Sur la proximité entre l'A.C.P. dans le domaine des fréquences et l'A.C.P. classique

Alain Boudou et Sylvie Viguier-Pla

Laboratoire de Statistique et Probabilités, Université Paul Sabatier, 31062 Toulouse Cedex 4

courriel : boudou@cict.fr, viguier@cict.fr

Résumé. Lorsqu'on effectue une Analyse en Composantes Principales dans le domaine des fréquences d'une série $p-$dimensionnelle stationnaire $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, la série résumé s'écrit sous la forme d'une combinaison linéaire $X'_n = \sum_m C_m \circ X_{n-m}$. Nous constatons que lorsque les coefficients C_m, $m \neq 0$, sont voisins de 0, l'Analyse dans le domaine des fréquences est voisine de l'Analyse en Composantes Principales classique. Le cas limite où les deux Analyses sont équivalentes constitue une propriété $\mathcal{P}$, dont nous allons étudier les conséquences. Enfin, nous étudions la proximité entre les deux approches.

Mots-clés : analyse en composantes principales, série chronologique, stationnarité, mesure aléatoire, analyse spectrale, applications

Abstract. When performing a Principal Components Analysis in the frequency domain of a $p-$dimensional stationnary time series $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, the summarizing time series can be written as a linear combination $X'_n = \sum_m C_m \circ X_{n-m}$. We note that when the coefficients C_m, $m \neq 0$, are close to 0, the Analysis in the frequency domain is close to the traditional Principal Components Analysis. The limit case where the two Analyses are equivalent constitutes a propriety $\mathcal{P}$, of which we will study the consequences. Lastly, we study the proximity between the two approaches.

Key-words : Principal Components Analysis, time series, stationnarity, random measure, spectral analysis, applications

Classification AMS : 62H12; 62H25; 62M15; 62P12

1. Introduction

L'Analyse en Composantes Principales (A.C.P.) d'une série p-dimensionnelle stationnaire $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ dans le domaine des fréquences peut se présenter comme la recherche d'une série q-dimensionnelle stationnaire $(X'_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ $(q < p)$, stationnairement corrélée avec $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, la résumant le mieux possible (Boudou et Dauxois [1], Brillinger [3]). Sous certaines hypothèses couramment faites, la série optimale $(X'_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ se présente sous la forme d'une moyenne mobile. C'est-à-dire que pour tout n de $\mathbb{Z}$: $X'_n = \sum_m C_m \circ X_{n-m}$, l'ensemble $\{C_m\,;\, m \in \mathbb{Z}\}$ étant une famille d'opérateurs de $\mathbb{C}^p$ dans $\mathbb{C}^q$.

Lorsque les coefficients $\ldots, C_{-3}, C_{-2}, C_{-1}, C_0, C_1, C_2, C_3, \ldots$ sont nuls, on retrouve l'A.C.P. classique des différents vecteurs aléatoires X_n. C'est ce cas de figure que nous étudions au paragraphe 3, après avoir, au paragraphe 2, examiné et rappelé succinctement la définition de l'A.C.P. dans le domaine des fréquences.

Dans la pratique, il est fréquent que ces coefficients C_m, lorsque $m \neq 0$, soient, sans pour autant être nuls, faibles, c'est ce que nous avons constaté en traitant des données appartenant au domaine de la météorologie.

C'est ce type de situation, voisin du cas de figure précédent, que nous étudions au paragraphe 4.

D'une façon plus précise, on établit un ensemble d'inégalités qui, bien que toujours vérifiées, trouvent un sens lorsque $\sum_{n\in\mathbb{Z}^*} \|C_n\|^2$ est faible. Pour cela, nous nous plaçons dans le cas où la fonction d'autocovariance est absolument sommable.

2. Définition de l'A.C.P. dans le domaine des fréquences

L'objet de ce paragraphe est de développer succinctement les outils mathématiques nécessaires à la compréhension de ce texte et de préciser les notations adoptées.

Par $HS(p,q)$ nous désignerons l'ensemble des applications linéaires de $\mathbb{C}^p$ dans $\mathbb{C}^q$ que l'on munira du produit scalaire $< K; L >= tr(K \circ L^*)$, conférant ainsi à $HS(p,q)$ une structure d'espace de Hilbert.

Une mesure aléatoire p-dimensionnelle (p-m.a.) Z est une mesure vectorielle définie sur $\mathcal{B}$, tribu de Borel de $\Pi = [-\pi,\pi[$, à valeurs dans $L^2_{\mathbb{C}^p}(\Omega,\mathcal{A},P)$ telle que $\mathbb{E}(Z(A) \otimes Z(B)) = 0$ pour tout couple d'éléments disjoints (A,B) de $\mathcal{B}$.

On montre alors que l'application $M_Z \,:\, A \in \mathcal{B} \mapsto \mathbb{E}(Z(A) \otimes Z(A)) \in HS(p,p)$ est une mesure vectorielle. Lorsque une mesure η, σ-finie, domine M_Z, on peut affirmer qu'il existe une application mesurable M' de Π dans $HS(p,p)$, appelée dérivée de M_Z par rapport à η, de norme η-intégrable telle que $M_Z(A) = \int 1_A M' \, d\eta$ pour tout A de $\mathcal{B}$. Notons que $t_Z \,:\, A \in \mathcal{B} \mapsto \mathrm{tr} M_Z(A) \in \mathbb{R}^+$ est une telle mesure.

L'espace $(p,q) - L^2(M_Z)$ "des fonctions de carré M_z-intégrable" peut se définir comme un espace quotient d'un sous-espace de l'espace vectoriel $(HS(p,q))^\Pi$ par une relation d'équivalence liée à M_Z. Une application φ de Π dans $HS(p,q)$ est représentant d'une classe d'équivalence si et seulement si $\varphi(.) \circ M'(.)^{\frac{1}{2}}$ est mesurable et de norme carré η-intégrable. Nous désignerons de la même façon un élément de $(p,q) - L^2(M_Z)$ et l'un de ses représentants. L'application $(\varphi,\psi) \in ((p,q) - L^2(M_Z))^2 \longmapsto \int tr(\varphi(\lambda) \circ M'(\lambda) \circ (\psi(\lambda))^*) \, d\eta(\lambda) \in \mathbb{C}$ est un produit scalaire qui confère à $(p,q) - L^2(M_Z)$ une structure d'espace de Hilbert.

L'intégrale stochastique, relativement à Z, peut se définir comme l'unique isométrie de $(p,q) - L^2(M_Z)$ sur $H_Z(p,q) = \overline{\mathrm{vect}} \, \{K \circ Z(A) \,;\, K \in HS(p,q), A \in \mathcal{B}\}$ qui à $1_A K$ associe $K \circ Z(A)$ $(= \int 1_A K \, dZ)$ pour tout (K,A) de $HS(p,q) \times \mathcal{B}$. Si, pour tout n de $\mathbb{Z}$, on pose $X_n = \int e^{i.n} I \, dZ(.)$, on peut affirmer que $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une série p-dimensionnelle stationnaire, c'est-à-dire que $\mathbb{E}(X_n \otimes X_m) = \mathbb{E}(X_{n-m} \otimes X_0)$ pour tout (n,m) de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. On montre alors (avec les notations précédentes) que : $\mathbb{E}(X_0 \otimes X_n) = \int e^{i\lambda n} M'(\lambda) \, d\eta(\lambda)$ pour tout n de $\mathbb{Z}$.

Réciproquement lorsque $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une série p-dimensionnelle stationnaire on peut lui associer une, et une seule, p-m.a. Z telle que $X_n = \int e^{i.n} I \, dZ(.)$ pour tout n de $\mathbb{Z}$, Z est appelée la p-m.a associée à $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$.

Une deuxième série q-dimensionnelle stationnaire $(X'_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est stationnairement corrélée avec $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ lorsque $\mathbb{E}(X_n \otimes X'_m) = \mathbb{E}(X_{n-m} \otimes X'_0)$ pour tout (n,m) de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. On peut montrer que deux séries stationnaires $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ et $(X'_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ sont stationnairement corrélées si et seulement si les mesures aléatoires respectivement associées Z et Z' le sont, c'est-à-dire sont telles que $\mathbb{E}(Z(A) \otimes Z'(B)) = 0$ pour tout couple d'éléments disjoints (A,B) de $\mathcal{B}$.

L'image d'une série p-dimensionnelle stationnaire $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, de p-m.a. associée Z, par un filtre φ de $(p,q) - L^2(M_Z)$ est la série q-dimensionnelle $(\int e^{i.n} \varphi(.) \, dZ(.))_{n\in\mathbb{Z}}$, elle est stationnaire et la q-m.a. associée est l'application $Z_\varphi \,:\, A \in \mathcal{B} \longmapsto \int 1_A \varphi \, dZ \in L^2_{\mathbb{C}^q}(\Omega,\mathcal{A},P)$. On peut établir que la dérivée de M_{Z_φ} par rapport à η est $\varphi(.) \circ M'(.) \circ \varphi(.)^*$. Lorsque ψ est un élément de $(q,r) - L^2(M_{Z_\varphi})$, $\varphi(.) \circ \psi(.)$ appartient à $(p,r) - L^2(M_Z)$ et $\int \psi \, dZ_\varphi = \int \varphi(.) \circ \psi(.) \, dZ(.)$.

