Spécificités de la mesure aléatoire associée à un bruit blanc

Alain Boudou [1] & Sylvie Viguier-Pla [2&1]

[1] *Equipe de Stat. et Proba., Institut de Mathématiques, UMR5219, Université Paul Sabatier, 118 Route de Narbonne, F-31062 Toulouse Cedex 9, France*
[2] *Université de Perpignan via Domitia, LAMPS, 52 av. Paul Alduy, 66860 Perpignan Cedex 9, France*
boudou@math.univ-toulouse.fr, viguier@univ-perp.fr

Résumé. Il est bien connu que toute série stationnaire est transformée de Fourier d'une mesure aléatoire. Cette dernière permet de définir la mesure spectrale de la série. Dans le cas particulier où la série est un bruit blanc, la mesure spectrale est invariante par translation. Dans ce texte, nous étudions une propriété analogue concernant la mesure aléatoire associée à un bruit blanc. Cette propriété généralise l'invariance mentionnée plus haut. Nous étudions également cette propriété lorsqu'une série est proche de son bruit blanc d'innovation.

Mots-clés. Bruit blanc, bruit blanc d'innovation, mesure aléatoire, mesure spectrale, opérateur unitaire, série stationnaire

Abstract. Any stationary series is a Fourier Transform of a random measure. That allows us to define the spectral measure of the series. In the particular case where the series is a white noise, the spectral measure is translation invariant. In this text, we study a similar property for the random measure associated with a white noise. This property generalizes the above mentioned invariance. We also study this property when a series is close to its innovation white noise.

Keywords. White noise, innovation white noise, random measure, spectral measure, unitary operator, stationary series

1 Prérequis

1.1 Mesure aléatoire

Soit H un espace de Hilbert, et $\mathcal{P}(H)$ l'ensemble des projecteurs orthogonaux de H. Une mesure aléatoire (m.a.) Z définie sur ξ, tribu de parties d'un ensemble E, est une mesure vectorielle définie sur ξ à valeurs dans H telle que $< ZA, ZB >= 0$ pour tout couple (A, B) d'éléments disjoints de ξ.

On montre alors que l'application $\mu_Z : A \in \xi \mapsto \|ZA\|^2 \in \mathbb{R}_+$ est une mesure bornée.

L'intégrale par rapport à la m.a. Z peut se définir comme l'unique isométrie de $L^2(E,\xi,\mu_Z)$ sur $H_Z = \overline{\mathrm{vect}}\{ZA; A \in \xi\}$, qui à 1_A associe ZA, pour tout A de ξ. L'image d'un élément φ de $L^2(\mu_Z)$ par cette application, notée $\int \varphi \mathrm{d}Z$, est appelée intégrale de φ par rapport à la m.a. Z.

Si $(F,\mathcal{F})$ est un deuxième espace mesurable et f une application mesurable de E dans F, alors

i) l'application $f(Z) : A \in \mathcal{F} \mapsto Zf^{-1}A \in H$ est une m.a. appelée image par f de Z;

ii) si φ est un élément de $L^2(F,\mathcal{F},\mu_{f(Z)}) = L^2(F,\mathcal{F},f(\mu_Z))$, on peut affirmer que $\varphi \circ f$ appartient à $L^2(E,\xi,\mu_Z)$ et $\int \varphi \mathrm{d}f(Z) = \int f \circ \varphi \mathrm{d}Z$.

1.2 Mesure spectrale

Une mesure spectrale à valeurs projecteurs (m.s.) $\mathcal{E}$ est une application de ξ dans $\mathcal{P}(H)$ telle que

i) $\mathcal{E}E = I_H$;

ii) $\mathcal{E}A \cup B = \mathcal{E}A + \mathcal{E}B$, pour tout couple (A,B) d'éléments disjoints de ξ;

iii) $\lim_n \mathcal{E}\mathcal{A}_n X = 0$ pour toute suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de ξ qui converge en décroissant vers $\emptyset$, et pour tout X de H.

On vérifie facilement que, pour tout X de H, l'application $Z_{\mathcal{E}}^X : A \in \xi \mapsto \mathcal{E}AX \in H$ est une m.a..

Avec les mêmes notations que précédemment, on peut affirmer que l'application $f(\mathcal{E})$: $A \in \mathcal{F} \mapsto \mathcal{E}f^{-1}A \in \mathcal{P}(H)$ est une m.s. appelée m.s. image de $\mathcal{E}$ par f.

1.3 Fonction aléatoire continue stationnaire

Dans ce texte, tout groupe topologique G est localement compact et son dual $\widehat{G}$ est à base dénombrable.

