5)}{n-4}\sigma_4\right)+\frac{(n-4)(n-5)}{6}\left(\frac{4(n-3)}{n-4}\sigma_2-3\frac{\sigma_3^2}{\sigma_4}\right)\\&\quad+\frac{(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{24}\left(\frac{\sigma_1\sigma_3}{\sigma_4}-\frac{4(n-1)}{n-4}\right)\\&\quad\leqslant 0,\end{aligned} \tag{3.3}$$

等号成立当且仅当下面两种情形之一成立:

$$\text{(i)}\ \kappa_i=\kappa_j,\quad \forall\, i,j,\quad \text{或}\quad \text{(ii)}\ \exists\, i\ \kappa_i>1,\quad \kappa_j=1,\quad \forall\, j\neq i. \tag{3.4}$$

证明 为简化记号, 记

$$p_k=\frac{\sigma_k}{C_{n-1}^k}. \tag{3.5}$$

由直接计算容易看出 (3.3) 与不等式

$$\left(\frac{p_5p_3}{p_4}-p_4\right)+2\left(p_2-\frac{p_3^2}{p_4}\right)+\left(\frac{p_1p_3}{p_4}-1\right)\leqslant 0 \tag{3.6}$$

等价, 且 (3.6) 可由下面两个断言推出.

断言 1 $3(p_2p_4-p_3^2)+(p_3p_1-p_4)\leqslant 0$, 等号成立当且仅当 κ 满足 (3.4).

断言 2 $3(p_5p_3-p_4^2)+(p_3p_1-p_4)\leqslant 0$, 等号成立当且仅当 κ 满足 (3.4).

在这两个断言的证明中, 为简化记号, 我们用 n 来代替 $n-1$ 并考虑满足条件

$$\{\kappa=(\kappa_1,\kappa_2,\dots,\kappa_n)\in\mathbb{R}^n:\kappa_i\geqslant 1,\forall\, i\}$$

的 κ, 并且仍记相应的 k 次初等对称多项式函数的平均为 p_k. 令

$$F_n(x)=x^n+C_n^1p_1x^{n-1}+C_n^2p_2x^{n-2}+\cdots+C_n^{n-1}p_{n-1}x+p_n=\prod_{i=1}^n(x+\kappa_i), \tag{3.7}$$

则其恰好有 n 个实根都满足 $-\kappa_i\leqslant -1$. 由中值定理, 有

$$\frac{1}{n}F_n'(x)=x^{n-1}+\frac{n-1}{n}C_n^1p_1x^{n-2}+\frac{n-2}{n}C_n^2p_2x^{n-3}+\cdots+\frac{1}{n}C_n^{n-1}p_{n-1}=\prod_{i=1}^{n-1}(x+\tilde{\kappa}_i), \tag{3.8}$$

上式为 $n-1$ 次多项式且它的 $n-1$ 个实根都满足 $-\tilde{k}_i \leqslant -1$ $(1 \leqslant i \leqslant n-1)$. 我们进一步得到

$$\frac{1}{n}F_n'(x) = x^{n-1} + C_{n-1}^1 p_1 x^{n-2} + C_{n-1}^2 p_2 x^{n-3} + \cdots + C_{n-1}^{n-2} p_{n-2} x + p_{n-1} = \prod_{i=1}^{n-1}(x+\tilde{\kappa}_i). \tag{3.9}$$

这表明由 $\kappa \in \mathbb{R}^n$ 定义的 p_i $(1 \leqslant i \leqslant n-1)$ 可看成是由满足 $\tilde{\kappa}_j \geqslant 1$ $(\forall j)$ 条件的 $\tilde{\kappa} = (\tilde{\kappa}_1, \ldots, \tilde{\kappa}_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$ 得到的初等对称多项式函数 p_i, 即有

$$p_i(\kappa) = p_i(\tilde{\kappa}), \quad 对\ 1 \leqslant i \leqslant n-1.$$

因此, 由数学归纳法, 我们仅需在 $n=4$ 的情形证明断言 1 以及在 $n=5$ 的情形证明断言 2.

