

UV Des données aux modèles Partie - Problèmes inverses

Mercredi 15 juin 2011 - 14 :00 à 15 :15

Les documents et calculatrices sont autorisés. Le reste est interdit.

Le barème entre crochets est donné à titre indicatif.

Dans tout l'examen, le produit scalaire canonique sur \mathbb{R}^n est noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et la norme associée est notée $\| \cdot \|_2$.

Exercice 1 - SVD de matrices simples (5,5 pts)

Déterminez une SVD des matrices suivantes.

1. $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

2. $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

3. $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 2 - La norme de Frobenius (4,5 pts)

Soit $A = [a_1, a_2, \dots, a_n] \in \mathbb{R}^{m \times n}$ une matrice. On rappelle que le produit scalaire canonique sur l'espace des matrices est défini par :

$$\langle A, B \rangle = \text{trace}(A^T B) = \sum_{i,j} a_{i,j} b_{i,j}.$$

- Montrez que la norme de Frobenius définie par : $\|A\|_F = \sqrt{\langle A, A \rangle}$ définit bien une norme sur l'espace $\mathbb{R}^{m \times n}$.
- Soit $U \in \mathbb{R}^{m \times m}$ une matrice orthogonale. Montrez que la norme de Frobenius satisfait :

$$\|UA\|_F^2 = \|A\|_F^2,$$

c'est-à-dire qu'elle est invariante aux transformations unitaires.

- De même, montrez que si $V \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est une matrice orthogonale, alors $\|AV\|_F^2 = \|A\|_F^2$.
- Déduisez-en une expression de $\|A\|_F$ à partir des valeurs singulières de A .

Exercice 3 - Un opérateur de convolution (5 pts)

Sur l'espace de Hilbert $H = L^2([-\pi, \pi])$, on considère l'opérateur intégral T qui à tout $x \in H$ associe la fonction Tx définie par :

$$Tx(t) = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(t-s)x(s)ds, \quad t \in [-\pi, \pi].$$

- Vérifiez que $Tx \in L^2([-\pi, \pi])$.
- Vérifiez que $\|T\| \leq \pi$.
- Calculez l'adjoint T^* de T .

Exercice 4 - Moindres carrés généralisés (5,5 pts)

Soit $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$ et $W \in \mathbb{R}^{m \times m}$ une matrice définie positive. Sous cette condition, on rappelle que W peut être diagonalisée, c'est-à-dire mise sous la forme $W = PDP^{-1}$ où P est unitaire et D est une matrice diagonale à coefficients strictement positifs.

1. A partir de P et D , déterminez une matrice $W^{\frac{1}{2}}$, définie positive, telle que $(W^{\frac{1}{2}})^2 = W$. (Note : une telle matrice est appelée racine de W , comme pour les nombres réels).
2. On considère maintenant le problème de moindres carrés généralisé suivant :

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \langle (Ax - b), W(Ax - b) \rangle. \quad (1)$$

Montrez que ce problème est équivalent à :

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \frac{1}{2} \|W^{\frac{1}{2}}(Ax - b)\|_2^2.$$

3. Ecrivez les équations normales associées à ce problème (les conditions satisfaites par la solution).
4. On note x_W la solution du problème (1) et x la solution du problème de moindres carrés usuel. Montrez que si $b \in \text{Im}(A)$, alors $x_W = x$.