Une fonction aléatoire continue (f.a.c.) stationnaire $(X_g)_{g\in G}$, à valeurs dans H, est une famille d'éléments de H telle que

i) $< X_{g_1}, X_{g_2} >=< X_{g_1-g_2}, X_0 >$, pour tout couple (g_1,g_2) d'éléments de G;

ii) l'application $g \in G \mapsto X_g \in H$ est continue.

On montre alors qu'il existe une m.a. Z, et une seule, définie sur $\mathcal{B}_{\widehat{G}}$, tribu de Borel de $\widehat{G}$, telle que $X_g = \int (.,g)_{\widehat{G},G} \mathrm{d}Z$, pour tout g de G, Z est appelée m.a. associée à la f.a.c. stationnaire $(X_g)_{g\in G}$.

Lorsque $H = L^2(\Omega,\mathcal{A},P)$, et que $EX_g = 0$, pour tout g de G, on retrouve la définition classique de la stationnarité d'ordre 2 car $< X_{g_1}, X_{g_2} >= \mathrm{cov}(X_{g_1}, X_{g_2})$.

Lorsque $G = \mathbb{Z}$, $\widehat{\mathbb{Z}}$ est identifié à $\Pi = [-\pi;\pi[$ (par l'isomorphisme de groupe $\lambda \in \Pi \mapsto e^{i.\lambda} \in \widehat{\mathbb{Z}}$). Une f.a.c. stationnaire $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est appelée série stationnaire. La m.a. Z est définie sur $\mathcal{B}$, tribu de Borel de Π, et est telle que $X_n = \int e^{i.n} \mathrm{d}Z$, pour tout n de $\mathbb{Z}$. On rappelle que la loi qui donne à Π une structure de groupe est définie par $\lambda \oplus \lambda' = \lambda + \lambda' - 2\pi \left[\frac{\lambda+\lambda'+\pi}{2\pi}\right]$ ($\left[\frac{\lambda+\lambda'+\pi}{2\pi}\right]$ désignant la partie entière de $\frac{\lambda+\lambda'+\pi}{2\pi}$).

Lorsque $G = \Pi$, $\widehat{\Pi}$ est identifié à $\mathbb{Z}$ (par l'isomorphisme de groupe $n \in \mathbb{Z} \mapsto e^{i.n} \in \widehat{\Pi}$). La m.a. Z associée à une f.a.c. stationnaire $(X_\lambda)_{\lambda\in\Pi}$ est définie sur $\mathcal{B}_\mathbb{Z}$ (tribu de parties de $\mathbb{Z}$ constituée de tous les sous-ensembles de $\mathbb{Z}$). Pour tout λ de Π, la famille $\{e^{i\lambda n} Z(\{n\}); n \in \mathbb{Z}\}$ est sommable (cf. Choquet, 1964) de somme $\int e^{i.\lambda} \mathrm{d}Z = X_\lambda$.

1.4 Opérateur unitaire et groupe d'opérateurs unitaires

Lorsque U est un opérateur unitaire (o.u.) de H, il existe une m.s. $\mathcal{E}$, et une seule, sur $\mathcal{B}$ pour H, telle que $UX = \int e^{i.1} \mathrm{d}Z^X_\mathcal{E}$, pour tout X de H, $\mathcal{E}$ est appelée m.s. associée à l'o.u. U.

Réciproquement, si $\mathcal{E}$ est une m.s. sur $\mathcal{B}$ pour H, l'application $X \in H \mapsto e^{i.1} \mathrm{d}Z^X_\mathcal{E} \in H$ est un o.u. (de m.s. associée $\mathcal{E}$).

Pour tout g de G (G étant un groupe topologique), l'application $\widehat{h}_g$, de $\widehat{G}$ dans Π, qui à γ de $\widehat{G}$ associe le seul élément de Π, $\widehat{h}_g(\gamma)$, tel que $e^{i\widehat{h}_g(\gamma)} = (\gamma, g)_{\widehat{G},G}$, est mesurable (cf. Boudou, 2007).

Si $\mathcal{E}$ est une m.s. sur $\mathcal{B}_{\widehat{G}}$ pour H, on appelle groupe des o.u. de H déduit de $\mathcal{E}$ la famille $\{U_g; g \in G\}$ des o.u. de H telle que, pour tout g de G, l'o.u. U_g a pour m.s. associée $\widehat{h}_g(\mathcal{E})$.