下面给出断言 1 的证明. 对任给 n 数组 $(\kappa_1, \kappa_2, \ldots, \kappa_n)$, 令 $\sum_{cyc} f(\kappa_1, \ldots, \kappa_n)$ 表示所有不同的 $f(\kappa_1, \ldots, \kappa_n)$ 类型项的循环求和. 例如,

$$\begin{aligned}
&\sum_{cyc}\kappa_1 = \kappa_1 + \kappa_2 + \cdots + \kappa_n, \quad \sum_{cyc}\kappa_1^2\kappa_2 = \sum_{i=1}^n \left(\kappa_i^2 \sum_{j\neq i}\kappa_j\right),\\
&\sum_{cyc}\kappa_1(\kappa_2-\kappa_3)^2 = \sum_{i=1}^n\left(\kappa_i \sum_{\substack{1\leqslant j<k\leqslant n\\ j,k\neq i}}(\kappa_j-\kappa_k)^2\right) = (n-2)\sum_{cyc}\kappa_1\kappa_2^2 - 6\sum_{cyc}\kappa_1\kappa_2\kappa_3.
\end{aligned}$$

当 $n=4$ 时,

$$p_1 = \frac{1}{4}\sum_{cyc}\kappa_1, \quad p_2 = \frac{1}{6}\sum_{cyc}\kappa_1\kappa_2, \quad p_3 = \frac{1}{4}\sum_{cyc}\kappa_1\kappa_2\kappa_3, \quad p_4 = \kappa_1\kappa_2\kappa_3\kappa_4.$$

从而得到

$$\begin{aligned}
p_1p_3 - p_4 &= \frac{1}{16}((\kappa_1+\kappa_2+\kappa_3+\kappa_4)(\kappa_1\kappa_2\kappa_3+\kappa_1\kappa_2\kappa_4+\kappa_1\kappa_3\kappa_4+\kappa_2\kappa_3\kappa_4) - 16\kappa_1\kappa_2\kappa_3\kappa_4)\\
&= \frac{1}{16}\sum_{cyc}\kappa_1\kappa_2(\kappa_3-\kappa_4)^2, \qquad (3.10)\\
3(p_2p_4 - p_3^2) &= 3\bigg(\frac{1}{6}\kappa_1\kappa_2\kappa_3\kappa_4(\kappa_1\kappa_2+\kappa_1\kappa_3+\kappa_2\kappa_3+\kappa_1\kappa_4+\kappa_2\kappa_4+\kappa_3\kappa_4)\\
&\quad - \frac{1}{16}(\kappa_1\kappa_2\kappa_3+\kappa_1\kappa_2\kappa_4+\kappa_1\kappa_3\kappa_4+\kappa_2\kappa_3\kappa_4)^2\bigg)\\
&= -\frac{1}{16}\sum_{cyc}\kappa_1^2\kappa_2^2(\kappa_3-\kappa_4)^2. \qquad (3.11)
\end{aligned}$$

因此有

$$3(p_2p_4 - p_3^2) + p_1p_3 - p_4 = \frac{1}{16}\sum_{cyc}\kappa_1\kappa_2(1-\kappa_1\kappa_2)(\kappa_3-\kappa_4)^2 \leqslant 0. \tag{3.12}$$

即断言 1 得证.

接着给出断言 2 的证明. 现设 $n=5$, 则

$$p_1 = \frac{1}{5}\sum_{cyc}\kappa_1, \quad p_3 = \frac{1}{10}\sum_{cyc}\kappa_1\kappa_2\kappa_3, \quad p_4 = \frac{1}{5}\sum_{cyc}\kappa_1\kappa_2\kappa_3\kappa_4, \quad p_5 = \kappa_1\kappa_2\kappa_3\kappa_4\kappa_5.$$

从而,

$$
\begin{aligned}
p_1p_3 - p_4 &= \frac{1}{50}\left((\kappa_1+\kappa_2+\kappa_3+\kappa_4+\kappa_5)\sum_{cyc}\kappa_1\kappa_2\kappa_3 - 10\kappa_1\kappa_2\kappa_3\kappa_4\kappa_5\sum_{i=1}^{5}\frac{1}{\kappa_i}\right)\\
&= \frac{1}{50}\left(\sum_{cyc}\kappa_1^2\kappa_2\kappa_3 - 6\sum_{cyc}\kappa_1\kappa_2\kappa_3\kappa_4\right)\\
&= \frac{1}{100}\sum_{cyc}\kappa_1\kappa_2(\kappa_3-\kappa_4)^2, \qquad (3.13)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
3(p_5p_3 - p_4^2) &= 3\left(\frac{1}{10}\kappa_1\kappa_2\kappa_3\kappa_4\kappa_5\sum_{cyc}\kappa_1\kappa_2\kappa_3 - \frac{1}{25}\left(\sum_{cyc}\kappa_1\kappa_2\kappa_3\kappa_4\right)^2\right)\\
&= \frac{3}{50}\left(-2\sum_{cyc}(\kappa_1\kappa_2\kappa_3\kappa_4)^2 + \kappa_1\kappa_2\kappa_3\kappa_4\kappa_5\sum_{cycle}\kappa_1\kappa_2\kappa_3\right)\\
&= \frac{3}{100}\left(-\sum_{cyc}(\kappa_1\kappa_2\kappa_3)^2(\kappa_4-\kappa_5)^2\right). \qquad (3.14)
\end{aligned}
$$

