Une caractérisation des lois de Wishart en dimension finie ou infinie

Gabriel Fraisse[†] et Sylvie Viguier-Pla[‡]
[†] *Université de Perpignan, IUT, Domaine d'Auriac, Carcassonne*
[‡] *Laboratoire de Statistique et Probabilités, Université Paul Sabatier, Toulouse*
courriel : gabriel.fraisse@laposte.net, viguier@cict.fr

Résumé

Soient H un espace de Hilbert de dimension finie et Z une variable aléatoire (v.a.) gaussienne centrée à valeurs dans H. Considérons de même $Z^{(1)}, \ldots, Z^{(n)}$ un échantillon de v.a. indépendantes identiquement distribuées de même loi que Z. Alors $\sum_{j=1,\ldots,n} Z^{(j)} \otimes Z^{(j)}$ suit une loi de Wishart à n degrés de liberté. L'objet de cette note est de proposer une caractérisation des v.a. (pouvant être appelées opérateurs aléatoires) de loi de Wishart dans le cas où H est de dimension quelconque, finie ou pas, réel ou complexe, le cas réel n'étant pas un cas particulier simple du cas complexe.

Abstract

A finite or infinite dimensional Wishart distribution characterization. Let H be a finite dimensional Hilbert space and Z be a centered gaussian random variable (r.v.) with values in H. In a same way, let consider an $n-$sample $Z^{(1)}, \ldots, Z^{(n)}$ of independent identically distributed r.v.'s of same distribution as Z. Then $\sum_{j=1,\ldots,n} Z^{(j)} \otimes Z^{(j)}$ has a Wishart distribution with n degrees of freedom. The aim of this note is to propose a characterization of r.v.'s (that can be named random operators) of Wishart distribution when H is of any dimension, finite or not, real or complex. The real case is not a particular case of the complex case.

1 Introduction

La dimension infinie, pour les espaces des valeurs de variables aléatoires (v.a.) est le prolongement naturel de la dimension finie. Dans beaucoup de domaines utilisant les probabilités et la statistique en grande dimension (physique quantique, statistique fonctionnelle, ...), les développements théoriques passent souvent par la considération du cas infini.

Parallèlement, la loi de Wishart, obtenue naturellement comme la loi des formes quadratiques sous hypothèse de normalité, est un outil souvent rencontré, la normalité n'étant pas toujours une hypothèse de départ, mais une conséquence de propriétés asymptotiques telles le théorème central limite.

Nous allons dans un premier temps rappeler la définition classique des lois de Wishart. Nous donnerons ensuite une caractérisation des opérateurs aléatoires de lois de Wishart dans les cas réel et complexe, fini et infini, ceci pour toute valeur de degré de liberté.

Signalons quelques publications abordant les lois de Wishart : Graczyk, Letac and Massam [2] pour le cas fini, Fine [1] et Soler [3] pour le cas infini réel.

2 Le cadre de l'étude

2.1 Hypothèses et notations

• Soit H un espace de Hilbert sur Λ (Λ égal à $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) séparable, de base orthonormale (e_j). On introduit un réel α égal à 1 si $\Lambda = \mathbb{R}$ et à 2 si $\Lambda = \mathbb{C}$.