On montre que

i) $U_0 = I_H$;

ii) $U_{g_1} U_{g_2} = U_{g_1+g_2}$, pour tout couple (g_1, g_2) d'éléments de G;

iii) pour tout X de H, $(U_g X)_{g\in G}$ est une f.a.c. stationnaire de m.a. associée $Z^X_\mathcal{E}$.

Dans le cas particulier où $\mathcal{E}$ est une m.s. sur $\mathcal{B}_\mathbb{Z}$ pour H, l'identification de $\mathbb{Z}$ à $\widehat{\Pi}$, mentionnée précédemment, nous permet de considérer que $\mathcal{E}$ est une m.s. sur $\mathcal{B}_{\widehat{\Pi}}$ pour H. Le groupe des o.u. de H déduit de $\mathcal{E}$ est indicé par Π, plus précisément, il est du type $\{U_\lambda; \lambda \in \Pi\}$. On montre alors que, pour tout X de H, la famille $\{e^{i\lambda n} \mathcal{E}\{n\} X; n \in \mathbb{Z}\}$ est sommable de somme $U_\lambda X$.

Si $\{(X^\lambda_g)_{g\in G}; \lambda \in \Lambda\}$ est une famille de f.a.c. stationnaires, stationnairement corrélées deux à deux, on peut affirmer qu'il existe une m.s. $\mathcal{E}$, et une seule, sur $\mathcal{B}_{\widehat{G}}$ pour $H' = \overline{\text{vect}}\{X^\lambda_g; (\lambda, g) \in \Lambda \times G\}$, telle que, si $\{U_g; g \in G\}$ désigne le groupe des o.u. de H' déduit de $\mathcal{E}$, pour tout (λ, g, g') de $\Lambda \times G \times G$, on a $U_g X^\lambda_{g'} = X^\lambda_{g+g'}$.

Pour plus de détails concernant ces rappels, le lecteur peut se référer à Boudou and Romain (2011).

2 Éléments spectraux du bruit blanc

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ un bruit blanc ($< X_n, X_m >= \delta_{n,m}$) de m.a. associée Z. Pour simplifier les notations, supposons que $H = \overline{\text{vect}}\{X_n; n \in \mathbb{Z}\}$. Par U nous désignerons l'o.u. de décalage ($UX_n = X_{n+1}$, pour tout n de $\mathbb{Z}$) et par $\mathcal{E}$ la m.s. qui lui est associée.

Comme $\{U^n; n \in \mathbb{Z}\}$ est le groupe des opérateurs de H déduit de $\mathcal{E}$, m.s. sur $\mathcal{B}$ pour H, d'après les rappels, $(U^n X_0)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une série stationnaire de m.a. associée $Z_{\mathcal{E}}^{X_0}$, d'où $Z_{\mathcal{E}}^{X_0} = Z$ (car $(U^n X_0)_{n\in\mathbb{Z}} = (X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$).

Il est facile de vérifier que $\{(e^{i\lambda n}X_n)_{\lambda\in\Pi}; n \in \mathbb{Z}\}$ est une famille de f.a.c. stationnaires stationnairement corrélées deux à deux. Il existe donc une m.s. α sur $\mathcal{B}_{\mathbb{Z}}$ pour H telle que, si $\{U_\lambda; \lambda \in \Pi\}$ est le groupe des o.u. de H déduit de α, alors $U_\lambda(e^{i\lambda' n}X_n) = e^{i(\lambda\oplus\lambda')n}X_n$, pour tout (λ, λ', n) de $\Pi \times \Pi \times \mathbb{Z}$.

Si l'on désigne par t_λ l'application $\lambda' \in \Pi \mapsto \lambda \oplus \lambda' \in \Pi$, qui est mesurable (car continue), l'opérateur unitaire $e^{i\lambda}U$ a pour m.s. associée $t_\lambda\mathcal{E}$ (en effet, $\int e^{i.1}\mathrm{d}Z_{t_\lambda\mathcal{E}}^X = \int e^{i.1} \circ t_\lambda \mathrm{d}Z_{\mathcal{E}}^X = \int e^{i\lambda}e^{i.1}\mathrm{d}Z_{\mathcal{E}}^X = e^{i\lambda}UX$).

On peut vérifier que

i) pour tout A de $\mathcal{B}$, $\mathcal{E}_\lambda A = U_\lambda \mathcal{E} A U_\lambda^*$ est un projecteur,

ii) l'application $\mathcal{E}_\lambda : A \in \mathcal{B} \mapsto \mathcal{E}_\lambda A \in \mathcal{P}(H)$ est une m.s. sur $\mathcal{B}$ pour H,

iii) l'o.u. $U_\lambda U U_\lambda^*$ a pour m.s. associée $\mathcal{E}_\lambda$.