Si Z et Z' sont des mesures aléatoires, respectivement p et q dimensionnelles, stationnairement corrélées les p-m.a. Z et Z'_φ, pour tout φ de $(q,p) - L^2(M_{Z'})$, sont stationnairement corrélées, et donc également les séries p-dimensionnelles $(\int e^{i.n} I \, dZ(.))_{n\in\mathbb{Z}}$ et $(\int e^{i.n} \varphi(.) \, dZ'(.))_{n\in\mathbb{Z}}$. D'où, pour tout n de $\mathbb{Z}$:

$$\left\| \int e^{i.n} I \, dZ - \int e^{i.n} \varphi(.) \, dZ' \right\| = \left\| \int I \, dZ - \int \varphi(.) \, dZ' \right\| .$$

C'est la raison pour laquelle, lorsque $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une série $p-$dimensionnelle stationnaire, de $p-$m.a. associée Z, et $(X'_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ une série $q-$dimensionnelle stationnaire de $q-$m.a. associée Z', stationnairement corrélée à $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, nous mesurons, lorsque $q \leq p$, la qualité du résumé qu'est $(X'_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ de $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ par la quantité :

$$\inf\{\| \int I \, \mathrm{d}Z - \int \varphi(.) \, \mathrm{d}Z'(.)\| ;\; \varphi \in (q,p) - L^2(M_{Z'})\} .$$

Bien entendu, parmi tous les résumés possibles de $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, c'est-à-dire parmi toutes les séries $(X'_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ $q-$dimensionnelles stationnaires, stationnairement corrélées avec $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, nous choisirons une de celles qui de ce point de vue sont les plus performantes (on peut montrer qu'il en existe une infinité. D'où la :

Définition 1 *L'A.C.P. d'ordre q d'une série $p-$dimensionnelle stationnaire $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, de $p-$m.a. associée Z, est la recherche d'une série $q-$dimensionnelle stationnaire $(X'_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, de $q-$m.a. associée Z', stationnairement corrélée à $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ et d'un filtre φ de $(q,p)-L^2(M_{Z'})$ minimisant $\| \int I\, dZ - \int \varphi\, dZ' \|$.*

Si l'on désigne par $\sum_{j=1}^{j=p} \mu_j(.)a_j(.)\otimes a_j(.)$ une “décomposition de Schmidt mesurable” de M' (il en existe toujours une)[1] et par $\{f_1,\dots,f_q\}$ la base canonique de $\mathbb{C}^q$ on peut affirmer que

Une série $q-$dimensionnelle solution de l'A.C.P. d'ordre q de $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est l'image de $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ par le filtre $\alpha(.) = \sum_{j=1}^{j=q} a_j(.)\otimes f_j$, Z_α est la $q-$m.a. qui lui est associée et l'élément de $(q,p)-L^2(M_{Z_\alpha})$, solution de l'A.C.P. est $\alpha^*(.) = \sum_{j=1}^{j=q} f_j\otimes a_j(.)$.

3. La propriété $\mathcal{P}$

3.1. **Formulation de la propriété.** Etudions un cas de figure pour lequel l'A.C.P. dans le domaine des fréquences d'une série est identique à l'A.C.P. classique de chacun des éléments de la série. Pour cela introduisons d'abord la définition suivante :

Définition 2. *Nous dirons qu'un élément Y de $L^2_{\mathbb{C}^p}(\Omega,\mathcal{A},P)$ possède la propriété $\mathcal{C}$ lorsque*

$$\sum_{j=1}^{j=p} < \mathbb{E}(Y\otimes Y)f_j,f_j > f_j\otimes f_j$$

est la décomposition de Schmidt de $\mathbb{E}(Y\otimes Y)$.

Cela signifie que la base canonique $\{f_1,...,f_p\}$ constitue un système d'axes principaux, ou bien encore que Y est identique au vecteur aléatoire p-dimensionnel résultant de sa propre A.C.P.. En particulier cela implique les inégalités :

$$< \mathbb{E}(Y\otimes Y)f_1,f_1 > \geq < \mathbb{E}(Y\otimes Y)f_2,f_2 > \geq \ ... \ \geq < \mathbb{E}(Y\otimes Y)f_p,f_p > \ .$$

Examinons maintenant une notion liée à la définition précédente.

Définition 3.*Nous dirons qu'une série stationnaire p-dimensionnelle $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, de p-m.a. associée Z, possède la propriété $\mathcal{P}$ lorsqu'il existe un opérateur unitaire C de $\mathbb{C}^p$ tel que le vecteur $C\circ Z(A)$ possède la propriété $\mathcal{C}$, pour tout A de $\mathcal{B}$.*

La propriété $\mathcal{P}$ peut s'énoncer d'une façon équivalente grâce au

Lemme 1 *Une série stationnaire p-dimensionnelle $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, de p-m.a. associée Z, possède la propriété $\mathcal{P}$ si et seulement si il existe une famille orthonormée $\{a_1,...,a_p\}$, d'éléments de $\mathbb{C}^p$ telle que, pour tout A de $\mathcal{B}$, le vecteur $Z(A)$ a pour système d'axes principaux $\{a_1,...,a_p\}$.*

Démonstration

Soit donc une série stationnaire p-dimensionnelle $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, de p-m.a. associée Z, vérifiant la propriété $\mathcal{P}$. Par définition il existe un opérateur unitaire C, de $\mathbb{C}^p$, tel que, pour tout A de $\mathcal{B}$, le vecteur $C\circ Z(A)$ possède la propriété $\mathcal{C}$. Cela signifie que, pour tout A de $\mathcal{B}$,

$$\mathbb{E}(C\circ Z(A))\otimes(C\circ Z(A)) = \sum_{j=1}^{j=p} < (\mathbb{E}(C\circ Z(A))\otimes(C\circ Z(A)))f_j,f_j > f_j\otimes f_j$$

1. Pour $j=1,...,p$ les applications $\mu_j(.)$ et $a_j(.)$ sont mesurables, et pour tout λ de Π, $\sum_{j=1}^{j=p}\mu_j(\lambda)a_j(\lambda)\otimes a_j(\lambda)$ est une décomposition de Schmidt de $M'(\lambda)$.

est une décomposition de Schmidt. Si l'on remarque que

$$\mathbb{E}(C \circ Z(A)) \otimes (C \circ Z(A)) = C \circ (\mathbb{E}Z(A) \otimes Z(A)) \circ C^* \ ,$$

la décomposition de Schmidt précédente peut s'écrire :

$$C \circ (\mathbb{E}Z(A) \otimes Z(A)) \circ C^* = \sum_{j=1}^{j=p} < (\mathbb{E}Z(A) \otimes Z(A))(C^* f_j), C^* f_j > f_j \otimes f_j \ .$$

D'où :

$$\mathbb{E}Z(A) \otimes Z(A) = \sum_{j=1}^{j=p} < (\mathbb{E}Z(A) \otimes Z(A))(C_j^* f_f), C^* f_j > (C^* f_j) \otimes (C^* f_j) \ ,$$

qui est également l'écriture d'une décomposition de Schmidt car $\{C^*(f_1),...,C^*(f_p)\}$ est une base orthonormée (puisque C est un opérateur unitaire). Ce qui implique que, pour tout A de $\mathcal{B}$, le vecteur $Z(A)$ a pour système d'axes principaux $\{C^*(f_1),...,C^*(f_p)\}$.

Réciproquement, suposons que, pour tout A de $\mathcal{B}$, le vecteur $Z(A)$ a pour système d'axes principaux la base orthonormée $\{a_1,...,a_p\}$. Cela implique que :

$$\mathbb{E}Z(A) \otimes Z(A) = \sum_{j=1}^{j=p} < (\mathbb{E}Z(A) \otimes Z(A))a_j, a_j > a_j \otimes a_j \ ,$$

et que :

$$< (\mathbb{E}Z(A) \otimes Z(A))a_1, a_1 > \geq < (\mathbb{E}Z(A) \otimes Z(A))a_2, a_2 > \geq ... \geq < (\mathbb{E}Z(A) \otimes Z(A))a_p, a_p > \ .$$

On peut alors facilement vérifier que $C = \sum_{j=1}^{j=p} a_j \otimes f_j$ est un opérateur unitaire et que $C \circ Z(A)$ possède la propriété $\mathcal{C}$ (pour tout A de $\mathcal{B}$). En effet, compte tenu de ce qui précède :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(C \circ Z(A)) \otimes (C \circ Z(A)) &= C \circ (\mathbb{E}Z(A) \otimes Z(A)) \circ C^* \\
&= C \circ (\sum_{j=1}^{j=p} < (\mathbb{E}Z(A) \otimes Z(A))a_j, a_j > a_j \otimes a_j) \circ C^* \\
&= \sum_{j=1}^{j=p} < (\mathbb{E}Z(A) \otimes Z(A))(C_j^* f_j), C^* f_j > f_j \otimes f_j \\
&= \sum_{j=1}^{j=p} < \mathbb{E}(C \circ Z(A)) \otimes (C \circ Z(A)) f_j, f_j > f_j \otimes f_j \ ,
\end{aligned}$$

ce qui termine la démonstration. □

Le résultat qui suit va nous donner une dernière façon de formuler la propriété $\mathcal{P}$:

