TD: Fourier.

Exercice 1. L'application qui à une fonction associe ses coefficients de Fourier est-elle :

1. continue de L^1_{per} dans $c_0(\mathbb{Z})$?
2. surjective de $\mathcal{C}^1_{per}$ dans $\ell^1(\mathbb{Z})$?
3. injective de $\mathcal{C}^0_{per}$ dans $\ell^1(\mathbb{Z})$?
4. bijective de $\mathcal{C}^\infty_{per}$ dans l'espace des suites à décroissance rapide :

$$s_0(\mathbb{Z}) = \{(c_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}} : \forall p \geq 0, c_n = o(|n|^{-p})\} \quad ?$$

Exercice 2. Soit P le polynôme trigonométrique

$$P(t) = \sum_{k=-N}^{N} c_k e^{ikt}.$$

Calculer les coefficients de Fourier de P.

Exercice 3. L'égalité de Parseval affirme que si $f \in L^2_{per}$, alors $(c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z})$ et

$$\|f\|_2^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|^2.$$

Ecrire l'égalité de Parseval avec les coefficients $a_n(f)$ et $b_n(f)$.

Exercice 4. Soit f la fonction paire 2π périodique définie par $f(x) = \pi - x$ pour $x \in [0, \pi]$.

1. Dessiner le graphe de f.
2. Calculer les coefficients de Fourier de f.
3. En étudiant la convergence de la série de Fourier de f, en déduire les sommes suivantes

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}, \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^4}.$$

Exercice 5 (Quelques valeurs de la fonction ζ sur les entiers pairs)**.** En considérant les fonctions 2π périodiques f_k définies par

$$\forall x \in]-\pi, \pi[, \qquad f_k(x) = x^k$$

pour $k = 1, 2$ ou 3, montrer que

$$\sum_{n>0} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}, \quad \sum_{n>0} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}, \quad \sum_{n>0} \frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{945}.$$

Exercice 6. Soit f une fonction 2π périodique de classe C^1 vérifiant $\int_0^{2\pi} f = 0$.

1. Montrer que

$$\int_0^{2\pi} |f|^2 \leq \int_0^{2\pi} |f'|^2.$$

2. Déterminer les cas d'égalité.

Exercice 7. On rappelle que le noyau de Dirichlet d'ordre n est défini par

$$D_n(x) := \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-n}^{n} e^{ikx}.$$

1. Montrer que pour tout $x \neq 0$,

$$D_n(x) = \frac{1}{2\pi} \frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right)}{\sin\frac{x}{2}}.$$

2. Soit $f \in L^1_{per}$. Montrer que

$$(D_n * f)(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k(f) e^{ikx}.$$

3. Traduire à l'aide de D_n le théorème de convergence en moyenne quadratique.

Exercice 8. On rappelle que le noyau de Féjer est défini pour tout $n > 0$ par

$$F_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} D_k(x).$$

1. Montrer que pour tout $x \neq 0$,

$$F_n(x) = \frac{1}{2\pi n} \left(\frac{\sin(nx/2)}{\sin(x/2)} \right)^2.$$

2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$(F_n * f)(x) = \sum_{k=-(n-1)}^{n-1} \left(1 - \frac{|k|}{n}\right) c_k(f) e^{ikx}.$$

3. Montrer que les noyaux de Féjer $(F_n)_{n>0}$ forment une approximation de l'unité : $F_n \geq 0$, $\int_{-\pi}^{\pi} F_n(t)\,dt = 1$ et pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{\varepsilon<|t|<\pi} |F_n(t)|\,dt = 0.$$

4. Montrer que pour tout $f \in \mathcal{C}^0_{per}$, $(F_n * f)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f.

5. Soit $p \in [1, \infty)$. Montrer que pour tout $f \in L^p_{per}$, $(F_n * f)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers f dans L^p_{per}.

6. Soit $f \in \mathcal{C}^0_{per}$ et $x \in \mathbb{R}$. Expliquer pourquoi si la série de Fourier de f en x converge, alors elle converge nécessairement vers $f(x)$.

7. Montrer que l'application qui à $f \in L^1_{per}$ associe ses coefficients de Fourier est injective.

Exercice 9 (Phenomène de Gibbs)**.** Soit f la fonction 2π-périodique égale à 1 sur $]0,\pi[$, 0 sur $]\pi, 2\pi[$, et $1/2$ en 0 et π.