Comme $U_\lambda U U_{\ominus\lambda} = e^{i\lambda}U$ (car, pour tout n de $\mathbb{Z}$, il vient $U_\lambda U U_\lambda^* X_n = U_\lambda U U_{\ominus\lambda} X_n e^{i0n} X_n = U_\lambda U e^{i\ominus\lambda n} X_n = e^{-i\lambda n} U_\lambda X_{n+1} = e^{-i\lambda n} U_\lambda e^{i0(n+1)} X_{n+1} = e^{-i\lambda n} e^{i\lambda(n+1)} X_{n+1} = e^{i\lambda} U X_n$), les deux derniers points et la propriété d'unicité de la m.s. associée à un o.u. permettent d'écrire : $\mathcal{E}_\lambda = t_\lambda\mathcal{E}$. D'où le résultat suivant.

Propriété 2.1. *$U_\lambda \mathcal{E} A U_\lambda^* = \mathcal{E}(A \ominus \lambda)$, pour tout (λ, A) de $\Pi \times \mathcal{B}$.*

La propriété précédente nous permet d'écrire $U_\lambda \mathcal{E} A U_\lambda^* X_0 = \mathcal{E}(A\ominus\lambda)X_0$, soit $U_\lambda \mathcal{E} A X_0 = \mathcal{E}(A \ominus \lambda)X_0$, d'où le résultat suivant.

Corollaire 2.1. *$U_\lambda Z A = Z(A \ominus \lambda)$, pour tout (λ, A) de $\Pi \times \mathcal{B}$.*

Bien entendu, de la relation $U_\lambda Z A = Z(A\ominus\lambda)$ on peut déduire : $\|U_\lambda Z A\|^2 = \|Z(A \ominus \lambda)\|^2$, soit encore $\mu_Z A = \mu_Z(A \ominus \lambda)$, c'est-à-dire l'invariance par translation de la mesure spectrale du bruit blanc, propriété du bruit blanc bien connue, qui est en quelque sorte généralisée ici.

Notons que la formule $U_\lambda Z A = Z(A \ominus \lambda)$ permet d'affirmer le résultat suivant.

Propriété 2.2. *$\{(Z(A \ominus \lambda))_{\lambda\in\Pi}; A \in \mathcal{B}\}$ est une famille de f.a.c. stationnaires, stationnairement corrélées deux à deux.*

Examinons maintenant la nature de la m.s. α. Tout d'abord, constatons que la f.a.c. stationnaire $(e^{i\lambda n}X_n)_{\lambda\in\Pi}$ a pour m.a. associée $\delta_n(.)X_n$ (la famille $\{e^{i\lambda m}\delta_n(\{m\})X_n; m \in \mathbb{Z}\}$ est sommable et a pour somme $e^{i\lambda n}X_n$). D'après les rappels, $(U_\lambda X_n)_{\lambda\in\Pi}$ est une f.a.c. stationnaire de m.a. associée $Z_\alpha^{X_n}$. Comme $(U_\lambda X_n)_{\lambda\in\Pi} = (e^{i\lambda n}X_n)_{\lambda\in\Pi}$, on peut conclure (unicité de la m.a.) que $\delta_n(.)X_n = Z_\alpha^{X_n}$. Donc si un élément A de $\mathcal{B}_{\mathbb{Z}}$ contient n (resp. ne contient pas n), $X_n = \delta_n(A)X_n = Z_\alpha^{X_n}A = \alpha A X_n$ (resp. $0 = \delta_n(A)X_n = Z_\alpha^{X_n}A = \alpha A X_n$). On peut en déduire que, pour tout m de $\mathbb{Z}$, $\alpha(\{n\})X_m = X_n \otimes X_n X_m$. Ce qui se résume par le résultat suivant.

Propriété 2.3. *$\alpha(\{n\}) = X_n \otimes X_n$, pour tout n de $\mathbb{Z}$.*

Ce dernier résultat permet de préciser la forme de U_λ comme suit.