• Pour tout k de $\mathbb{N}^*$, H_k désigne le sous-espace vectoriel de H engendré par les k premiers vecteurs de la base orthonormale (e_j).
• Soit $Z = \sum_j Z_j e_j$ une v.a. définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ à valeurs dans H muni de la tribu de ses boréliens.
• On note $\langle ., . \rangle$ le produit scalaire sur H, et on définit sur $H \times H$ le produit tensoriel $\otimes$ comme suit : pour tout couple (t, u) de $H \times H$, $t \otimes u$ est l'application : $v \in H \mapsto \langle v, t \rangle u$.
• La forme linéaire adjointe d'un vecteur u est notée u^* ; de même, l'opérateur (endomorphisme) adjoint d'un opérateur continu A est noté A^*.
• I désigne l'opérateur identité de H ; l'image par un opérateur continu A d'un vecteur u est notée Au ; l'opérateur $A \circ B$ composé de deux opérateurs continus A et B est noté AB.
• P_k désigne le projecteur orthogonal de H sur H_k (P_k est tel que $P_k^* = P_k$ et $P_k^2 = P_k$).
• Pour tout opérateur continu A de H, on note $\|A\|$ la norme usuelle de A, $\|A\|_1$ la norme-trace de A (éventuellement infinie) et $\|A\|_2$ la norme de Hilbert-Schmidt de A (éventuellement infinie). On sait que $\|A\| \leq \|A\|_2 \leq \|A\|_1$.
• Pour tout opérateur continu A de H, on pose $A_k = P_k A\, P_k$. Pour tout opérateur aléatoire continu M de H, on pose $M_k = P_k M\, P_k$.

2.2 Les opérateurs nucléaires

Rappelons quelques éléments de la théorie de Fredholm.
Rappel 1 : si N est un opérateur nucléaire (c'est-à-dire à norme-trace finie) de H, alors, pour tout opérateur continu A de H, les opérateurs AN et NA sont nucléaires, de plus, $\|AN\|_1 \leq \|A\|.\|N\|_1$ et $\|NA\|_1 \leq \|A\|.\|N\|_1$.
Rappel 2 : pour tout opérateur nucléaire N de H, on définit le déterminant de Fredholm de N. Il associe à tout scalaire z un scalaire noté $\det(I + z\,N)$. En dimension finie, il se confond avec le déterminant classique de $(I + z\,N)$; en dimension infinie, il le prolonge continûment, au sens de la norme-trace.

3 Les v.a. gaussiennes

Définition 1. Une v.a. scalaire complexe est dite gaussienne si sa partie réelle et sa partie imaginaire sont deux v.a. scalaires réelles gaussiennes, indépendantes et de même variance (éventuellement nulle).

Définition 2. La v.a. Z est dite gaussienne si, pour tout vecteur a de H, la v.a. scalaire $\langle Z, a \rangle$ est gaussienne (éventuellement constante).

Par la suite, on supposera Z gaussienne centrée et l'on désignera par Σ l'opérateur $E(Z \otimes Z)$ des variances-covariances de Z. Il est à noter que Σ est auto-adjoint semi-défini positif.

Proposition 1. On a : $E(\|Z\|^2) < +\infty$, $E(\|Z\|^2) = \|\Sigma\|_1$ et $V(\|Z\|^2) = \dfrac{2}{\alpha}(\|\Sigma\|_2)^2$.

Démonstration.
a) Montrons que $E(\|Z\|^2) < +\infty$

La démonstration est donnée dans le cas réel. Dans le cas complexe, si $Z = X + i\,Y$ avec X et Y réelles, alors $E(\|Z\|^2) = E(\|X\|^2) + E(\|Y\|^2) = 2E(\|X\|^2)$.
a.1) Cas où Σ est diagonal sur la base orthonormale (e_j)

Alors les Z_j sont indépendantes. Soit λ_j la variance de Z_j ($j \in \mathbb{N}^*$).
• Montrons que la suite (λ_j) a pour limite 0.

S'il n'en était pas ainsi, il existerait une sous-suite (U_j) de (Z_j) à variances supérieures à un certain réel $\varepsilon > 0$; la série $\frac{1}{\varepsilon} \sum_j U_j^2$ serait minorée par une série de v.a. scalaires indépendantes obéissant à la loi $\chi^2(1)$; or une telle série diverge.
• Montrons que la série $\sum_j \lambda_j$ converge.

Puisque la suite (λ_j) a pour limite 0, ses termes supérieurs ou égaux à $1/2$ sont en nombre fini. On peut les négliger et considérer que tous les λ_j sont inférieurs à $1/2$. La v.a. scalaire Z_j^2 est le produit par λ_j d'une v.a. obéissant à la loi $\chi^2(1)$. On a : $E(Z_j^2) = \lambda_j$ et $V(Z_j^2) = 2\lambda_j^2 \leq \lambda_j$.