Proposition 1 *Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ une série stationnaire $p-$dimensionnelle, de p-m.a. associée Z et η une mesure σ-finie dominant M_Z. On peut affirmer que $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ possède la propriété $\mathcal{P}$ si et seulement si il existe une base orthonormée $\{a_1,...,a_p\}$ de $\mathbb{C}^p$ et une famille $\{\mu_1,...,\mu_p\}$ d'applications de Π dans $\mathbb{R}$, mesurables, η-intégrables et telles que $\sum_{j=1}^{j=p} \mu_j(.) a_j \otimes a_j$ soit une décomposition de Schmidt mesurable de la dérivée de M_Z par rapport à η.*

Démonstration

Il est bien connu que lorsque f est une application de $(\Pi,\mathcal{B})$ dans $\mathbb{R}$, mesurable, η-intégrable et telle que $\int 1_A f \, d\eta = 0$, pour tout A de $\mathcal{B}$, alors $f = 0$ η-presque partout. Considérons maintenant une application f de $(\Pi,\mathcal{B})$ dans $\mathbb{R}$, mesurable, η-intégrable et telle que $\int 1_A f \, d\eta \geq 0$, pour tout A de $\mathcal{B}$. Il est clair que $1_{(f<0)} f \leq 0$, donc, pour tout A de $\mathcal{B}$, $1_A 1_{(f<0)} f \leq 0$, d'où : $\int 1_A 1_{(f<0)} f \, d\eta \leq 0$. Mais comme $\int 1_A 1_{(f<0)} f \, d\eta =$

$\int 1_{A\cap(f<0)} f\, d\eta \geq 0$, on en déduit que

$$\int 1_A 1_{(f<0)} f\, d\eta = 0\,,$$

et cela pour tout élément A de $\mathcal{B}$. Donc, d'après le rappel précédent : $1_{(f<0)} f = 0$ η-presque partout. Comme de plus $(f<0) \subset (1_{(f<0)} f \neq 0)$ on en déduit que $\eta(f<0) = 0$. On vient donc de démontrer que :

Lorsque f est une application de $(\Pi,\mathcal{B})$ dans $\mathbb{R}$ mesurable, η-intégrable et telle que $\int 1_A f\, d\eta \geq 0$, pour tout A de $\mathcal{B}$, alors $f \geq 0$ η-presque partout.

Soit une série stationnaire p-dimensionnelle $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ possédant la propriété $\mathcal{P}$. Il existe donc une base orthonormée $\{a_1,...,a_p\}$, de $\mathbb{C}^p$, telle que, pour tout A de $\mathcal{B}$, $\sum_{j=1}^{j=p} < M_Z(A)a_j,a_j > a_j \otimes a_j$ est une décomposition de Schmidt de $M_Z(A) = \mathbb{E}Z(A) \otimes Z(A)$.

On établit aisément que l'application $A \in \mathcal{B} \mapsto < M_Z(A)a_j,a_j > \in \mathbb{R}^+$ est une mesure bornée dominée par η. D'après le théorème de Radon Nikodym :

il existe une application α_j de Π dans $\mathbb{R}^+$ mesurable, η-intégrable et telle que $\int 1_A \alpha_j\, d\eta = < M_Z(A)a_j,a_j >$ pour tout A de $\mathcal{B}$.

Etant donné un élément A de $\mathcal{B}$, puisque $\sum_{j=1}^{j=p} < M_Z(A)a_j,a_j > a_j \otimes a_j$ est une décomposition de Schmidt, pour $j = 1,2,...,p-1$ nous avons : $< M_Z(A)a_j,a_j > - < M_Z(A)a_{j+1},a_{j+1} > \geq 0$. Ce qui peut s'écrire $\int 1_A(\alpha_j - \alpha_{j+1})\, d\eta \geq 0$, cela pour tout A de $\mathcal{B}$, d'où, compte tenu de la propriété obtenue précédemment : $\alpha_j \geq \alpha_{j+1}$ η-presque partout.

Pour $j = 1,2,...,p$, posons :

$$\mu_j(.) = 1_{(\alpha_1\geq\alpha_2)\cap(\alpha_2\geq\alpha_3)\cap\ldots\cap(\alpha_{p-1}\geq\alpha_p)}(.)\alpha_j(.)\,.$$

Bien entendu, $\mu_j = \alpha_j$ η-presque partout et donc μ_j est η-intégrable et vérifie

$$\int 1_A \mu_j\, d\eta = \int 1_A \alpha_j\, d\eta = < M_Z(A)a_j,a_j > (\text{pourtout} A \text{de} \mathcal{B}).$$

Pour tout λ de Π nous avons $\mu_1(\lambda) \geq \mu_2(\lambda) \geq ... \geq \mu_p(\lambda)$. Comme de plus pour tout A de $\mathcal{B}$ on a : $\int 1_A \sum_{j=1}^{j=p} \mu_j a_j \otimes a_j\, d\eta = \sum_{j=1}^{j=p} (\int 1_A \mu_j\, d\eta) a_j \otimes a_j = M_Z(A)$, il est clair que $\sum_{j=1}^{j=p} \mu_j(.) a_j \otimes a_j$ est une décomposition de Schmidt mesurable de la dérivée de M_Z par rapport à η.

Enfin, réciproquement, s'il existe une base orthonormée $\{a_1,...,a_p\}$ de $\mathbb{C}^p$ et une famille $\{\mu_1,...,\mu_p\}$ d'applications de Π dans $\mathbb{R}^+$ mesurables et η-intégrables telles que $\sum_{j=1}^{j=p} \mu_j(.) a_j \otimes a_j$ soit une décomposition de Schmidt mesurable de la dérivée de M_Z par rapport à η, il est clair que

$$M_Z(A) = \int 1_A(.) \sum_{j=1}^{j=p} \mu_j(.) a_j \otimes a_j\, d\eta(.) = \sum_{j=1}^{j=p} < M_Z(A)a_j,a_j > a_j \otimes a_j$$

est, pour tout A de $\mathcal{B}$, la décomposition de Schmidt de $M_Z(A) = \mathbb{E}Z(A) \otimes Z(A)$, donc que $\{a_1,...,a_p\}$ est un système d'axes principaux de $Z(A)$. D'où la proposition. □

3.2. **Conséquences de la propriété.** Considérons une série stationnaire $p-$dimensionnelle $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ qui possède la propriété $\mathcal{P}$. Si η est une mesure σ-finie dominant M_Z, d'après la proposition 1, la dérivée de M_Z par rapport à η est du type $M'(.) = \sum_{j=1}^{j=p} \mu_j(.) a_j \otimes a_j$. La série $(X'_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ obtenue par A.C.P. d'ordre p dans le domaine des fréquences est l'image de $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ par le filtre $\sum_{j=1}^{j=p} a_j \otimes f_j$. D'où

$$X'_n = \int e^{i.n} (\sum_{j=1}^{j=p} a_j \otimes f_j)\, dZ = (\sum_{j=1}^{j=p} a_j \otimes f_j) \circ X_n\,.$$

L'A.C.P. (classique) du vecteur aléatoire X_n est obtenue grâce à la diagonalisation de l'opérateur de covariance $\mathbb{E}X_n \otimes X_n$. Donc de

$$\begin{aligned}\mathbb{E}X_0 \otimes X_0 &= \mathbb{E}Z(\Pi) \otimes Z(\Pi) \\ &= M_Z(\Pi) \\ &= \int \sum_{j=1}^{j=p} \mu_j(.) a_j \otimes a_j \, d\eta \\ &= \sum_{j=1}^{j=p} (\int \mu_j \, d\eta) a_j \otimes a_j \, .\end{aligned}$$

Puisque $\mu_1(.) \geq \mu_2(.) \geq ... \geq \mu_p(.)$ on en déduit que $\int \mu_1 \, d\eta \geq \int \mu_2 \, d\eta \geq ... \geq \int \mu_p \, d\eta$ et donc que $\sum_{j=1}^{j=p} (\int \mu_j \, d\eta) a_j \otimes a_j$ est une décomposition de Schmidt de $\mathbb{E}X_n \otimes X_n$. Le vecteur déduit de X_n par A.C.P. est donc $(\sum_{j=1}^{j=p} a_j \otimes f_j) \circ X_n$, c'est-à-dire X'_n. Nous pouvons conclure que

lorsqu'une série stationnaire $p-$dimensionnelle $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ possède la propriété $\mathcal{P}$, Il y a identité entre A.C.P. classique et A.C.P. dans le domaine des fréquences.

Remarque. Cette propriété $\mathcal{P}$ correspond au fait que toutes les composantes spectrales ont un système d'axes principaux commun. C'est le cas d'un bruit blanc, c'est aussi le cas de toute série résumé résultant d'une A.C.P. dans le domaine des fréquences.

