TD2 : Introduction aux intervalles de confiance

Exercice 1

Un professeur "sait", par expérience, que la note d'examen d'un étudiant est une variable aléatoire X d'espérance 75 à valeurs dans $[0, 100]$.

1. Donner une majoration de la probabilité pour qu'un étudiant ait une note d'examen supérieure à 85.
2. De plus, on suppose à présent que le professeur sait que la variance de la note d'examen est 75. Que peut-on dire de la probabilité pour qu'un étudiant obtienne une note comprise entre 65 et 85 ?
3. Un amphi contient n étudiants dont les notes sont des v.a.i.i.d. $X_1, \dots, X_n$ de même loi que X. Combien faut-il d'étudiants présents à l'examen pour assurer qu'avec une probabilité d'au moins 99%, la moyenne des notes soit comprise entre 70 et 80 (utiliser 2 méthodes différentes).

Exercice 2

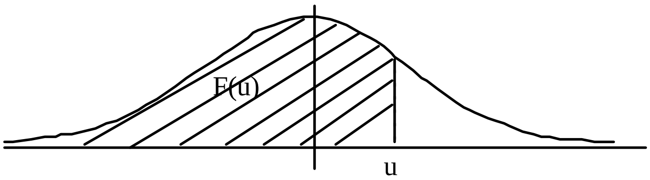
Soient $X_1, \dots, X_n$ des v.a.i.i.d. de loi $\mathcal{F}$ inconnue. Considérons une variable aléatoire $X \sim \mathcal{F}$, nous noterons respectivement $\mathbb{E}[X] = m \in \mathbb{R}$ et $\mathrm{Var}(X) = \sigma^2 > 0$. De plus, nous posons

$$\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \text{ et } S_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}_n\right)^2 .$$

Nous proposons d'estimer m et σ^2 par $\overline{X}_n$ et S_n^2, respectivement.

1. Calculer l'espérance et la variance de $\overline{X}_n$.
2. Quelle est la limite presque sure de $\overline{X}_n$?
3. Montrer que
$$S_n^2 = \left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - m)^2\right] - \left(\overline{X}_n - m\right)^2 .$$
4. En déduire l'espérance et la limite presque sure de S_n^2.
5. Proposer un estimateur sans biais de σ^2 construit à partir de S_n^2.
6. En justifiant votre réponse, donner la limite en loi de
$$Y_n = \sqrt{n}\frac{\overline{X}_n - m}{\sqrt{\sigma^2}} \text{ et } Z_n = \sqrt{n}\frac{\overline{X}_n - m}{\sqrt{S_n^2}} .$$
7. En déduire un intervalle de confiance asymptotique de m de niveau 5%.

Variable NORMALE CENTREE REDUITE



$U \approx N(0,1) \qquad P(U \approx u) = F(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{u} e^{-x^2/2} dx$

$F(-u) = 1 - F(u) \qquad P(|U| \leq u) = 2\,F(u) - 1$

TABLE de F(u) en fonction de u :

u	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998