Soit $S_k = \sum_{j=1}^k Z_j^2$. On a : $E(S_k) = \sum_{j=1}^k \lambda_j$ et $V(S_k) = 2\sum_{j=1}^k \lambda_j^2 \leq E(S_k)$.

Si la suite $(E(S_k))$ divergeait, alors, pour k assez grand, on aurait $\sqrt{E(S_k)} < \frac{E(S_k)}{4}$ et, d'après l'inégalité de Bienaymé-Tchébychev, $P(S_k > \frac{E(S_k)}{2}) > 3/4$. La suite (S_k) divergerait.

a.2) Cas général

On applique à la suite gaussienne (Z_i) le procédé d'orthogonalisation de Schmidt relativement à la covariance. On obtient ainsi une unique suite gaussienne double $(Z_{i,j})$, $j \leq i$, telle que :

$Z_i = \sum_{j=1}^{i} Z_{i,j}$; $|\text{cov}(Z_{i,j}, Z_{k,j})| = 1$; $|\text{cov}(Z_{i,j}, Z_{i,k})| = 0$ si $j \neq k$.

On a : $\|Z\|^2 = \sum_{i,j} Z_{i,j}^2 + 2\sum_{j<k\leq i} Z_{i,j}Z_{i,k}$.

Puisqu'il n'y a aucune raison de préférer un signe à un autre, l'événement $[\sum_{j<k\leq i} Z_{i,j}Z_{i,k} > 0]$ a pour probabilité 0.5. Les signes des $Z_{i,j}$ étant indépendants des valeurs absolues des $Z_{i,j}$, pour tout réel m les événements $[\sum_{i,j} Z_{i,j}^2 > m]$ et $[\sum_{j<k\leq i} Z_{i,j}Z_{i,k} > 0]$ sont indépendants. On déduit $[\sum_{i,j} Z_{i,j}^2 < +\infty]$, presque partout.

La v.a. $Z_{i,j}$ est du type $\lambda_{i,j}T_j$ avec T_j v.a. scalaire normale centrée réduite.

$\sum_{i=j}^{+\infty} Z_{i,j}^2 = (\sum_{i=j}^{+\infty}(\lambda_{i,j})^2)T_j^2$. D'où $\sum_{i=j}^{+\infty}(\lambda_{i,j})^2 < +\infty$. Notons λ'_j le réel $\sqrt{\sum_{i=j}^{+\infty} \lambda_{i,j}^2}$.

On pose $Z'_j = \lambda'_j T_j$ et on applique le cas particulier *a.1)* à la variable $Z' = \sum_j Z'_j e_j$.

b. Montrons que $E(\|Z\|^2) = \|\Sigma\|_1$ *et* $V(\|Z\|^2) = \frac{2}{\alpha}(\|\Sigma\|_2)^2$

Puisque Σ est auto-adjoint semi-défini positif, sa norme-trace est sa trace, c'est-à-dire $E(\|Z\|^2)$. Σ est donc nucléaire.

Puisque Σ est nucléaire auto-adjoint, il est diagonalisable sur une base orthonormale ; on peut considérer que cette base orthonormale est (e_j).

Pour tout j, soit $\lambda_j = V(Z_j)$.

$|Z_j|^2 = \frac{\lambda_j}{\alpha}K_j$ avec $\mathcal{L}(K_j) = \chi^2(\alpha)$ et K_k est indépendante de K_j pour $k \neq j$.

$V(\|Z\|^2) = V(\sum_j |Z_j|^2) = \sum_j V(|Z_j|^2) = \sum_j V(\frac{\lambda_j}{\alpha}K_j) = \frac{2}{\alpha}\sum_j \lambda_j^2 = \frac{2}{\alpha}(\|\Sigma\|_2)^2$. □

Remarque. On sait que tout opérateur de H nucléaire auto-adjoint semi-défini positif définit sur H une unique loi gaussienne centrée.