4. Expression de la série résumé sous la forme d'une moyenne mobile

4.1. **Cas où la fonction de covariance est absolument sommable.** Nous supposerons désormais que la série stationnaire $p-$dimensionnelle $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, dont on souhaite effectuer l'A.C.P., est telle que la famille $\{\|\mathbb{E}\, X_0 \otimes X_n\|;\ n \in Z\}$ est sommable (de somme M). On en déduit que la mesure de Lebesgue (que l'on notera) μ domine M_Z et que, pour tout λ de Π la famille $\{(2\pi)^{-1} e^{-i\lambda\, n} \mathbb{E}X_0 \otimes X_n;\ n \in \mathbb{Z}\}$ est absolument sommable de somme $F(\lambda)$, F désignant la densité spectrale (de $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$) c'est-à-dire la dérivée de M_Z par rapport à μ. D'après § 2 (et avec les notations alors adoptées), le "meilleur résumé" $q-$dimensionnel de $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est la série $(X'_n)_{n\in\mathbb{Z}} = (\int e^{i.n} \alpha(.)\, \mathrm{d}Z)_{n\in\mathbb{Z}}$.

Quant à la série $(X''_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ image de $(X'_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ par le filtre $\alpha(.)^*$ (donc image de $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ par le filtre $\alpha(.)^* \circ \alpha(.)$), qui constitue en quelque sorte la "reconstitution des données", elle vérifie, pour tout n de $\mathbb{Z}$, les égalités :

$$\|X_n - X''_n\| = \|X_0 - X''_0\| = \| \int I \, \mathrm{d}Z - \int \alpha(.)^* \, \mathrm{d}Z_\alpha \| = \| \int I \, \mathrm{d}Z - \int \alpha(.)^* \circ \alpha(.) \, \mathrm{d}Z \| \; .$$

Bien entendu $(X''_n)_{n\in\mathbb{Z}} = (X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ lorsque $q = p$ (car $\alpha(.)^* \circ \alpha(.) = I$).

D'après les rappels de § 2, les dérivées de M_{Z_α} et de $M_{Z_{\alpha^* \circ \alpha}}$ par rapport à μ sont respectivement $G(.) = \alpha(.) \circ F(.) \circ \alpha(.)^*$ et $\alpha(.)^* \circ G(.) \circ \alpha(.) = \alpha(.)^* \circ \alpha(.) \circ F(.) \circ \alpha(.)^* \circ \alpha(.)$.

Il est facile d'établir que pour tout λ de Π :

$$\|\alpha(\lambda)\|^2 = \sum_{j=1}^{q} \|\alpha(\lambda)\, a_j(\lambda)\|^2 = \sum_{j=1}^{q} \|f_j\|^2 = q \; ,$$

ce dont on déduit l'appartenance de α à $L^2_{HS(p,q)}(\Pi,\mathcal{B},\mu)$.

Puisque $\{\frac{1}{\sqrt{2\,\pi}}\, e^{i.n}; n \in \mathbb{Z}\}$ est une base orthonormée de $L^2(\Pi,\mathcal{B},\mu)$, si l'on note $\tilde{\alpha}$ l'application $y \in L^2(\Pi,\mathcal{B},\mu) \mapsto \int y\, \alpha \, \mathrm{d}\mu \in HS(p,q)$, c'est-à-dire l'image isométrique de α dans $\sigma_2(L^2(\Pi,\mathcal{B},\mu),HS(p,q))$, on peut affirmer :

– d'une part que la famille $\left\{ \left\| \widetilde{\alpha}(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{i.n}) \right\|^2 \; ; \, n \in \mathbb{Z} \right\}$ est sommable de somme $\|\tilde{\alpha}\|^2 = \int \|\alpha(.)\|^2 \mathrm{d}\mu(.) = 2\,\pi\, q$,

– d'autre part que la famille $\{(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{i.n}) \otimes (\tilde{\alpha} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{i.n});\ n \in \mathbb{Z}\}$ est sommable de somme $\tilde{\alpha}$.

Si pour tout n de $\mathbb{Z}$ on pose $C_n = (2\pi)^{-1} \int e^{i.n}\alpha(.)\, d\mu(.)$, ce qui précède, grâce à l'isométrie des espaces $L^2_{HS(p,q)}(\Pi,\mathcal{B},\mu)$ et $\sigma_2(L^2(\Pi,\mathcal{B},\mu),HS(p,q))$ évoquée précédemment, peut s'énoncer de la façon suivante :

- la famille $\left\{2\pi \|C_n\|^2 \; ; \, n \in \mathbb{Z}\right\}$ est sommable de somme $\|\alpha\|^2_{L^2_{HS}(\mu)}$,
- la famille $\left\{e^{-i.n}C_n \, ; \, n \in \mathbb{Z}\right\}$ est sommable de somme α (dans $L^2_{HS}(\mu)$)

Compte tenu de l'égalité $\int \|\alpha\|^2 \; d\mu = \int \|\alpha - C_0\|^2 \; d\mu + 2\pi \|C_0\|^2$, il est clair que nous venons de démontrer le

Lemme 2 *la famille* $\left\{2\pi \|C_n\|^2 \; ; \, n \in \mathbb{Z}^*\right\}$ *est sommable de somme* $\int \|\alpha(\lambda) - C_0\|^2 \; d\mu(\lambda)$.

Examinons maintenant le

Lemme 3 *Pour tout n de $\mathbb{Z}$ la famille $\{C_m \circ X_{n-m} \, ; \, m \in \mathbb{Z}^*\}$ est sommable de somme X'_n.*

DÉMONSTRATION

Notons tout d'abord que pour tout λ de Π il vient :

$$\mathrm{tr}F(\lambda) \leq p \, \|F(\lambda)\| \leq (2\pi)^{-1} p \sum_{n\in\mathbb{Z}} \|\mathbb{E}\, X_0 \otimes X_n\| = (2\pi)^{-1} pM \, .$$

Pour toute partie finie J de $\mathbb{Z}$ on peut alors écrire :

$$\begin{aligned}
\left\| X'_n - \sum_{m\in J} C_m \circ X_{n-m} \right\|^2 &= \left\| X'_0 - \sum_{m\in J} C_m \circ X_{-m} \right\|^2 \\
&= \left\| \int \alpha \, dZ - \int \sum_{m\in J} e^{-i.m} C_m \, dZ \right\|^2 \\
&= \left\| \alpha - \sum_{m\in J} e^{-i.m} C_m \right\|^2_{(p,q)-L^2(M_Z)} \\
&= \int \left\| \alpha(.) \circ F(.)^{\frac{1}{2}} - \sum_{m\in J} e^{-i.m} C_m \circ F(.)^{\frac{1}{2}} \right\|^2 d\mu(.)
\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}
\left\| X'_n - \sum_{m\in J} C_m \circ X_{n-m} \right\|^2 &\leq \int \left\| \alpha(.) - \sum_{m\in J} e^{-i.m} C_m \right\|^2 trF(.) \, d\mu(.) \\
&\leq (2\pi)^{-1} pM \left\| \alpha(.) - \sum_{m\in J} e^{-i.m} C_m \right\|^2_{L^2_{HS}(\mu)} .
\end{aligned}$$

Le lemme est ainsi démontré puisque la famille $\left\{e^{-i.n}C_n \, ; \, n \in \mathbb{Z}\right\}$ est sommable de somme α. □

On vérifie facilement que lorsque $C_m = 0$, pour tout m de $\mathbb{Z}^*$, $\alpha(\lambda) = C_0$ quelque soit λ de Π, et que donc la série $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ vérifie la propriété $\mathcal{P}$, dans le cas particulier où $q = p$. Cela signifie que les différentes composantes spectrales admettent le même système d'axes principaux (au sens de l'A.C.P. classique). C'est-à-dire que (pour tout λ de Π) les colonnes de (la matrice associée à l'opérateur) C_0^* sont les vecteurs propres normés de (la matrice associée à l'opérateur) $F(\lambda)$.

Souhaitant examiner des situations qui ne sont pas aussi extrêmes, et qu'il est courant de rencontrer dans la pratique, c'est-à-dire des cas de figure pour lesquels les opérateurs ...C_{-3},C_{-2},C_{-1},C_1,C_2,C_3,... sont beaucoup plus "petits" que C_0, nous noterons ε_X la racine carrée de la somme de la famille $\left\{2\pi \|C_n\|^2 \; ; \, n \in \mathbb{Z}^*\right\}$. Nous établirons un ensemble d'inégalités faciles à interpréter, pour chacune d'elles l'un des deux membres est, à une constante multiplicative près, égal à ε_X ou à son carré, quant à l'autre il s'agit d'une norme. Bien entendu, dans le cas particulier où $\varepsilon_X = 0$, ces inégalités deviennent des égalités.

Notons que ε_X est d'autant plus faible que $\alpha(.)$ s'éloigne peu de sa moyenne C_0 $(= (2\pi)^{-1} \int \alpha \, d\mu)$ puisque, d'après le lemme 2 : $\varepsilon_X^2 = \int \|\alpha(\lambda) - C_0\|^2 \, d\mu(\lambda)$. Nous avons là une première interprétation de ε_X "petit".