因此得到

$$
\begin{aligned}
3(p_5p_3 - p_4^2) + (p_3p_1 - p_4) &= \frac{1}{100}\sum_{cyc}\kappa_1\kappa_2(\kappa_3-\kappa_4)^2 + \frac{3}{100}\left(-\sum_{cyc}(\kappa_1\kappa_2\kappa_3)^2(\kappa_4-\kappa_5)^2\right)\\
&= \frac{1}{100}\sum_{cyc}[\kappa_1\kappa_2+\kappa_2\kappa_3+\kappa_1\kappa_3 - 3(\kappa_1\kappa_2\kappa_3)^2](\kappa_4-\kappa_5)^2 \leqslant 0. \qquad (3.15)
\end{aligned}
$$

从而证明了断言 2 成立. □

注 3.4 (1) 命题 3.3 也可以通过

$$\kappa_i = 1 + \tilde{\kappa}_i \quad (\text{其中对任何的 } i \text{ 都有 } \tilde{\kappa}_i \geqslant 0)$$

化简从而可以利用通常的 Newton-MacLaurin 不等式 (引理 2.1) 来证明.

(2) 通过前面的证明可看出, 命题 3.3 实际上对任何满足 $\kappa_i\kappa_j \geqslant 1$ 条件的 $\kappa \in \mathbb{R}^{n-1}$ 都成立. 这个条件与 Σ 的截面曲率处处非负等价. 我们相信本文中的结果同样在具有非负截面曲率的超曲面上成立.

注 3.5 从命题 3.3 的证明中很容易看出, 当 $\kappa \in \mathbb{R}^{n-1}$ 满足 $0 \leqslant \kappa_i \leqslant 1$ $(\forall i)$ 时, 不等式 (3.3) 中的不等号改变方向.

现在可以建立由 (1.11) 定义的 $Q(\Sigma_t)$ 沿着流 (1.10) 下的单调性.

定理 3.6 若初始的超曲面是 h- 凸的, 则泛函 $Q(\Sigma_t)$ 沿着流 (1.10) 下单调不增.

证明 由命题 2.2、3.3 和引理 3.1, 有

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\int_{\Sigma}\left\{\sigma_4 - \frac{(n-3)(n-4)}{6}\sigma_2 + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{24}\right\}\\
&\leqslant (n-5)\int_{\Sigma}\left\{\sigma_4 - \frac{(n-3)(n-4)}{6}\sigma_2 + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{24}\right\}. \qquad (3.16)
\end{aligned}
$$

另一方面, 利用 (2.4) 和 (2.2) 得到

$$\frac{d}{dt}|\Sigma_t| = \int_{\Sigma_t}\frac{n-4}{4}\frac{\sigma_3\sigma_1}{\sigma_4}d\mu \geqslant (n-1)|\Sigma_t|. \qquad (3.17)$$

最后将 (3.16) 和 (3.17) 结合起来, 便得证明. □

定理 3.7　对 $\mathbb{H}^n$ $(n>5)$ 中的任意满足 h- 凸条件的超曲面 Σ, 有

$$Q(\Sigma)\geqslant\frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{24}\omega_{n-1}^{\frac{4}{n-1}},\tag{3.18}$$

等号成立当且仅当 Σ 是测地球面.

证明　首先利用 Gerhardt [21] 的工作, 我们可令 $\Sigma(t)$ 为流 (1.10) 的解. 回忆我们在命题 2.2 和定理 3.6 中已分别证明了在流 (1.10) 下 h- 凸性的保持以及泛函 Q 的单调不增性质. 因此为证 (3.18) 成立, 我们只需证明

$$\lim_{t\to\infty}Q(\Sigma_t)\geqslant\frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{24}\omega_{n-1}^{\frac{4}{n-1}}.\tag{3.19}$$

由于 Σ 为 $(\mathbb{H}^n,\bar{g})$ 中的 h- 凸超曲面, 故其可以写成球面上的一个图并记相应的图函数为 $r(\theta)$ (其中 $\theta\in\mathbb{S}^{n-1}$). 同理可将 $X(t)$ 表示成配有标准度量 $\hat{g}$ 的单位球面 $\mathbb{S}^{n-1}$ 上的图, 并且相应的图函数记为 $r(t,\theta)$. 令 $\lambda(r)=\sinh(r)$, 从而有 $\lambda'(r)=\cosh(r)$, 以及

$$(\lambda')^2=(\lambda)^2+1.$$

定义函数 $\varphi(\theta)=\Phi(r(\theta))$, 其中 Φ 满足

$$\Phi'=\frac{1}{\lambda}.$$

再令

$$v=\sqrt{1+|\nabla\varphi|^2_{\hat{g}}}.$$

利用 Gerhardt [21] 的工作, 我们有下面的结果.