4 Une décomposition spectrale des opérateurs auto-adjoints de H lorsque H est de dimension finie

On suppose que H est de dimension finie.

Lemme 1. Hypothèses :
- A est un opérateur de H auto-adjoint ;
- F est un opérateur de H auto-adjoint semi-défini positif ;

Conclusion : il existe un couple (U, D) d'opérateurs de H possédant les propriétés suivantes :
- U est bijectif ;
- D est diagonal réel sur la base (e_j) ;
- U^*FU est diagonal sur la base (e_j), à valeurs propres égales à 0 ou 1 ;
- $A = U^*DU$.

Démonstration.

Soit $F' = F + Q$ avec Q projecteur orthogonal de H sur le noyau de F. F' étant auto-adjoint défini positif, il est du type $F' = T\,d^2T^*$, avec $TT^* = I$ et d opérateur diagonal sur la base (e_j), à valeurs propres réelles strictement positives.

Posons $B = d\,T^*ATd$. Nous déduisons l'égalité $A = Td^{-1}Bd^{-1}T^*$.

B étant auto-adjoint, il est du type $B = VDV^*$ avec D diagonal réel sur la base (e_j) et $V^*V = I$.

Posons $U = Td^{-1}V$. Nous avons $A = UDU^*$ et $U^*F'U = I$.

$U^*FU = I - U^*QU$. C'est un opérateur diagonal sur la base (e_j), à valeurs propres égales à 0 ou 1. □

5 Les lois de probabilité de Wishart

5.1 Définition

Puisque pour tout z de H, $\|z \otimes z\|_1 = \|z\|^2$, l'application $[z \mapsto z \otimes z]$ de H dans l'espace vectoriel normé $\sigma_1(H)$ des opérateurs nucléaires de H est continue (pour $\| \ \|_1$, donc aussi pour $\| \ \|_2$ et pour $\| \ \|$). L'application $[\mathcal{F} \mapsto P(Z \otimes Z \in \mathcal{F})]$ de la tribu des boréliens de $\sigma_1(H)$ dans [0, 1] définit donc une probabilité. On dira que $Z \otimes Z$ est un opérateur nucléaire aléatoire de H.

Soient $Z^{(1)}, \ldots, Z^{(n)}$ n v.a. indépendantes et identiquement distribuées de même loi que Z.

Définition 3. La loi de probabilité de $\sum_{j=1}^{n} Z^{(j)} \otimes Z^{(j)}$ est la loi de Wishart de paramètres n et Σ ; n est le degré de liberté de la loi.

Par la suite, on désignera par $W^{(j)}$ le produit $Z^{(j)} \otimes Z^{(j)}$, $1 \leq j \leq n$, et par W la somme $\sum_{j=1}^{n} W^{(j)}$.

On écrira $\mathcal{L}(W^{(j)}) = \text{Wishart}(1, \Sigma)$ et $\mathcal{L}(W) = \text{Wishart}(n, \Sigma)$.

Remarques.
• Soit O l'opérateur de H identiquement nul. Pour tout $n' \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{L}(O) = \text{Wishart}(n', O)$.
• Tout couple (n', Σ') avec $n' \in \mathbb{N}^*$ et Σ' opérateur de H nucléaire auto-adjoint semi-défini positif autre que O définit une unique loi de Wishart.
• Pour tout opérateur continu A de H, $\mathcal{L}(A^* W A) = \text{Wishart}(n, A^* \Sigma A)$.

5.2 Norme-trace

Si W est un opérateur nucléaire aléatoire de loi de Wishart comme défini précédemment, alors $\|W\|_1 = \sum_{j=1}^{n} \|Z^{(j)}\|^2$; $\mathrm{E}(\|W\|_1) = n\|\Sigma\|_1$; $\mathrm{V}(\|W\|_1) = \frac{2n}{\alpha}(\|\Sigma\|_2)^2$.