Corollaire 2.2. *Pour tout X de H, la famille $\{e^{i\lambda n}X_n \otimes X_nX; n \in \mathbb{Z}\}$ est sommable de somme $U_\lambda X$.*

Les résultats que nous venons d'obtenir peuvent être généralisés au cas d'un groupe discret G. Un bruit blanc est défini comme une famille $(X_g)_{g\in G}$ d'éléments de H telle que $< X_{g_1}, X_{g_2} >= 0$ pour tout couple (g_1, g_2) d'éléments distincts de G et telle que $\|X_g\| = 1$, pour tout g de G. Il est facile de vérifier la condition de stationnarité ($< X_{g_1}, X_{g_2} >=< X_{g_1-g_2}, X_0 >$). Quant à la continuité de l'application $g \in G \mapsto X_g \in H$, elle résulte du fait que tout sous-ensemble de G est un ouvert de G (topologie discrète). Rappelons que $G = \mathbb{Z}^k$ est un groupe discret.

3 Cas où une série stationnaire est proche d'un bruit blanc

Examinons maintenant le cas où une série stationnaire régulière est proche de son bruit blanc d'innovation (cf. Dacunha-Castelle et Duflo, 1983, et Azencott et Dacunha-Castelle, 1984).

Soit donc une série stationnaire régulière $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ de m.a. associée Z. Désignons par P_n le projecteur sur $\overline{\text{vect}}\{X_m; m \leq n\}$ (P_n est le projecteur sur le passé antérieur à l'instant n). On montre que (Dacunha-Castelle et Duflo, 1983) $P_{n-1}U^n = P_{-1}U^n$, U désignant l'opérateur de décalage. Il vient alors :

$$W_n = X_n - P_{n-1}X_n = U^nX_0 - P_{n-1}U^nX_0 = U^nX_0 - P_{-1}U^nX_0 = U^n(X_0 - P_{-1}X_0).$$

Cela signifie que $(W_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une série stationnaire de m.a. associée $Z_{\mathcal{E}}^{W_0}$. Il est facile de vérifier que $< W_n, W_m >= 0$, pour tout couple (n, m) d'éléments distincts de $\mathbb{Z}$, donc que $(W_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est un bruit blanc que l'on nomme *bruit blanc d'innovation*. Puisque $(W_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est un bruit blanc, il existe une famille $\{U_\lambda; \lambda \in \Pi\}$ telle que $U_\lambda Z_{\mathcal{E}}^{W_0}A = Z_{\mathcal{E}}^{W_0}(A \ominus \lambda)$. Pour tout (λ, A) de $\Pi \times \mathcal{B}$, désignant par $\mathcal{E}$ la m.s. associée à U, il vient :

$$\begin{aligned}
\|U_\lambda ZA - Z(A \ominus \lambda)\| &\leq \|U_\lambda ZA - U_\lambda Z_{\mathcal{E}}^{W_0}A\| + \|U_\lambda Z_{\mathcal{E}}^{W_0}A - Z(A \ominus \lambda)\| \\
&= \|ZA - Z_{\mathcal{E}}^{W_0}A\| + \|Z_{\mathcal{E}}^{W_0}(A \ominus \lambda) - Z(A \ominus \lambda)\| \\
&= \|\mathcal{E}AX_0 - \mathcal{E}AW_0\| + \|\mathcal{E}(A \ominus \lambda)W_0 - \mathcal{E}(A \ominus \lambda)X_0\| \\
&\leq 2\|X_0 - W_0\|.
\end{aligned}$$

En conclusion, si $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est proche de son bruit blanc d'innovation, donc si $\|X_0 - W_0\| = \|X_n - W_n\|$ est petit, alors il existe un groupe d'o.u., déduit d'une m.s., $\{U_\lambda; \lambda \in \Pi\}$, tel que, pour tout (λ, A) de $\Pi \times \mathcal{B}$, $Z(A \ominus \lambda)$ est proche de $U_\lambda ZA$. Notons que l'hypothèse de régularité permet d'affirmer que $\overline{\text{vect}}\{X_n; n \in \mathbb{Z}\} = \overline{\text{vect}}\{W_n; n \in \mathbb{Z}\}$.

Bibliographie

[1] Azencott, R. et Dacunha-Castelle, D. (1984). *Séries d'observations irrégulières.* Masson, Paris.

[2] Boudou, A. (2007). Groupe d'opérateurs unitaires déduit d'une mesure spectrale - une application. *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I* **344** 791-794.

[3] Boudou, A. and Romain, Y. (2011). *On product measures associated with stationary processes.* The Oxford handbook of functional data analysis, 423-451, Oxford Univ. Press, Oxford.

[4] Choquet, G. (1964), *Cours d'analyse. Tome II. Topologie*, Masson, Paris.

[5] Dacunha-Castelle, D. et Duflo, M. (1983), *Probabilités et statistiques. 2. Problèmes à temps mobile*, Masson, Paris.