引理 3.8　沿着曲率流 (1.10), 有

$$\lambda=O(\mathrm{e}^{\frac{t}{n-1}}),\quad |\nabla\varphi|+|\nabla^2\varphi|=O(\mathrm{e}^{-\frac{t}{n-1}}).$$

在正交基下, 曲面 Σ 的第二基本形式可表示为

$$h^i_j=\frac{\lambda'}{v\lambda}\left(\delta^i_j-\frac{\varphi^i_j}{\lambda'}+\frac{\varphi^i\varphi^l\varphi_{jl}}{v^2\lambda'}\right),$$

以及

$$\nabla\lambda=\lambda\lambda'\nabla\varphi.$$

回忆基本事实

$$\sigma_4=\frac{1}{24}(s_1^4-6s_1^2s_2+8s_1s_3+3s_2^2-6s_4),\quad \sigma_2=\frac{1}{2}(s_1^2-s_2),$$

其中

$$s_k:=\sum_i\kappa_i^k.$$

我们由此得到下列展开式:

$$s_1=\frac{\lambda'}{v\lambda}\left(n-1-\frac{\Delta\varphi}{\lambda'}+\frac{\varphi^i\varphi^j\varphi_{ij}}{v^2\lambda'}\right)+O(\mathrm{e}^{-\frac{6t}{n-1}}),$$

$$s_2=\left(\frac{\lambda'}{v\lambda}\right)^2\left(n-1-\frac{2\Delta\varphi}{\lambda'}+\frac{\varphi^i_l\varphi^l_i}{(\lambda')^2}+\frac{2\varphi^i\varphi^j\varphi_{ij}}{v^2\lambda'}\right)+O(\mathrm{e}^{-\frac{6t}{n-1}}),$$

$$s_3 = \left(\frac{\lambda'}{v\lambda}\right)^3 \left(n-1-\frac{3\Delta\varphi}{\lambda'}+\frac{3\varphi_l^i\varphi_i^l}{(\lambda')^2}+\frac{3\varphi^i\varphi^j\varphi_{ij}}{v^2\lambda'}\right)+O(\mathrm{e}^{-\frac{6t}{n-1}}),$$
$$s_4 = \left(\frac{\lambda'}{v\lambda}\right)^4 \left(n-1-\frac{4\Delta\varphi}{\lambda'}+\frac{6\varphi_l^i\varphi_i^l}{(\lambda')^2}+\frac{4\varphi^i\varphi^j\varphi_{ij}}{v^2\lambda'}\right)+O(\mathrm{e}^{-\frac{6t}{n-1}}).$$

这些关系式表明

$$\sigma_2=\frac{1}{2}\left(\frac{\lambda'}{v\lambda}\right)^2\left((n-1)(n-2)-\frac{2(n-2)\Delta\varphi}{\lambda'}-\frac{\varphi_l^i\varphi_i^l}{(\lambda')^2}+\left(\frac{\Delta\varphi}{\lambda'}\right)^2+\frac{2(n-2)\varphi^i\varphi^j\varphi_{ij}}{v^2\lambda'}\right)+O(\mathrm{e}^{-\frac{6t}{n-1}})$$

和

$$\begin{aligned}\sigma_4=&\frac{1}{24}\left(\frac{\lambda'}{v\lambda}\right)^4(n-3)(n-4)\left((n-1)(n-2)-\frac{4(n-2)\Delta\varphi}{\lambda'}-\frac{6\varphi_l^i\varphi_i^l}{(\lambda')^2}+6\left(\frac{\Delta\varphi}{\lambda'}\right)^2+\frac{4(n-2)\varphi^i\varphi^j\varphi_{ij}}{v^2\lambda'}\right)\\&+O(\mathrm{e}^{-\frac{6t}{n-1}}),\end{aligned}$$

从而有

$$\begin{aligned}l_2=&\,\sigma_4-\frac{(n-3)(n-4)}{6}\sigma_2+\frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{24}\\=&\,\frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{24}\left[\left(\frac{\lambda'}{v\lambda}\right)^2-1\right]^2\\&-\frac{(n-2)(n-3)(n-4)}{6}\frac{\Delta\varphi}{\lambda'}\left(\frac{\lambda'}{v\lambda}\right)^2\left[\left(\frac{\lambda'}{v\lambda}\right)^2-1\right]\\&+\frac{(n-2)(n-3)(n-4)}{6}\left(\frac{\lambda'}{v\lambda}\right)^2\left[\left(\frac{\lambda'}{v\lambda}\right)^2-1\right]\frac{\varphi^i\varphi^j\varphi_{ij}}{v^2\lambda'}\\&+\frac{(n-3)(n-4)}{4}\left(\frac{\Delta\varphi}{\lambda'}\right)^2\left(\frac{\lambda'}{v\lambda}\right)^2\left[\left(\frac{\lambda'}{v\lambda}\right)^2-\frac{1}{3}\right]\\&-\frac{(n-3)(n-4)}{4}\frac{\varphi_l^i\varphi_i^l}{(\lambda')^2}\left(\frac{\lambda'}{v\lambda}\right)^2\left[\left(\frac{\lambda'}{v\lambda}\right)^2-\frac{1}{3}\right]+O(\mathrm{e}^{-\frac{6t}{n-1}}).\end{aligned}$$