5.3 Forme quadratique associée

Les v.a. scalaires du type $\langle W a, a\rangle$, $a \in H$, vérifient les propriétés suivantes :

Propriétés.
1. $(\langle \Sigma\, a, a\rangle = 0) \Rightarrow (\langle W\, a, a\rangle = 0)$.
2. $(\langle \Sigma\, a, a\rangle > 0) \Rightarrow (\mathcal{L}(\alpha \frac{\langle W\, a, a\rangle}{\langle \Sigma\, a, a\rangle}) = \chi^2(\alpha\, n))$ (loi du khi-deux à $\alpha\, n$ degrés de liberté).
3. Pour toute famille $\Sigma-$orthogonale (a_j) de vecteurs de H (c'est-à-dire telle que $\langle \Sigma\, a_j, a_k\rangle = 0$ pour $j \neq k$), les v.a. scalaires de la famille $(\langle W\, a_j, a_j\rangle)$ sont indépendantes.

Ces propriétés découlent directement de celles des vecteurs gaussiens. Nous verrons dans le paragraphe suivant qu'elles caractérisent les lois de Wishart.

5.4 Caractérisation par la forme quadratique associée

Proposition 2. Si un opérateur nucléaire aléatoire M de H auto-adjoint, d'espérance mathématique F, possède les propriétés suivantes :
• F est semi-défini positif (et forcément auto-adjoint) ;
• pour tout a de H, $(\langle F\, a, a\rangle = 0) \Rightarrow (\langle M\, a, a\rangle = 0)$;
• il existe n dans $\mathbb{N}^*$ tel que, pour tout a de H, $(\langle F\, a, a\rangle > 0) \Rightarrow (\mathcal{L}(\alpha\, n \frac{\langle M\, a, a\rangle}{\langle F\, a, a\rangle}) = \chi^2(\alpha\, n))$;
• pour toute famille $F-$orthogonale (a_j) de vecteurs de H, les v.a. scalaires de la famille $\langle M\, a_j, a_j\rangle$ sont indépendantes ;
alors F est nucléaire et $\mathcal{L}(M) = \text{Wishart}(n, \frac{1}{n}F)$.

Avant de démontrer cette proposition, énonçons les lemmes suivants.

On suppose que H est de dimension finie. On décompose A comme dans le lemme 1, avec F espérance mathématique de M. Alors,

Lemme 2. $\text{trace}(AM) = \text{trace}(UDU^*M) = \text{trace}(DU^*MU)$ avec U^*FU diagonal sur la base (e_j).

Les propriétés énoncées en proposition 2 déterminant cette trace, elles déterminent la fonction caractéristique de M donc aussi sa loi de probabilité. Ceci établit la proposition 2 en dimension finie.

Lemme 3. Si H est de dimension finie, alors $(\|F\|_1)^2 \geq 3(\|F\|_2)^2 - 2\|F\|^2$.

Démonstration. Soit r la dimension de H et soit (λ_j), $1 \leq j \leq r$, $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots \leq \lambda_r$, la famille des valeurs propres de F. On a la chaîne d'inégalités et d'égalités suivante :

$$(\|F\|_1)^2 = \sum_{j=1}^{r} \lambda_j^2 + 2\sum_{1\leq j<k\leq r} \lambda_j\lambda_k = (\|F\|_2)^2 + 2\sum_{1\leq j<k\leq r} \lambda_j\lambda_k \geq (\|F\|_2)^2 + 2\sum_{j=1}^{r-1} \lambda_j^2$$
$$= (\|F\|_2)^2 + 2(\|F\|_2)^2 - 2\lambda_r^2 = 3(\|F\|_2)^2 - 2\|F\|^2. \ \square$$

Démonstration de la proposition 2 en dimension infinie.

Montrons que F est continu

Supposons H de dimension infinie. Montrons que la suite croissante $(\|F_k\|)$ est majorée. Soit a un vecteur propre unitaire de F_k associé à la valeur propre $\|F_k\|$ (supposée non nulle). Soit p la probabilité qu'une v.a. scalaire de loi $\chi^2(\alpha\, n)$ dépasse la valeur αn. On a :

$P(\langle M_k a, a\rangle > \|F_k\|) = p$ et, puisque $\|M\|_1 \geq \|M_k\|_1 \geq \|M_k\| \geq \langle Ma, a\rangle$, alors $P(\|M\|_1 \geq \|F_k\|) \geq p$.