4.2. **Approximation d'une isométrie partielle.** Etant donné un élément F de $HS(p,p)$ auto-adjoint et positif dont une décomposition de Schmidt est $\sum_{j=1}^{j=p} \mu_j a_j \otimes a_j$, si l'on pose $\alpha = \sum_{j=1}^{j=q} a_j \otimes f_j$ et $G = \sum_{j=1}^{j=q} \mu_j f_j \otimes f_j$, où q est un entier inférieur ou égal à p et $\{f_j\,;\, j = 1,...,q\}$ la base canonique de $\mathbb{C}^q$, il est facile de vérifier les égalités :

$$\alpha \circ \alpha^* = I_{\mathbb{C}^q}\,,\ F \circ \alpha^* = \alpha^* \circ G\,,\ \alpha \circ F \circ \alpha^* = G\ \text{ et } \alpha^* \circ \alpha \circ F \circ \alpha^* \circ \alpha = \alpha^* \circ G \circ \alpha\,,$$

qui traduisent une diagonalisation partielle de l'opérateur F. Bien entendu on peut également établir que $\|\alpha\| = \sqrt{q}$ et que $\{\alpha^* f_j\,;\, j = 1,...,q\}$ constitue un système orthonormé de vecteurs propres de F. Dans ce paragraphe nous nous proposons d'examiner ce qu'il advient de ces égalités lorsqu'à α on substitue un opérateur C qui lui est proche. Les résultats obtenus sont résumés par la

Proposition 2 *Si M est un majorant de $\|F\|$ et C un élément de $HS(p,q)$ tel que $\|C\| \leq \sqrt{q}$, notant $\varepsilon = \|C - \alpha\|$, il vient alors :*

1° $\|C \circ C^* - I_{\mathbb{C}^q}\| \leq 2\sqrt{q}\varepsilon$ *;*
2° $|< C^*(f_j),C^*(f_{j'}) > -\delta_{j,j'}| \leq 2\sqrt{q}\varepsilon$ *pour tout couple d'éléments* (j,j') *de* $\{1,...,q\}$ *;*
3° $\|F \circ C^* - C^* \circ G\| \leq 2\varepsilon M$ *;*
4° $\|F(C^*(f_j)) - \mu_j(C^*(f_j))\| \leq 2\varepsilon M$ *pour tout* j *de* $\{1,...,q\}$ *;*
5° $\|C \circ F \circ C^* - G\| \leq 2\sqrt{q}\varepsilon M$ *;*
6° $\|\alpha^* \circ \alpha \circ F \circ \alpha^* \circ \alpha - C^* \circ G \circ C\| \leq 2\sqrt{q}\varepsilon M$ *.*

Démonstration

1° provient des inégalités :

$$\begin{aligned}
\|C \circ C^* - I_{\mathbb{C}^q}\| &= \|C \circ C^* - \alpha \circ \alpha^*\| \\
&\leq \|C \circ C^* - \alpha \circ C^*\| + \|\alpha \circ C^* - \alpha \circ \alpha^*\| \\
&\leq \|C - \alpha\| \, \|C\| + \|\alpha\| \, \|C - \alpha\| \\
&\leq 2\sqrt{q}\varepsilon\,.
\end{aligned}$$

2° est une conséquence de ce qui précède :

$$\begin{aligned}
|< C^*(f_j),C^*(f_{j'}) > -\delta_{j,j'}| &= |< C^*(f_j),C^*(f_{j'}) > - < f_j,f_{j'} >| \\
&= |< (C \circ C^* - I_{\mathbb{C}^q})f_j,f_{j'} >| \\
&\leq \|(C \circ C^* - I_{\mathbb{C}^q})f_j\| \\
&\leq \|C \circ C^* - I_{\mathbb{C}^q}\| \\
&\leq 2\sqrt{q}\varepsilon\,.
\end{aligned}$$

Comme $\|G\|^2 = \sum_{j=1}^{j=q} \mu_j^2 \leq \|F\|^2 \leq M^2$, *3°* résulte de :

$$\begin{aligned}
\|F \circ C^* - C^* \circ G\| &= \|F \circ C^* - F \circ \alpha^*\| + \|F \circ \alpha^* - C^* \circ G\| \\
&= \|F \circ (C - \alpha)^*\| + \|(\alpha^* - C^*) \circ G\| \\
&\leq \|F\| \, \|C - \alpha\| + \|\alpha - C\| \, \|G\| \\
&\leq 2\varepsilon M\,.
\end{aligned}$$

Si l'on constate que $C^*(G(f_j)) = \mu_j C^*(f_j)$, de ce qui précède on déduit le point *4°* :

$$\|F(C^*(f_j)) - \mu_j C^*(f_j)\| = \|(F \circ C^* - C^* \circ G)(f_j)\| \leq \|F \circ C^* - C^* \circ G\| \leq 2\varepsilon M\,.$$

Le point *5°* s'obtient d'une façon analogue au *3°* :

$$\begin{aligned}
\|C \circ F \circ C^* - G\| &= \|C \circ F \circ C^* - \alpha \circ F \circ \alpha^*\| \\
&\leq \|C \circ F \circ C^* - C \circ F \circ \alpha^*\| + \|C \circ F \circ \alpha^* - \alpha \circ F \circ \alpha^*\| \\
&\leq \|C\|\,\|F\|\,\|C - \alpha\| + \|C - \alpha\|\,\|F\|\,\|\alpha\| \\
&\leq 2\sqrt{q} M\varepsilon\,.
\end{aligned}$$

Quant au point *6°*, il provient de :

$$\|\alpha^* \circ \alpha \circ F \circ \alpha^* \circ \alpha - C^* \circ G \circ C\| = \|\alpha^* \circ \alpha \circ F \circ \alpha^* \circ \alpha - C^* \circ \alpha \circ F \circ \alpha^* \circ C\|$$

$$\begin{aligned}
&\leq \|\alpha^* \circ \alpha \circ F \circ \alpha^* \circ \alpha - \alpha^* \circ \alpha \circ F \circ \alpha^* \circ C\| + \|\alpha^* \circ \alpha \circ F \circ \alpha^* \circ C - C^* \circ \alpha \circ F \circ \alpha^* \circ C\| \\
&\leq \|\alpha^*\|\,\|G\|\,\|\alpha - C\| + \|\alpha^* - C^*\|\,\|G\|\,\|C\| \\
&\leq 2\sqrt{q} M\varepsilon\,.
\end{aligned}$$

□

Le lecteur notera que le *2°* traduit le fait que, lorsque α est voisin de C (donc lorsque ε est petit), la famille $\{C^*(f_j)\,;\, j = 1,...,q\}$ est proche d'un système de vecteurs orthonormés en ce sens que $|< C^*(f_j), C^*(f_{j'}) >| \leq 2\sqrt{q}\varepsilon$, lorsque j est différent de j', et que $1 - 2\sqrt{q}\varepsilon \leq \|C^*(f_j)\|^2 \leq 1 + 2\sqrt{q}\varepsilon$.

Le 4° signifie que $C^*(f_j)$ a des propriétés voisines de celles d'un vecteur propre de F.

Quant aux inégalités du *5°* et du *6°*, elles sont respectivement à rapprocher des égalités $\alpha \circ F \circ \alpha^* = G$ et $\alpha^* \circ \alpha \circ F \circ \alpha^* \circ \alpha = \alpha^* \circ G \circ \alpha$.

4.3. **Application de ces résultats à l'A.C.P..** Revenons au cas de la série p-dimensionnelle $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ mentionnée précédemment. Nous souvenant que M désigne la somme de la famille $\{\|\mathbb{E}\, X_0 \otimes X_n\|;\ n \in Z\}$, appliquons les résultats de la proposition 2 aux opérateurs $F(\lambda)$.