再利用引理 3.8 并代入 v、λ 和 λ' 的表达式, 我们得到

$$\left(\frac{\lambda'}{v\lambda}\right)^2-1=\frac{1}{\lambda^2}-|\nabla\varphi|^2+O(\mathrm{e}^{-\frac{4t}{n-1}}),$$

以及

$$\begin{aligned}\frac{6l_2}{(n-3)(n-4)}=&\,\frac{(n-1)(n-2)}{4}\left(\frac{1}{\lambda^2}-|\nabla\varphi|^2\right)^2-(n-2)\frac{\Delta\varphi}{\lambda}\left(\frac{1}{\lambda^2}-|\nabla\varphi|^2\right)\\&+\left(\frac{\Delta\varphi}{\lambda}\right)^2-\frac{\varphi_l^i\varphi_i^l}{(\lambda')^2}+O(\mathrm{e}^{-\frac{6t}{n-1}}).\end{aligned}$$

我们现在引入一个 2 阶张量

$$A=-\lambda\nabla^2\varphi-\frac{1}{2}(\lambda^2|\nabla\varphi|^2-1)\hat{g}.$$

可以直接验算得到

$$\frac{3l_2}{(n-3)(n-4)}=\lambda^{-4}\sigma_2(\hat{g}^{-1}A)+O(\mathrm{e}^{-\frac{6t}{n-1}}).$$

回忆 $\varphi(\theta)=\Phi(r(\theta))$, 易得 $\lambda_i=\lambda' r_i$, 从而有

$$\varphi_i=\frac{\lambda_i}{\lambda\lambda'}\quad \text{和}\quad \varphi_{ij}=\frac{\lambda_{ij}}{\lambda^2}-\frac{2\lambda_i\lambda_j}{\lambda^3}+O(\mathrm{e}^{-\frac{3t}{n-1}}).$$

因此,

$$\frac{3l_2}{(n-3)(n-4)}=\lambda^{-4}\sigma_2\bigg(\hat{g}^{-1}\bigg(-\frac{\nabla^2\lambda}{\lambda}+\frac{2\nabla\lambda\otimes\nabla\lambda}{\lambda^2}-\frac{1}{2}\bigg(\frac{|\nabla\lambda|^2}{\lambda^2}-1\bigg)\hat{g}\bigg)\bigg)+O(\mathrm{e}^{-\frac{6t}{n-1}}).\tag{3.20}$$

回忆 Schouten 张量

$$S_{\hat{g}}=\frac{1}{n-3}\bigg(\mathrm{Ric}_{\hat{g}}-\frac{R_{\hat{g}}}{2(n-2)}\hat{g}\bigg)=\frac{1}{2}\hat{g},$$

以及它在共形形变下的熟知的公式 (参见文献 [35])

$$S_{\lambda^2\hat{g}}=-\frac{\nabla^2\lambda}{\lambda}+\frac{2\nabla\lambda\otimes\nabla\lambda}{\lambda^2}-\frac{1}{2}\frac{|\nabla\lambda|^2}{\lambda^2}\hat{g}+S_{\hat{g}}=-\frac{\nabla^2\lambda}{\lambda}+\frac{2\nabla\lambda\otimes\nabla\lambda}{\lambda^2}-\frac{1}{2}\frac{|\nabla\lambda|^2}{\lambda^2}\hat{g}+\frac{1}{2}\hat{g}.\tag{3.21}$$

利用 (3.20) 和 (3.21), 我们得到

$$\frac{3l_2}{(n-3)(n-4)}=\sigma_2(\lambda^2\hat{g})+O(\mathrm{e}^{-\frac{6t}{n-1}}).$$

再利用 $\Sigma(t)$ 的度量具有如下展开式:

$$g=\lambda^2(\hat{g}+\nabla\varphi\otimes\nabla\varphi)=\lambda^2\hat{g}+O(1),$$