Il en résulte que $(\|F_k\|)$ est majorée et que F est continu.

Montrons que F est nucléaire

Supposons H de dimension infinie et la suite croissante $(\|F_k\|_1)$ non majorée.

Soit $\sigma_k = \sqrt{V(\|M_k\|_1)}$. On sait (cf. paragraphe 5.2) que $V(\|M_k\|_1) = \frac{2}{\alpha n}(\|F_k\|_2)^2$.

Cherchons un réel β supérieur à 1 tel que, pour k assez grand, $\beta\sigma_k < \|F_k\|_1$. Selon le lemme 3, $(\|F_k\|_1)^2 \geq 3(\|F_k\|_2)^2 - 2\|F_k\|^2 \geq 3(\|F_k\|_2)^2 - 2\|F\|^2$, ou encore $(\|F_k\|_2)^2 \leq \frac{1}{3}(\|F_k\|_1)^2 + \frac{2}{3}\|F\|^2$; on déduit $\sigma_k^2 \leq \frac{2}{3\alpha n}(\|F_k\|_1)^2 + \frac{4}{3\alpha n}\|F\|^2$.

Ainsi, tout réel β de $]1; \sqrt{\frac{3\alpha n}{2}}[$ convient.

D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchébychev, $P(\|M_k\|_1 > \|F_k\|_1 - \beta\sigma_k) > 1 - \frac{1}{\beta^2}$.

Puisque $\|M\|_1 \geq \|M_k\|_1$, on a $P(\|M\|_1 > \|F_k\|_1 - \beta\sigma_k) > 1 - \frac{1}{\beta^2}$.

Or, $\lim_{k\to+\infty}(\|F_k\|_1 - \beta\sigma_k) = +\infty$. Ceci contredit l'hypothèse $\|M\|_1 < +\infty$. On déduit que la suite $(\|F_k\|_1)$ est majorée et que F est nucléaire.

Fin de la démonstration de la proposition 2 en dimension infinie

La suite (M_k) convergeant presque sûrement vers M, la loi de probabilité de M est déterminée. □

Remarque. Si $\langle F\,a, a\rangle > 0$, alors de l'égalité $V(\alpha\, n\frac{\langle M\,a,a\rangle}{\langle F\,a,a\rangle}) = 2\alpha\, n$ on déduit l'égalité $n = \frac{2\langle F\,a,a\rangle^2}{\alpha\, V(\langle M\,a,a\rangle)}$.

Notons que l'hypothèse d'indépendance est indispensable. On peut citer en contre-exemple le cas où $M = K\,I$, avec $\mathcal{L}(\alpha\, K) = \chi^2(\alpha)$ et H de dimension finie au moins égale à 2.

5.5 Fonction caractéristique

Proposition 3. Pour tout opérateur A de H auto-adjoint, continu :
$E(\exp(i\,\mathrm{trace}(A\,W))) = [\det(I - \dfrac{2}{\alpha} i\,A\,\Sigma)]^{-\alpha\,n/2}$, avec $[\det(I - \frac{2}{\alpha} i\,A\,\Sigma)]^{-\alpha\,n/2} \in \mathbb{R}_+^*$ pour $\|A\|.\|\Sigma\| < \frac{\alpha}{2}$.

Démonstration.

Soit A un opérateur de H continu, auto-adjoint.

a) Démonstration de la proposition 3 en dimension finie

On suppose H de dimension finie r.

a.1) Cas où $\mathcal{L}(W) = \mathrm{Wishart}(1, \Sigma)$

Dans le lemme 2, on choisit $M = W$. On a l'égalité : $\mathrm{trace}(iAW) = \mathrm{trace}(iUDU^*W) = \mathrm{trace}(iDU^*WU)$ avec $U^*\Sigma U$ diagonal sur la base (e_j).