1. Calculer la série de Fourier de f, et montrer qu'elle converge simplement vers f.

2. Montrer que pour tout $N \geq 1$, les dérivées des sommes partielles vérifient

$$S_{2N-1}(f)'(t) = \frac{1}{\pi} \frac{\sin(2Nt)}{\sin t} \qquad \forall t \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}.$$

3. En déduire que

$$\max_{[0,\pi]} S_{2N-1}(f) = S_{2N-1}(f)\left(\frac{\pi}{2N}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2N}} \frac{\sin(2Nt)}{\sin t} dt.$$

4. Montrer que
$$\max_{[0,\pi]} S_N(f) \longrightarrow \frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{\sin t}{t}dt \qquad \text{lorsque } N\to\infty.$$

5. On admet que $\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{\sin t}{t}dt \approx 1,089$. Que dire de l'approximation de f par $S_N(f)$? On pourra illustrer le phénomène par un dessin.

Exercice 10 (Problème de Dirichlet et noyau de Poisson)**.** On note D le disque unité ouvert dans $\mathbb{R}^2 \approx \mathbb{C}$. Soit $u\colon \overline{D} \to \mathbb{C}$ de classe C^2 dans D.

1. Montrer que pour tout $n\in\mathbb{Z}$ il existe $u_n\colon [0,1[\to \mathbb{C}$ de classe C^2 telle que
$$u(re^{i\theta}) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} u_n(r)e^{in\theta} \qquad \forall r\in[0,1[, \theta\in\mathbb{R}.$$

2. Montrer que $u_n(0)=0$ pour tout $n\neq 0$.

3. On suppose que $\Delta u = \partial_1^2 u + \partial_2^2 u = 0$ dans D. Montrer que
$$u_n''(r) + \frac{1}{r}u_n'(r) - \frac{n^2}{r^2}u_n(r) = 0 \qquad \forall r\in]0,1[, n\in\mathbb{Z}.$$

4. On suppose de plus que u_n est continue sur $\overline{D}$. Déterminer u_n en fonction des coefficients de Fourier de $f\colon \theta\mapsto u(e^{i\theta})$. On pourra chercher des solutions particulières de la forme $r\mapsto r^\lambda$ ($\lambda\in\mathbb{R}$) pour l'équation différentielle obtenue à la question précédente.

5. Montrer que $u(re^{i\theta}) = (P_r * f)(\theta)$, où
$$P_r(\theta) = \frac{1-r^2}{1-2r\cos\theta + r^2} \qquad \forall r\in[0,1[, \theta\in\mathbb{R}.$$

6. Réciproquement, si $f\in C^0_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ et u est définie par la formule de la question précédente, montrer que u est C^2 sur D et continue sur $\overline{D}$, que $\Delta u = 0$ dans D et $u(e^{i\theta}) = f(\theta)$ pour tout $\theta\in\mathbb{R}$.

Exercice 11 (Equation de la chaleur périodique)**.** Soit $u\colon [0,+\infty\times\mathbb{R}\to\mathbb{C}$, $(t,x)=u(t,x)$ une fonction continue, de classe C^1 sur $]0,+\infty[\times\mathbb{R}$, et telle que pour tout $t>0$, $x\mapsto u(t,x)$ soit 2π-périodique et de classe C^2.

1. Montrer que pour tout $n\in\mathbb{Z}$ il existe $u_n\colon [0,+\infty[\to\mathbb{C}$ de classe C^1 sur $]0,+\infty[$ telle que
$$u(t,x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} u_n(t)e^{inx} \qquad \forall t>0, x\in\mathbb{R}.$$

2. On suppose que $\partial_t u = \partial_x^2 u$. Exprimer u_n en fonction des coefficients de Fourier de la fonction continue $f\colon x\mapsto u(0,x)$.

3. Montrer que $u(x,t) = (f*H_t)(x)$, où H_t est le noyau de la chaleur sur $\mathbb{S}^1 = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ donné par
$$H_t(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-n^2t}e^{inx} \quad \forall (t,x)\in]0,+\infty\times\mathbb{R}.$$

Exercice 12. On définit les fonctions suivantes
$$s_n\colon x\mapsto\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin(nx), \quad c_n\colon x\mapsto\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos(nx), \quad c_0\colon x\mapsto\frac{1}{\sqrt{\pi}} \qquad \text{pour } n\geq 1.$$

1. Montrer que $(s_n)_{n\geq1}$ et $(c_n)_{n\geq0}$ sont des bases hilbertiennes de $L^2([0,\pi])$.

2. Soit $f \in C^0([0,\pi])$ et $u \in C^0([0,\pi]) \cap C^2(]0,\pi[)$ telle que $u'' = f$ dans $]0,\pi[$ et $u(0) = u(\pi) = 0$. Déterminer u en fonction des coefficients $\langle f, s_n \rangle$.

