Relation entre proximité de mesures aléatoires et proximité de séries stationnaires

Alain BOUDOU[1] et Sylvie VIGUIER-PLA[1&2]

[1] *Equipe de Stat. et Proba., Institut de Mathématiques, UMR5219*
Université Paul Sabatier, 118 Route de Narbonne, F-31062 Toulouse Cedex 9, France
boudou@math.univ-toulouse.fr, viguier@math.univ-toulouse.fr
[2] *Université de Perpignan Via Domitia*
52 av. Paul Alduy - F-66860 Perpignan Cedex 9

Résumé. Après avoir défini une distance entre mesures aléatoires, nous établissons une équivalence entre proximité de deux mesures aléatoires et proximité des séries stationnaires qui en sont déduites.

Mots-clés. Série stationnaire, mesure aléatoire, mesure spectrale, opérateur unitaire

Abstract. We first define a distance in the set of the random measures. Then, we establish an equivalence between the proximity of random measures and proximity of their associated stationary series.

Keywords. Stationary series, random measure, spectral measure, unitary operator

1 Introduction

Le but de cet exposé est l'étude de la proximité entre deux séries stationnaires. Ce travail s'inscrit dans un contexte plus général de comparaison de fonctions aléatoires, comme on peut le trouver dans une bibliographie très large (citons, par exemple, Horváth and Kokoska, 2012, pour de récents développements). Nous considérons deux séries stationnaires $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ et $(X'_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, de m.a. associées respectivement Z et Z'. Nous définissons la commutativité entre elles, notion qui généralise celle de stationnarité corrélée. Sous hypothèse de commutativité, nous établissons une équivalence entre la proximité de $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ et $(X'_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ et la proximité de Z et Z'. Nous utilisons pour cela la notion d'écart entre mesures spectrales associées à ces séries (cf. Boudou and Viguier-Pla, 2016).

Ces résultats sont généralisables aux séries stationnaires indicées par $\mathbb{Z}^k$, et aux fonctions aléatoires continues stationnaires du type $(X_t)_{t\in\mathbb{R}^k}$ ou $(X_\lambda)_{\lambda\in[-\pi;\pi[^k}$. Dans un souci de simplification, cet exposé a été développé dans le cadre des séries.

Nous pourrions illustrer ces propriétés de proximité à l'aide de simulations.

2 Notations et rappels

Dans ce texte, H désigne un $\mathbb{C}-$espace de Hilbert et $\mathcal{P}(H)$ l'ensemble des projecteurs orthogonaux, $\mathcal{B}$ est la tribu des boréliens de $\Pi = [-\pi;\pi[$.

2.1 Mesure aléatoire et série stationnaire

Une mesure aléatoire (m.a.) Z est une mesure vectorielle définie sur $\mathcal{B}$, à valeurs dans H, telle que $< ZA, ZB >= 0$, pour tout couple (A, B) d'éléments disjoints de $\mathcal{B}$.

Il est facile de vérifier que :
l'application $\mu_Z : A \in \mathcal{B} \mapsto \|ZA\|^2 \in \mathbb{R}_+$ est une mesure bornée.

L'intégrale stochastique, relativement à la m.a. Z, peut être définie comme l'unique isométrie de $L^2(\Pi, \mathcal{B}, \mu_Z)$ sur $\overline{vect}\{ZA; A \in \mathcal{B}\}$ qui à 1_A associe ZA, cela quelque soit A de $\mathcal{B}$. L'image d'un élément φ de $L^2(\mu_Z)$ par cette isométrie est notée $\int \varphi dZ$.

Une série stationnaire est une
famille $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ d'éléments de H telle que $< X_n, X_m >=< X_{n-m}, X_0 >$, pour tout couple (n, m) d'éléments de $\mathbb{Z}$.

Bien entendu, lorsque H est de type $L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et lorsque $E(X_n) = 0$, on retrouve la définition classique de la stationnarité au sens large : $< X_n, X_m >= \mathrm{cov}(X_n, X_m)$.

On montre que
si Z est une m.a., alors $(\int e^{i.n} dZ)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une série stationnaire.

Réciproquement,
à toute série stationnaire $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ d'éléments de H, on peut associer une m.a. Z, et une seule, à valeurs dans H, telle que $X_n = \int e^{i.n} dZ$, pour tout n de $\mathbb{Z}$.

Deux séries stationnaires $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ et $(X'_n)_{n\in\mathbb{Z}}$
sont stationnairement corrélées lorsque $< X_n, X'_m >=< X_{n-m}, X'_0 >$, pour tout couple (n, m) d'éléments de $\mathbb{Z}$.