En posant $u_j = Ue_j$ et $De_j = d_j e_j$, on a $\mathrm{trace}(iAW) = \sum_j i d_j u_j^* W u_j$ et l'indépendance entraîne $E(\exp(\mathrm{trace}(iAW))) = \prod_j E(\exp(i d_j u_j^* W u_j))$.

Si $u_j^*\Sigma u_j = 0$, alors $u_j^* W u_j = 0$; sa fonction caractéristique est égale à 1.

Supposons à présent que $u_j^*\Sigma u_j > 0$.

La fonction caractéristique de $\chi^2(\alpha)$ est $[t \mapsto (1 - 2it)^{-\alpha/2}]$, avec $(1-2t)^{-\alpha/2} \in \mathbb{R}_+^*$ pour $t < \frac{1}{2}$.

Puisque $\mathcal{L}(\alpha\frac{u_j^* W u_j}{u_j^*\Sigma u_j}) = \chi^2(\alpha)$, la fonction caractéristique de $u_j^* W u_j$ est $[t \mapsto (1 - \frac{2i}{\alpha} t u_j^*\Sigma u_j)^{-\alpha/2}]$,

d'où $E(\exp(\mathrm{trace}(iAW))) = (\prod_j (1 - \frac{2i}{\alpha} d_j u_j^*\Sigma u_j))^{-\alpha/2} = [(\det(I - \frac{2i}{\alpha} DU^*\Sigma U)]^{-\alpha/2}$.

Par ailleurs, $\det(I - \frac{2i}{\alpha}A\Sigma) = \det(UU^{-1} - \frac{2i}{\alpha}UDU^*\Sigma UU^{-1}) = \det(U(I - \frac{2i}{\alpha}DU^*\Sigma U)U^{-1}) = \det(I - \frac{2i}{\alpha}DU^*\Sigma U)$.

a.2) Cas général : $\mathcal{L}(W) = \mathrm{Wishart}(n, \Sigma)$

$W = \sum_{j=1}^n W^{(j)}$ avec $\mathcal{L}(W^{(j)}) = \mathrm{Wishart}(1, \Sigma)$ et $W^{(1)}, \ldots, W^{(n)}$ indépendants.

La fonction caractéristique de W est donc la nième puissance de celle des $W^{(j)}$.

b) Démonstration de la proposition 3 en dimension infinie

Puisque la suite $(A_k W_k)$ converge presque sûrement vers AW,

$E(\exp(i\mathrm{trace}(AW))) = \lim_{k\to+\infty} E(\exp(i\mathrm{trace}(A_k W_k)))$, d'où le résultat (le déterminant classique n'est plus défini, il s'agit du déterminant de Fredholm). □

Dans le lemme suivant, nous présentons un calcul de $(\det(I - zA\Sigma))^{-1}$ avec z complexe tel que $|z|\|A\|.\|\Sigma\| < 1$.

Lemme 4. $\det(I - zA\Sigma))^{-1} = \exp(\sum_{j\geq 1} \frac{z^j}{j}\mathrm{trace}((A\Sigma)^j))$.

Démonstration.

a) Cas où H est de dimension finie

Dans le lemme 1, on choisit $F = \Sigma$. L'égalité $A\Sigma U = UDU^*\Sigma U$ prouve que l'opérateur $A\Sigma$ est diagonal sur la base (Ue_j). Par le développement en série de Taylor (réel étendu aux complexes) de $-\ln(1-x)$ au voisinage de 0, on obtient l'égalité à démontrer.

b) Cas où H est de dimension infinie

Pour tout k de $\mathbb{N}^*$ on a : $\det(I - zA_k\Sigma_k))^{-1} = \exp(\sum_{j\geq 1} \frac{z^j}{j} \mathrm{trace}((A_k\Sigma_k)^j))$.
L'égalité annoncée est obtenue par continuité (au sens de la norme-trace) quand k tend vers $+\infty$. $\square$

Corollaire 1. Pour tout opérateur A de H auto-adjoint, continu, tel que $\|A\|.\|\Sigma\| < \frac{\alpha}{2}$:
$E(\exp(i\,\mathrm{trace}(A\,W))) = \exp(\frac{\alpha\, n}{2}(\sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{j}(\frac{2i}{\alpha})^j \mathrm{trace}((A\,\Sigma)^j)))$.