Remarquons tout d'abord que, pour tout λ de Π, $\|F(\lambda)\| \leq (2\pi)^{-1} M$. De plus :

$$\|C_0\| = \left\|(2\pi)^{-1} \int \alpha\, d\mu\right\| \leq (2\pi)^{-1} \int \|\alpha\|\ d\mu = (2\pi)^{-1} \int \sqrt{q}\, d\mu = \sqrt{q}\,.$$

Si, pour tout λ de Π, on pose $\varepsilon(\lambda) = \|\alpha(\lambda) - C_0\|$, il vient :

$\|C_0 \circ C_0^* - I_{\mathbb{C}^q}\|^2 \leq 4q\varepsilon(\lambda)^2$; (1)

$|< C^*(f_j), C^*(f_{j'}) > - \delta_{j,j'}|^2 \leq 4q\varepsilon(\lambda)^2$ pour tout couple (j,j') d'éléments de $\{1,...,q\}$; (2)

$\|F(\lambda) \circ C_0^* - C_0^* \circ G(\lambda)\|^2 \leq 4\varepsilon(\lambda)^2 (2\pi)^{-2} M^2$; (3)

$\|F(\lambda)(C_0^*(f_j)) - \mu_j (C_0^*(f_j))\|^2 \leq 4\varepsilon(\lambda)^2 (2\pi)^{-2} M^2$ pour tout j de $\{1,...,q\}$; (4)

$\|C_0 \circ F(\lambda) \circ C_0^* - G(\lambda)\|^2 \leq 4q\varepsilon(\lambda)^2 (2\pi)^{-2} M^2$; (5)

$\|\alpha(\lambda)^* \circ \alpha(\lambda) \circ F(\lambda) \circ \alpha(\lambda)^* \circ \alpha(\lambda) - C_0^* \circ G(\lambda) \circ C_0\|^2 \leq 4q\varepsilon(\lambda)^2 (2\pi)^{-2} M^2$. (6)

De l'intégration de chacune de ces inégalités on déduit :

$\int \|C_0 \circ C_0^* - I_{\mathbb{C}^q}\|^2\ d\mu \leq 4q\varepsilon_X^2$;

$\int |< C^*(f_j), C^*(f_{j'}) > - \delta_{j,j'}|^2\ d\mu \leq 4q\varepsilon_X^2$ pour tout couple (j,j') d'éléments de $\{1,...,q\}$;

$\int \|F(\lambda) \circ C_0^* - C_0^* \circ G(\lambda)\|^2\ d\mu(\lambda) \leq 4(2\pi)^{-2} M^2 \varepsilon_X^2$;

$\int \|F(\lambda)(C_0^*(f_j)) - \mu_j (C_0^*(f_j))\|^2\ d\mu(\lambda) \leq 4(2\pi)^{-2} M^2 \varepsilon_X^2$ pour tout j de $\{1,...,q\}$;

$\int \|C_0 \circ F(\lambda) \circ C_0^* - G(\lambda)\|^2 \, d\mu(\lambda) \leq 4q(2\pi)^{-2} M^2 \varepsilon_X^2$;
$\int \|\alpha(\lambda)^* \circ \alpha(\lambda) \circ F(\lambda) \circ \alpha(\lambda)^* \circ \alpha(\lambda) - C_0^* \circ G(\lambda) \circ C_0\|^2 \, d\mu(\lambda) \leq 4q(2\pi)^{-2} M^2 \varepsilon_X^2$;

Nous venons donc de démontrer la :

Proposition 3 *Si* ε_X^2 *désigne la somme de la famille* $\left\{2\pi \|C_n\|^2 \ ; \ n \in \mathbb{Z}^*\right\}$ *alors :*

1° $\|C_0 \circ C_0^* - I_{\mathbb{C}^q}\| \leq \sqrt{\frac{2q}{\pi}} \varepsilon_X$;

2° $|< C^*(f_j), C^*(f_{j'}) > -\delta_{j,j'}| \leq \sqrt{\frac{2q}{\pi}} \varepsilon_X$ *pour tout couple* (j,j') *d'éléments de* $\{1,...,q\}$ *;*

3° $\int \|F(\lambda) \circ C_0^* - C_0^* \circ G(\lambda)\|^2 \ d\mu(\lambda) \leq 4(2\pi)^{-2} M^2 \varepsilon_X^2$;

4° $\int \|F(\lambda)(C_0^*(f_j)) - \mu_j(C_0^*(f_j))\|^2 \ d\mu(\lambda) \leq 4(2\pi)^{-2} M^2 \varepsilon_X^2$ *pour tout* j *de* $\{1,...,q\}$ *;*

5° $\int \|C_0 \circ F(\lambda) \circ C_0^* - G(\lambda)\|^2 \, d\mu(\lambda) \leq 4q(2\pi)^{-2} M^2 \varepsilon_X^2$;

6° $\int \|\alpha(\lambda)^* \circ \alpha(\lambda) \circ F(\lambda) \circ \alpha(\lambda)^* \circ \alpha(\lambda) - C_0^* \circ G(\lambda) \circ C_0\|^2 \, d\mu(\lambda) \leq 4q(2\pi)^{-2} M^2 \varepsilon_X^2$.

Le *2°* peut s'interpréter de la même façon que le *2°* de la proposition 2, le *3°* permet de dire qu'"en moyenne quadratique" l'opérateur $F(\lambda) \circ C_0^*$ est proche de $C_0^* \circ G(\lambda)$, les *4°*, *5°* et *6°* s'interprètent d'une façon analogue, ils expriment des propriétés "en moyenne quadratique". Bien entendu ces inégalités sont d'autant plus "fines" que les opérateurs C_n sont voisins de 0 (car : $\varepsilon_X = (2\pi \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \|C_n\|^2)^{\frac{1}{2}}$).

On peut également établir que :

Proposition 4 *Pour tout élément* n *de* $\mathbb{Z}$ *on a :*

1° $\|(\mathbb{E}X_0 \otimes X_n) \circ C_0^* - C_0^* \circ (\mathbb{E}X_0' \otimes X_n')\| \leq \sqrt{\frac{2}{\pi}} M \varepsilon_X$;

2° $\|C_0 \circ (\mathbb{E}X_0 \otimes X_n) \circ C_0^* - \mathbb{E}X_0' \otimes X_n'\| \leq \sqrt{\frac{2q}{\pi}} M \varepsilon_X$;

3° $\|\mathbb{E}X_0'' \otimes X_n'' - C_0^* \circ (\mathbb{E}X_0' \otimes X_n') \circ C_0\| \leq \sqrt{\frac{2q}{\pi}} M \varepsilon_X$.

Démonstration

Etant donné que $\int e^{i\lambda n} F(\lambda) \circ C_0^* \, d\mu(\lambda) = (\mathbb{E}X_0 \otimes X_n) \circ C_0^*$ et que $\int e^{i\lambda n} C_0^* \circ G(\lambda) \, d\mu(\lambda) = C_0^* \circ (\mathbb{E}X_0' \otimes X_n')$ l'inégalité (3) (de la démonstration de la proposition 3) permet d'écrire :

$$\begin{aligned}
\|(\mathbb{E}X_0 \otimes X_n) \circ C_0^* - C_0^* \circ (\mathbb{E}X_0' \otimes X_n')\| &= \left\| \int e^{i\lambda n} (F(\lambda) \circ C_0^* - C_0^* \circ G(\lambda)) \, d\mu(\lambda) \right\| \\
&\leq \int \|F(\lambda) \circ C_0^* - C_0^* \circ G(\lambda)\| \ d\mu(\lambda) \\
&\leq \int 2\varepsilon(\lambda)(2\pi)^{-1} M \, d\mu(\lambda) \\
&\leq \frac{1}{\pi} M (\int 1^2 \, d\mu)^{\frac{1}{2}} (\int \varepsilon^2 \, d\mu)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} M \varepsilon_X .
\end{aligned}$$

D'où le *1°*. Les autres points se démontrent d'une façon semblable (c'est-à-dire en exploitant successivement les inégalités (5) et (6) de la démonstration de la proposition 3). □

Remarque. La densité spectrale de $(X_n')_{n \in \mathbb{Z}}$ étant $G(.) = \alpha(.) \circ F(.) \circ \alpha(.)^* = \sum_{j=1}^{j=q} \mu_j(.) f_j \otimes f_j$, il vient :

$$\begin{aligned}
C_0^* \circ (\mathbb{E}X_0' \otimes X_n')(f_l) &= C_0^* \circ (\int e^{i.n} G(.) \, d\mu(.))(f_l) \\
&= \sum_{j=1}^{j=p} (\int e^{i.n} \mu_j(.) \, d\mu(.)) f_j \otimes (C_0^* f_j)(f_l) \\
&= (\int e^{i.n} \mu_l(.) \, d\mu(.))(C_0^* f_l) ,
\end{aligned}$$

et donc le *1°* de la proposition 3 nous permet d'écrire :

$$\left\|(\mathbb{E}X_0 \otimes X_n)(C_0^* f_l) - (\int e^{i.n}\mu_l(.)\,d\mu(.))(C_0^* f_l)\right\| = \|((\mathbb{E}X_0 \otimes X_n)\circ C_0^* - C_0^* \circ (\mathbb{E}X_0' \otimes X_n'))(f_l)\| \leq \sqrt{\frac{2}{\pi}} M\varepsilon_X\,.$$

Cela signifie que les vecteurs $C_0^* f_l$ ont pour l'opérateur $\mathbb{E}X_0 \otimes X_n$ des propriétés voisines de celles d'un vecteur propre, et cela d'autant plus que ε_X est petit.