3. Soit $f \in C^0([0,\pi])$ et $u \in C^0([0,\pi]) \cap C^2(]0,\pi[)$ telle que $u'' = f$ dans $]0,\pi[$ et $u'(0) = u'(\pi) = 0$. Déterminer u en fonction des coefficients $\langle f, c_n \rangle$.

Exercice 13 (Espace de Schwartz)**.** Démontrer les assertions suivantes:

1. $x \mapsto e^{-|x|^2} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.
2. $C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \subsetneq \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subsetneq C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$.
3. Si $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ alors $fg \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.
4. Si $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ et P est une fonction polynomiale sur $\mathbb{R}^n$, alors $Pf \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.
5. Si $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, alors $f * g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Exercice 14. Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Calculer, en fonction de $\hat{f}$, les transformée de Fourier des fonctions

1. $x \mapsto f(\lambda x)$ pour $\lambda > 0$.
2. $x \mapsto f(Rx)$ pour $R \in O(n)$.
3. $x \mapsto f(x + \tau)$ pour $\tau \in \mathbb{R}^n$.
4. $\partial^\alpha f$ pour $\alpha \in \mathbb{N}^n$, si $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Exercice 15. Soit $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ une fonction radiale: il existe $f_0 \colon [0,\infty) \to \mathbb{C}$ telle que $f(x) = f_0(|x|)$.

1. Montrer que $\hat{f}$ est radiale: il existe $F_0 \colon [0,\infty[\to \mathbb{C}$ telle que $\hat{f}(\xi) = F_0(|\xi|)$. On pourra utiliser l'invariance de f par les rotations.
2. Exprimer F_0 en fonction de f_0.

Exercice 16. Soit $G \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie par $G(x) = e^{-|x|^2}$. Calculer $\hat{G}$. On pourra traiter d'abord le cas $n = 1$ en obtenant une relation entre $\hat{G}'$ et $\hat{G}$.

Exercice 17. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique définie positive. Calculer la transformée de Fourier de $x \mapsto e^{-x \cdot Ax}$. On pourra traiter d'abord le cas où A est diagonale.

Exercice 18. Soit $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ telle que $\xi \mapsto |\xi|^\lambda \hat{f}(\xi) \in L^2(\mathbb{R}^n)$ pour un certain $\lambda > n/2$. Montrer qu'il existe $C > 0$ tel que

$$|f(x+h) - f(x)| \le C \left(|h|^{\lambda - \frac{n}{2}} + |h| \right) \qquad \forall x, h \in \mathbb{R}^n.$$

On pourra exprimer $f(x+h) - f(x)$ comme une intégrale en fonction de $\hat{f}$ et distinguer les domaines d'intégration $|\xi| \le 1/|h|$ et $|\xi| > 1/|h|$.

Exercice 19 (Equation de la chaleur)**.** Soit $u \colon [0,+\infty[\times \mathbb{R}^n$ une fonction continue, de classe C^1 sur $]0,+\infty[\times \mathbb{R}^n$, et telle que pour tout $t \ge 0$, $u(t,\cdot) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. On suppose que $\partial_t u = \Delta_x u$ dans $]0,+\infty[\times \mathbb{R}^n$.

1. Soit $\hat{u}(t,\xi) = \int u(t,x) e^{-2i\pi x \cdot \xi} dx$ pour tous $(t,\xi) \in]0,+\infty[\times \mathbb{R}^n$. Calculer $\partial_t \hat{u}$ en fonction de $\hat{u}$, puis $\hat{u}$ en fonction de $\hat{f}$, où $f = u(0,\cdot)$.
2. Montrer que $u(t,x) = (f * \mathcal{H}_t^n)(x)$, où $\mathcal{H}_t^n$ est le noyau de la chaleur sur $\mathbb{R}^n$, donné par
$$\mathcal{H}_t^n(x) = \lambda(t) e^{-\frac{|x|^2}{2\sigma(t)}} \quad \forall (t,x) \in]0,+\infty[\times \mathbb{R}^n,$$
pour des fonctions $\lambda, \sigma > 0$ qu'on déterminera.
3. Montrer la formule de sommation de Poisson: pour toute $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, on a
$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \varphi(x+n) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{\varphi}(n) e^{2i\pi n x} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$
4. En déduire une expression du noyau de la chaleur H_t sur $\mathbb{S}^1$ en fonction de $\mathcal{H}_t^1$, et que H_t est à valeurs dans $[0,+\infty[$.