5.6 Sous-opérateurs

Soit W' un opérateur nucléaire aléatoire de H auto-adjoint, n' un entier strictement positif et Σ' un opérateur nucléaire de H auto-adjoint semi-défini positif.

Proposition 4. $\mathcal{L}(W') = \mathrm{Wishart}(n', \Sigma')$ si et seulement si, pour toute projection orthogonale Q de H de rang fini, $\mathcal{L}(Q\,W'Q) = \mathrm{Wishart}(n', Q\,\Sigma'Q)$.

Démonstration.

Si les lois des W'_k sont déterminées (choisir $Q = P_k$), alors, puisque la suite (W'_k) converge presque sûrement vers W', la loi de W' est elle aussi déterminée. $\square$

Corollaire 2. $\mathcal{L}(W') = \mathrm{Wishart}(n', \Sigma')$ si et seulement si, pour tout opérateur A de H de rang fini, auto-adjoint, tel que $\|A\|.\|\Sigma'\| < \frac{\alpha}{2}$: $E(\exp(i\,\mathrm{trace}(A\,W'))) = \exp(\frac{\alpha\, n'}{2}(\sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{j}(\frac{2i}{\alpha})^j \mathrm{trace}((A\,\Sigma')^j)))$.

Démonstration.

Soit Q une projection orthogonale de H de rang fini. Soit B un opérateur de H continu, auto-adjoint.
$\mathrm{trace}(BQW'Q) = \mathrm{trace}(QBQW')$ avec QBQ opérateur de H auto-adjoint, de rang fini. $\square$

6 Conclusion

Nous avons placé notre étude dans un cadre hilbertien, cadre qui se rencontre le plus souvent en statistique. Cependant, on peut s'interroger sur la possibilité de prolongement dans des espaces plus généraux.

Une première généralisation peut consister à remplacer l'espace de Hilbert séparable par un espace de Banach muni d'une base topologique.

Une autre généralisation peut consister à remplacer l'espace de Hilbert séparable H, isormorphe à l'espace des suites de scalaires de carrés sommables, par l'espace $\Lambda^{\mathbb{N}}$ des suites de scalaires. Il n'y a plus de norme sur cet espace. Il n'y a plus de tribu des boréliens. Les vecteurs aléatoires, les opérateurs aléatoires ne sont plus des variables aléatoires. On peut cependant introduire les notions de processus gaussiens (simples, à un indice) et de processus de Wishart (doubles, à deux indices). Par définition, un processus gaussien est un vecteur aléatoire dont tout sous-vecteur fini est gaussien. Les processus de Wishart se déduisent des processus gaussiens. Un processus double est de Wishart si, et seulement si, ses sous-processus carrés finis sont de Wishart. Les propriétés énoncées au paragraphe 5.3, avec a et b vecteurs finis, caractérisent les processus de Wishart. L'ensemble des indices, $\mathbb{N}$, peut tout aussi bien être $\mathbb{R}$.

Références

[1] Fine, J. (1981) *Analyse en composantes principales réduites à l'aide de la théorie des perturbations et de représentations matricielles.* Thèse de $3^{ème}$ cycle, Université Paul Sabatier, Toulouse

[2] Graczyk, P., Letac, G., Massam, H. (2003) The complex Wishart distribution and the symmetric group. *Annals of Statistics* **31** 287-309

[3] Soler J.-L. (1975) La loi de probabilité de Wishart associée à un élément aléatoire gaussien décentré à valeurs dans un espace de Fréchet séparable. Application aux fonctions aléatoires gaussiennes. *C.R. Acad. Sc. Paris, Série A* **281** 12 A471-A474