4.4. **Cas particulier où $q = p$.** Examinons maintenant le cas particulier où $q = p$, c'est-à-dire le cas où l'on envisage la totalité de l'A.C.P.. L'application $\alpha(.)$ prend alors ses valeurs dans $HS(p,p)$, C_0 est un élément de $HS(p,p)$ et $X_n'' = X_n$ (pour tout n de $\mathbb{Z}$). On peut alors établir que :

Proposition 5 *Si l'on considère les p étapes de l'A.C.P. il vient :*
1° $\|\mathbb{E}X_0 \otimes X_n - C_0^* \circ (\mathbb{E}X_0' \otimes X_n') \circ C_0\| \leq \sqrt{\frac{2p}{\pi}} M\varepsilon_X$;
2° $\|Z(A) - C_0^* \circ Z_\alpha(A)\| \leq \sqrt{\frac{pM}{2\pi}}\varepsilon_X$ *, pour tout A de $\mathcal{B}$;*
3° $\|X_n - C_0^* \circ X_n'\| \leq \sqrt{\frac{pM}{2\pi}}\varepsilon_X$ *, pour tout n de $\mathbb{Z}$;*
4° $\|C_0 \circ Z(A) - Z_\alpha(A)\| \leq \sqrt{\frac{pM}{2\pi}}\varepsilon_X$ *, pour tout A de $\mathcal{B}$;*
5° $\|C_0 \circ X_n - X_n'\| \leq \sqrt{\frac{pM}{2\pi}}\varepsilon_X$ *, pour tout n de $\mathbb{Z}$;*
6° $\int \|F(\lambda) - C_0^* \circ G(\lambda) \circ C_0\|^2\,d\mu(\lambda) \leq 4p(2\pi)^{-2}M^2\varepsilon_X^2$.
7° $\|M_Z(A) - C_0^* \circ M_{Z_\alpha}(A) \circ C_0\| \leq \sqrt{\mu(A)}\frac{\sqrt{p}}{\pi}M\varepsilon_X$*, pour tout A de $\mathcal{B}$;*
8° $\|C_0 \circ M_Z(A) \circ C_0^* - M_{Z_\alpha}(A)\| \leq \sqrt{\mu(A)}\frac{\sqrt{p}}{\pi}M\varepsilon_X$*, pour tout A de $\mathcal{B}$.*

Démonstration

Le *1°* est une conséquence directe du *3°* de la proposition 4 et du fait que $X_n'' = X_n$.

Lorsque φ est une application de Π dans $\mathbb{C}$ mesurable et telle que $|\varphi(\lambda)| \leq 1$, pour tout λ de Π, il est clair que $\varphi(.)I_{\mathbb{C}^p}$ est (représentant d'un) élément de $(p,p) - L^2(M_Z)$ et de $(p,p) - L^2(M_{Z_\alpha})$. On peut alors écrire :

$$\begin{aligned}
\left\|\int \varphi I\,dZ - C_0^* \circ (\int \varphi I\,dZ_\alpha)\right\|^2 &= \left\|\int \varphi I\,dZ - \int \varphi C_0^* \circ \alpha\,dZ\right\|^2 \\
&= \|\varphi I - \varphi C_0^* \circ \alpha\|^2_{(p,p)-L^2(M_Z)} \\
&= \int \left\|\varphi(.) \circ F(.)^{\frac{1}{2}} - \varphi(.)C_0^* \circ \alpha(.) \circ F(.)^{\frac{1}{2}}\right\|^2 d\mu(.) \\
&\leq \int |\varphi(.)|^2 \|I - C_0^* \circ \alpha(.)\|^2 \operatorname{tr}F(.)\,d\mu(.)\,.
\end{aligned}$$

Comme pour tout λ de Π on a :

$$\begin{aligned}
\|I - C_0^* \circ \alpha(\lambda)\| &= \|\alpha(\lambda)^* \circ \alpha(\lambda) - C_0^* \circ \alpha(\lambda)\| \\
&\leq \|\alpha(\lambda)^* - C_0^*\|\,\|\alpha(\lambda)\| \\
&\leq \sqrt{p}\varepsilon(\lambda)\,,
\end{aligned}$$

les inégalités précédentes se complètent par :

$$\begin{aligned}
\left\|\int \varphi I\,dZ - C_0^* \circ (\int \varphi I\,dZ_\alpha)\right\|^2 &\leq \int |\varphi(.)|^2 \|I - C_0^* \circ \alpha(.)\|^2 \operatorname{tr}F(.)\,d\mu(.) \\
&\leq \int (2\pi)^{-1}pM\varepsilon(\lambda)^2\,d\mu(\lambda) = (2\pi)^{-1}pM\varepsilon_X^2.
\end{aligned}$$

D'où :

$$\left\|\int \varphi I\,dZ - C_0^* \circ (\int \varphi I\,dZ_\alpha)\right\| \leq \sqrt{\frac{pM}{2\pi}}\varepsilon_X \tag{7}$$

On peut également écrire :

$$\begin{aligned}\left\|C_0\circ\int\varphi I\,dZ-\int\varphi I\,dZ_\alpha\right\|^2 &= \left\|\int\varphi C_0\,dZ-\int\varphi\alpha\,dZ\right\|^2\\ &= \|\varphi C_0-\varphi\alpha\|^2_{(p,p)-L^2(M_Z)}\\ &= \int\left\|\varphi(.)C_0\circ F(.)^{\frac12}-\varphi(.)\alpha(.)\circ F(.)^{\frac12}\right\|^2\,d\mu(.)\\ &\le \int|\varphi(.)|^2\,\|C_0-\alpha(.)\|^2\,\mathrm{tr}F(.)\,d\mu(.)\\ &\le p(2\pi)^{-1}M\varepsilon_X^2\,.\end{aligned}$$

D'où une deuxième inégalité :

$\left\|C_0\circ\int\varphi I\,dZ-\int\varphi I\,dZ_\alpha\right\|\le\sqrt{\frac{pM}{2\pi}}\varepsilon_X$ (8)

Si pour application φ on choisit successivement 1_A et $e^{i.n}$, l'inégalité (7) permet d'obtenir les points *2°* et *3°*, quant à l'inégalité (8) elle permet d'obtenir les points *4°* et *5°*.

Le point *6°* se déduit du *6°* de la proposition 3 car lorsque $q=p$: $\alpha(\lambda)^*\circ\alpha(\lambda)=I_{\mathbb{C}^p}$.

Le point suivant est une conséquence du *6°* car :

$$\begin{aligned}\|M_Z(A)-C_0^*\circ M_{Z_\alpha}(A)\circ C_0\| &= \left\|\int 1_AF\,d\mu-C_0^*\circ(\int 1_AG\,d\mu)\circ C_0\right\|\\ &= \left\|\int 1_A(.)(F(.)-C_0^*\circ G(.)\circ C_0)\,d\mu(.)\right\|\\ &\le \int 1_A(.)\,\|(F(.)-C_0^*\circ G(.)\circ C_0\|\,d\mu(.)\\ &\le (\int 1_A^2\,d\mu)^{\frac12}(\int\|(F(.)-C_0^*\circ G(.)\circ C_0\|^2\,d\mu(.))^{\frac12}\\ &\le \sqrt{\mu(A)}\frac{\sqrt{p}}{\pi}M\varepsilon_X\,.\end{aligned}$$

Enfin le *8°* résulte du point *5°* de la proposition 3 :

$$\begin{aligned}\|C_0\circ M_Z(A)\circ C_0^*-M_{Z_\alpha}(A)\| &= \left\|C_0\circ(\int 1_AF\,d\mu)\circ C_0^*-\int 1_AG\,d\mu\right\|\\ &= \left\|\int 1_A(.)(C_0\circ F(.)\circ C_0^*-G(.))\,d\mu(.)\right\|\\ &\le \int 1_A(.)\,\|C_0\circ F(.)\circ C_0^*-G(.)\|\,d\mu(.)\\ &\le (\int 1_A^2\,d\mu)^{\frac12}(\int\|C_0\circ F(.)\circ C_0^*-G(.)\|^2\,d\mu(.))^{\frac12}\\ &\le \sqrt{\mu(A)}\frac{\sqrt{p}}{\pi}M\varepsilon_X\,.\end{aligned}$$

□

Remarque. Il est évident que on se rapproche d'autant plus de la propriété $\mathcal{P}$ que ε_X est petit.

5. Exemple

On considère les températures moyennes annuelles de 16 villes françaises entre 1950 et 2000.

Pour réaliser l'A.C.P. dans le domaine des fréquences, nous avons adopté une méthode développée en [2] qui consiste à considérer une partition $\{A_{nk}; n = -k+1, \ldots, k-1\}$ de $[-\pi, \pi[$ et à diagonaliser les matrices $M_Z(A_{nk}$ (k est un paramètre associé au pas de discrétisation, lorsque k tend vers $+\infty$, sous certaines conditions, nous avons de bonnes propriétés de convergence).

Les normes des coefficients C_m de la moyenne mobile issue de l'A.C.P. dans le domaine des fréquences de cette série sont pratiquement nulles, quelle que soit la dimension de la reconstitution, sauf pour le coefficient C_0 (cf. figure 1).