可得

$$\sqrt{\det(g)}=\lambda^{n-1}(1+O(\mathrm{e}^{-\frac{2t}{n-1}})),$$

从而有

$$|\Sigma(t)|=(1+o(1))\int_{\mathbb{S}^{n-1}}\lambda^{n-1}=(1+o(1))\mathrm{vol}(\lambda^2\hat{g}).$$

同理可得

$$\int\frac{3l_2}{(n-3)(n-4)}=\int_{\mathbb{S}^{n-1}}\sigma_2(\lambda^2\hat{g})d\mathrm{vol}_{\lambda^2\hat{g}}+O(\mathrm{e}^{\frac{(n-7)t}{n-1}})=(1+o(1))\int_{\mathbb{S}^{n-1}}\sigma_2(\lambda^2\hat{g})d\mathrm{vol}_{\lambda^2\hat{g}}.\tag{3.22}$$

其中我们利用了事实 $\int_{\mathbb{S}^{n-1}}\sigma_2(\lambda^2\hat{g})d\mathrm{vol}_{\lambda^2\hat{g}}=O(\mathrm{e}^{\frac{(n-5)t}{n-1}})$ (实际上有 $\int_{\mathbb{S}^{n-1}}\sigma_2(\lambda^2\hat{g})d\mathrm{vol}_{\lambda^2\hat{g}}\geqslant c|\Sigma(t)|^{\frac{n-5}{n-1}}\geqslant c_1\mathrm{e}^{\frac{(n-5)t}{n-1}}$ 对于某个 $c,c_1>0$ 成立, 可见下面的证明). 为了对共形度量 $\lambda^2\hat{g}$ 应用命题 2.3 中推广的 Sobolev 不等式结果, 我们需要验证 $\lambda^2\hat{g}\in\Gamma_1^+$. 我们观察到它在渐近意义上是对的. 更准确地, 我们有如下的渐近性质:

$$\begin{aligned}\sigma_1&=n-1+\frac{n-1}{2}\bigg(\frac{1}{\lambda^2}-|\nabla\varphi|^2\bigg)-\frac{\Delta\varphi}{\lambda}+O(\mathrm{e}^{-\frac{4t}{n-1}})\\&=n-1+\frac{1}{\lambda^2}\bigg(\frac{n-1}{2}-\frac{n-5}{2}\frac{|\nabla\lambda|^2}{\lambda^2}-\frac{\Delta\lambda}{\lambda}\bigg)+O(\mathrm{e}^{-\frac{4t}{n-1}})\\&=n-1+\sigma_1(\lambda^2\hat{g})+O(\mathrm{e}^{-\frac{4t}{n-1}}).\end{aligned}$$

利用超曲面 $\Sigma(t)$ 是 h- 凸的性质, 可见 $\sigma_1\geqslant n-1$, 从而得到

$$\sigma_1(\lambda^2\hat{g})+O(\mathrm{e}^{-\frac{4t}{n-1}})\geqslant 0.$$

考虑变换 $\tilde{\lambda} := \lambda^{1-\mathrm{e}^{-\frac{t}{n-1}}}$ 和共形度量 $\tilde{\lambda}^2\hat{g}$, 我们有

$$\tilde{\lambda}^2\sigma_1(\tilde{\lambda}^2\hat{g}) = \frac{n-1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{t}{n-1}} + \frac{n-3}{2}\mathrm{e}^{-\frac{t}{n-1}}(1-\mathrm{e}^{-\frac{t}{n-1}})\frac{|\nabla\lambda|^2}{\lambda^2} + (1-\mathrm{e}^{-\frac{t}{n-1}})\lambda^2\sigma_1(\lambda^2\hat{g}).$$

这表明 $\tilde{\lambda}^2\hat{g} \in \Gamma_1^+$. 对 σ_2 算子应用 Sobolev 不等式 (2.9), 可得

$$(\mathrm{vol}(\tilde{\lambda}^2\hat{g}))^{-\frac{n-5}{n-1}}\int_{\mathbb{S}^{n-1}}\sigma_2(\tilde{\lambda}^2\hat{g})d\mathrm{vol}_{\tilde{\lambda}^2\hat{g}} \geqslant \frac{(n-1)(n-2)}{8}\omega_{n-1}^{\frac{4}{n-1}}. \tag{3.23}$$

另一方面, 由

$$\lambda^{-\mathrm{e}^{-\frac{t}{n-1}}} = 1 + o(1),$$

可得

$$(\mathrm{vol}(\tilde{\lambda}^2\hat{g}))^{-\frac{n-5}{n-1}}\int_{\mathbb{S}^{n-1}}\sigma_2(\tilde{\lambda}^2\hat{g})d\mathrm{vol}_{\tilde{\lambda}^2\hat{g}} = (1+o(1))(\mathrm{vol}(\lambda^2\hat{g}))^{-\frac{n-5}{n-1}}\int_{\mathbb{S}^{n-1}}\sigma_2(\lambda^2\hat{g})d\mathrm{vol}_{\lambda^2\hat{g}}, \tag{3.24}$$