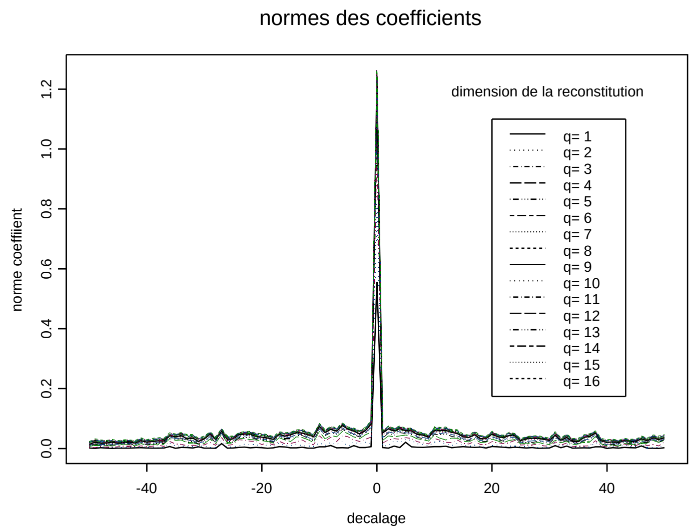

Figure 1. Normes des coefficients ACP fréquences, températures moyennes annuelles

Pour reconstituer les données, on peut soit utiliser les données de départ et une formule de moyenne mobile, soit utiliser les composantes principales, qui elles-mêmes sont des combinaisons linéaires des données de départ.

Avec la première méthode, 2 étapes restituent la quasi totalité (99.9999%) de l'inertie. En revanche, la deuxième méthode est moins performante vu que les coefficients C_m, en théorie en nombre illimité, ne sont utilisés qu'en nombre limité (car les observations de (X_n) sont en nombre fini). C'est la raison pour laquelle le taux de reconstitution sur deux axes est moins bon (95.99%), mais encore meilleur que celui de l'A.C.P. classique (94.26%).

Cela traduit le fait que les coefficients C_m, $m \neq 0$, ne sont pas négligeables même si sur le graphe le coefficient C_0 paraît beaucoup plus important que les aurtes coefficients. Pour cet exemple, l'A.C.P. dans le domaine des fréquences est meilleure que l'A.C.P. classique.

Avec le cercle des corrélations et le nuage des individus de la figure 2, on peut donner une première interprétation de cette A.C.P. classique.

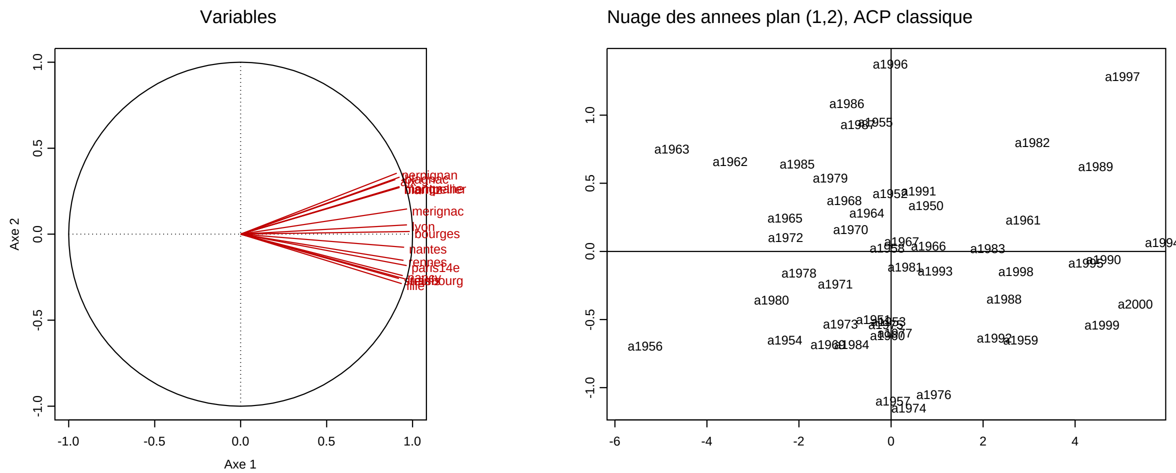

Figure 2. A.C.P. classique températures des 16 villes

L'axe 1 fait apparaître le fait que toutes les villes ont des températures très corrélées positivement. Les années sont donc ordonnées sur cet axe selon leur moyenne annuelle globalement sur ces 16 villes.

L'axe 2 ordonne à peu près les villes du nord au sud, et on peut repérer sur le nuage les années où les villes du sud ont été particulièrement chaudes, et les années où c'est au nord qu'il a fait plus chaud en moyenne par rapport aux autres années.

Pour l'A.C.P. dans le domaine des fréquences, on obtient un opérateur de covariance pour chacun des sous-intervalles de la discrétisation de $[-\pi, \pi[$. On va s'intéresser au sous-intervalle qui contient la fréquence 0. Plus k est grand, plus cet intervalle est réduit, et donc moins important pour la totalité de l'analyse.

Ci-dessous, on peut examiner les deux premiers vecteurs propres respectivement des (estimateurs des) matrices $M_Z(]-\frac{\pi}{400}, \frac{\pi}{400}[)$, $M_Z(]-\frac{\pi}{5}, \frac{\pi}{5}[)$, $M_Z([-\pi, \pi[)$. La première des matrices correspond à une partition en 799 sous-intervalles, la seconde à une partition en 9 sous-intervalles.

	799 sous-intervalles		9 sous-intervalles		ACP classique	
	f1	f2	f1	f2	f1	f2
aix	0.2371	-0.1887	0.2422	0.2455	0.2085	0.3011
biarritz	0.2606	0.1082	0.2590	0.3017	0.2321	0.2787
blagnac	0.2525	0.1961	0.2381	0.3062	0.2337	0.3433
bourges	0.2888	0.3418	0.2732	0.0507	0.2806	0.0183
lille	0.2399	-0.0704	0.2379	-0.2671	0.2543	-0.3188
lyon	0.2575	-0.3788	0.2685	0.1569	0.2781	0.0641
marignane	0.2200	-0.1932	0.2323	0.2056	0.2118	0.2600
merignac	0.2786	0.1583	0.2731	0.0650	0.2581	0.1602
montpellier	0.2439	0.1950	0.2386	0.2138	0.2037	0.2471
nancy	0.2188	-0.5333	0.2403	-0.2316	0.2633	-0.2754
nantes	0.2601	0.0521	0.2646	-0.1952	0.2686	-0.0874
paris14e	0.2574	0.1867	0.2514	-0.2423	0.2699	-0.2090
perpignan	0.2197	0.0488	0.2138	0.3667	0.2065	0.3300
reims	0.2521	0.0183	0.2475	-0.3155	0.2720	-0.3018
rennes	0.2688	0.2476	0.2684	-0.3553	0.2657	-0.1747
strasbourg	0.2313	-0.4032	0.2425	-0.2315	0.2699	-0.3093

L'A.C.P. classique peut aussi être vue comme une A.C.P. dans le domaine des fréquences quand l'intervalle $[-\pi, \pi[$ n'est pas partitionné (c'est-à-dire aussi quand il est partitionné en un seul sous-ensemble). Plus le nombre de sous-intervalles est grand, plus les vecteurs propres sont éloignés de ceux de l'A.C.P. classique. Ce sont des valeurs tout de même assez proches pour le premier axe, et plus lointaines pour le second.

Enfin, les valeurs de $\varepsilon_X^2/(2\pi) = q - \|C_0\|^2$, qui sont nulles lorsque la propriété $\mathcal{P}$ est vérifiée, ne sont pas négligeables lorsque l'intervalle $[-\pi, \pi[$ est partitionné :

	partition en 799 sous-intervalles	partition en 9 sous-intervalles
q=1	0.4448	0.0530
q=2	1.1834	0.3113
.	.	.
.	.	.
.	.	.
q=16	14.7356	11.6641

Pour considérer cette A.C.P. dans le domaine des fréquences comme une amélioration de l'A.C.P. classique, il faut garder en mémoire le fait que dans le domaine des fréquences, l'A.C.P. est réalisée sur des sous-intervalles. Le sous-intervalle qui contient la valeur 0 est celui qui contient l'information qui se répète chaque année (fréquence 0), les autres sous-intervalles correspondent chacun à une fréquence donnée en moyenne, et les phénomènes qui ressortent sont ceux qui se répètent avec la pérriodicité correspondante.

Dans l'A.C.P. classique, on fait l'hypothèse implicite que tout le phénomène se répète à chaque instant (c'est notamment le cas lorsqu'on a des données indépendantes identiquement distribuées).

Si les données étaient des observations d'une série possédant la propriété $\mathcal{P}$, les deux A.C.P. seraient équivalentes, et, notamment, les vecteurs propres dans chaque sous-intervalle seraient identiques. Donc diviser l'intervalle $[-\pi, \pi[$ aurait été inutile.

Dans le cas des données traitées ici, la différence entre les deux A.C.P. montre que tous les phénomènes ne se répètent pas à chaque instant. Donc étudier la série dans le domaine des fréquences apporte de l'information supplémentaire.

Références

[1] Boudou, A., Dauxois, J. (1988). Analyses de séries multidimensionnelles stationnaires. *Pub. du Labo. de Stat. et Proba.*, n^0 02-88.

[2] Boudou, A. (1995). Mise en œuvre de l'analyse en composantes principales d'une série stationnaire multidimensionnelle. *Pub. Inst. Stat. Univ. Paris*, **X**XXIX, fasc. 1, pp89-104.

[3] Brillinger, D.M. (2001). *Time Series Data Analysis and Theory.* Society for Industrial Applied Mathematics, Philadelphia