再利用 (3.22)–(3.24), 可得

$$\lim_{t\to+\infty}(\mathrm{vol}(\Sigma(t)))^{-\frac{n-5}{n-1}}\int_{\Sigma(t)} l_2 \geqslant \frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{24}\omega_{n-1}^{\frac{4}{n-1}}.$$

这证明了 (3.19), 因而 (3.18) 得证. 当 (3.18) 中等号成立, 则表明沿着流 (1.10), Q 为常数. 此时 (3.17) 为等式从而下面不等式:

$$\frac{n-4}{4}\frac{\sigma_1\sigma_3}{\sigma_4} \geqslant n-1$$

中的等号也成立. 因此 Σ 为测地球面. □

定理 3.7 本身有单独的意义. 它实际上是一种 Sobolev 型不等式, 可参见文献 [7] 中类似的 Sobolev 型不等式. 现在可以来证明本文的最主要结果.

定理 1.1 的证明 首先, 很容易验证本文所有的不等式在测地球面情形时都是等式.

当 $n > 5$ 时, 由 (1.11) 和 (3.18), 有

$$\int_\Sigma l_2 \geqslant \frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{24}\omega_{n-1}^{\frac{4}{n-1}}(|\Sigma|)^{\frac{n-5}{n-1}}. \tag{3.25}$$

由于 $\sigma_4 = l_2 + \frac{(n-2)(n-3)}{6}\sigma_2 - \frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{24}$, 并代入 (1.8), 可得

$$\begin{aligned}\int_\Sigma \sigma_4 &\geqslant C_{n-1}^4\omega_{n-1}^{\frac{4}{n-1}}(|\Sigma|)^{\frac{n-5}{n-1}} + \int\frac{(n-2)(n-3)}{6}\sigma_2 - \frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{24}\\ &\geqslant C_{n-1}^4\omega_{n-1}\bigg\{\bigg(\frac{|\Sigma|}{\omega_{n-1}}\bigg)^{\frac{1}{2}} + \bigg(\frac{|\Sigma|}{\omega_{n-1}}\bigg)^{\frac{1}{2}\frac{n-5}{n-1}}\bigg\}^2.\end{aligned} \tag{3.26}$$

这即证明了不等式 (1.9). 再利用定理 3.7 可知等号成立当且仅当 Σ 是测地球面.

当 $n = 5$ 时, 由超曲面 Σ 是星型的可知此时曲面的 Euler 示性数为 1. 由注 3.2 可得, 当 $n = 5$ 时, (3.25) 为等式, 事实上对于微分同胚于球面的超曲面都成立. 因此这种情形下, 我们同样有上述的不等式, 从而 (1.9) 成立. (1.9) 中的等式情形蕴含了 (3.26) 中的等号成立, 从而由文献 [18] 可知 Σ 为测地球面. □

致谢 我们在此感谢与管鹏飞教授的讨论以及他一直以来给予的支持, 并感谢王伟给出的关于命题 3.3 的简练漂亮的证明.

参考文献

1 Santaló L. Integral Geometry and Geometric Probability. Cambridge: Cambridge University Press, 2004
2 Burago Y D, Zalgaller V A. Geometric Inequalities. Berlin: Springer, 1988
3 Schneider R. Convex Bodies: The Brunn-Minkowski Theory. Cambridge: Cambridge University Press, 1993
4 Guan P, Li J. The quermassintegral inequalities for κ-convex starshaped domains. Adv Math, 2009, 221: 1725–1732
5 Chang S Y A, Wang Y. On Aleksandrov-Fenchel inequalities for κ-convex domains. Milan J Math, 2011, 79: 13–38
6 Qiu G. A family of higher-order isoperimetric inequalities. Commun Contemp Math, 2015, 17: 1450015
7 Wang G, Guan P. Geometric inequalities on locally conformally flat manifolds. Duke Math J, 2004, 124: 177–212
8 Schmidt E. Die isoperimetrischen Ungleichungen auf der gewöhnlichen Kugel und für Rotationskörper imn-dimensionalen sphärischen Raum. Math Z, 1940, 46: 743–794
9 Makowski M. Mixed volume preserving curvature flows in hyperbolic space. ArXiv:1208.1898, 2012
10 Rivin I, Schlenker J M. On the Schlafli differential formula. ArXiv:math/0001176, 2000
11 Solanes G. Integrals de curvatura i geometria integral a l'espai hiperbolic. PhD Thesis. Barcelona: Universitat Autonoma de Barcelona, 2003
12 Gallego E, Solanes G. Integral geometry and geometric inequalities in hyperbolic space. Differential Geom Appl, 2005, 22: 315–325
13 Borisenko A A, Miquel V. Total curvatures of convex hypersurfaces in hyperbolic space. Illinois J Math, 1999, 43: 61–78
14 Brendle S, Hung P K, Wang M T. A Minkowski inequality for hypersurfaces in the Anti-de Sitter-Schwarzschild manifold. Comm Pure Appl Math, 2016, 69: 124–144
15 de Lima L L, Girão F. An Alexandrov-Fenchel-Type inequality in hyperbolic space with an application to a Penrose inequality. Ann Henri Poincaré, 2016, 17: 979–1002
16 Dahl M, Gicquaud R, Sakovich A. Penrose type inequalities for asymptotically hyperbolic graphs. Ann Henri Poincaré, 2013, 14: 1135–1168
17 Ge Y, Wang G, Wu J. The GBC mass for asymptotically hyperbolic manifolds. Math Z, 2015, 281: 257–297
18 Li H, Wei Y, Xiong C. A geometric inequality on hypersurface in hyperbolic space. Adv Math, 2014, 253: 152–162
19 Ge Y, Wang G, Wu J. Hyperbolic Alexandrov-Fenchel quermassintegral inequalities, II. J Differential Geom, 2014, 98: 237–260
20 Wang G, Xia C. Isoperimetric type problems and Alexandrov-Fenchel type inequalities in the hyperbolic space. Adv Math, 2014, 259: 532–556
21 Gerhardt C. Inverse curvature flows in hyperbolic space. J Differential Geom, 2011, 89: 487–527
22 Ge Y, Wang G, Wu J. A new mass for asymptotically flat manifolds. Adv Math, 2014, 266: 84–119
23 Ding Q. The inverse mean curvature flow in rotationally symmetric spaces. Chin Ann Math Ser B, 2011, 32: 27–44
24 Brendle S. Constant mean curvature surfaces in warped product manifolds. Publ Math Inst Hautes Études Sci, 2013, 117: 247–269
25 Kwong K K, Miao P. A new monotone quantity along the inverse mean curvature flow in $\mathbb{R}^n$. Pacific J Math, 2014, 267: 417–422
26 Guan P. Topics in geometric fully nonlinear equations. Http://www.math.mcgill.ca/guan/notes.html, 2002
27 Reilly R C. On the Hessian of a function and the curvatures of its graph. Michigan Math J, 1974, 20: 373–383
28 Andrews B. Pinching estimates and motion of hypersurfaces by curvature functions. J Reine Angew Math, 2007, 608: 17–31
29 Chow B, Lu P, Ni L. Hamilton's Ricci Flow. Graduate Studies in Mathematics, vol. 77. Providence: Amer Math Soc; New York: Science Press, 2006
30 Cabezas-Rivas E, Miquel V. Volume preserving mean curvature flow in the hyperbolic space. Indiana Univ Math J, 2007, 56: 2061–2086
31 Beckner W. Sharp Sobolev inequalities on the sphere and the Moser-Trudinger inequality. Ann of Math (2), 1993, 138: 213–242
32 Chang S Y A, Yang P C. The inequality of Moser and Trudinger and applications to conformal geometry. Comm Pure Appl Math, 2003, 56: 1135–1150
33 Ge Y, Wang G, Ge Y, et al. On a conformal quotient equation, II. Comm Anal Geom, 2012, 21: 1–38
34 Guan P, Lin C S, Wang G. Application of the method of moving planes to conformally invariant equations. Math Z,

2004, 247: 1–19
35 Viaclovsky J A. Conformal geometry, contact geometry, and the calculus of variations. Duke Math J, 2000, 101: 283–316

Hyperbolic Alexandrov-Fenchel quermassintegral inequalities, I

Yuxin Ge, Guofang Wang & Jie Wu

Abstract In this paper we prove the following geometric inequality in the hyperbolic space $\mathbb{H}^n$ ($n \geqslant 5$), which is a hyperbolic Alexandrov-Fenchel inequality,

$$\int_\Sigma \sigma_4 d\mu \geqslant C_{n-1}^4 \omega_{n-1} \left\{ \left(\frac{|\Sigma|}{\omega_{n-1}} \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{|\Sigma|}{\omega_{n-1}} \right)^{\frac{1}{2}\frac{n-5}{n-1}} \right\}^2,$$

provided that Σ is a horospherical convex hypersurface. Equality holds if and only if Σ is a geodesic sphere in $\mathbb{H}^n$.

Keywords **Alexandrov-Fenchel inequality, inverse curvature flow, hyperbolic space**

MSC(2010) **52A40, 53C65**

doi: 10.1360/N012017-00063