La stationnarité corrélée peut aussi s'exprimer au moyen des m.a..
Deux séries stationnaires sont stationnairement corrélées si et seulement si les m.a. qui leur sont respectivement associées, Z et Z', sont telles que $< ZA, Z'B >= 0$, pour tout couple (A, B) d'éléments disjoints de $\mathcal{B}$.

2.2 Mesure spectrale et opérateur unitaire

Examinons maintenant la notion de mesure à valeurs projecteurs.
Une mesure spectrale (m.s.) $\mathcal{E}$ sur ξ, tribu des parties de E, pour H, est une application de ξ dans $\mathcal{P}(H)$ telle que
i) $\mathcal{E}E = I_H$;
ii) $\mathcal{E}(A \cup B) = \mathcal{E}A + \mathcal{E}B$, pour tout couple (A, B) d'éléments disjoints de ξ;
iii) pour toute suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de ξ qui converge en décroissant vers $\emptyset$, et pour tout X de H, nous avons $lim \mathcal{E}A_n X = 0$.

On peut vérifier que, lorsque $\mathcal{E}$ est une m.s. sur $\mathcal{B}$ pour H,
Pour tout X de H, l'application $Z^X_{\mathcal{E}} : A \in \mathcal{B} \mapsto \mathcal{E}AX \in H$ est une m.a. à valeurs dans H.

On montre également que

l'application $U : X \in H \mapsto \int e^{i.1} dZ_{\mathcal{E}}^X \in H$ *est un opérateur unitaire.*

Réciproquement,

à tout opérateur unitaire U *de* H *on peut associer une, et une seule, m.s.* $\mathcal{E}$ *sur* $\mathcal{B}$ *pour* H*, telle que* $UX = \int e^{i.1} dZ_{\mathcal{E}}^X$*, pour tout* X *de* H*.*

On peut vérifier que *si* U *est un opérateur unitaire de* H*, de m.s. associée* $\mathcal{E}$*, alors* $(U^n X)_{n\in\mathbb{Z}}$ *est une série stationnaire de m.a. associée* $Z_{\mathcal{E}}^X$*.*

Lorsque (E, ξ) et $(F, \mathcal{F})$ sont deux espaces mesurables, f est une application de E dans F mesurable, et $\mathcal{E}$ une m.s. sur ξ pour H, alors

l'application $f(\mathcal{E}) : A \in \mathcal{F} \mapsto \mathcal{E} f^{-1} A \in \mathcal{P}(H)$ *est une m.s. sur* $\mathcal{F}$ *pour* H *appelée m.s. image de* $\mathcal{E}$ *par* f*.*

Si $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$ sont deux m.s. sur $\mathcal{B}$ pour H qui commutent (c'est-à-dire telles que $\mathcal{E}_1 A \mathcal{E}_2 B = \mathcal{E}_2 B \mathcal{E}_1 A$, pour tout (A, B) de $\mathcal{B} \times \mathcal{B}$), alors

il existe une m.s. et une seule sur $\mathcal{B} \otimes \mathcal{B}$ *pour* H*, notée* $\mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2$*, telle que* $\mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2 (A \times B) = \mathcal{E}_1 A \mathcal{E}_2 B$*, pour tout* (A, B) *de* $\mathcal{B} \times \mathcal{B}$*.*

Désignant par $[x]$ la partie entière d'un réel x, si l'on note $\mathcal{S}$ l'application mesurable $(\lambda_1, \lambda_2) \in \Pi \times \Pi \mapsto \lambda_1 + \lambda_2 - 2\pi[\frac{\lambda_1+\lambda_2+2\pi}{2\pi}] \in \Pi$, alors

$\mathcal{E}_1 * \mathcal{E}_2 = \mathcal{S}(\mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2)$*, image de* $\mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2$ *par* $\mathcal{S}$*, est appelée produit de convolution de* $\mathcal{E}_1$ *et* $\mathcal{E}_2$*.*

Deux opérateurs unitaires U_1 et U_2 commutent si et seulement si les m.s. $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$ qui leur sont respectivement associées commutent, et on peut affirmer que

$\mathcal{E}_1 * \mathcal{E}_2$ *est la m.s. associée à l'opérateur unitaire* $U_1 U_2$*.*

Si l'on désigne par w l'application mesurable $\lambda \in \Pi \mapsto -\lambda - 2\pi[\frac{-\lambda+\pi}{2\pi}] \in \Pi$, alors

lorsque U *est un opérateur unitaire de m.s. associée* $\mathcal{E}$*,* $w\mathcal{E}$ *est la m.s. associée à l'opérateur unitaire* U^**.*

Pour approfondir les rappels que nous venons d'examiner succinctement, on peut consulter Boudou (2007) ou Boudou and Romain (2011).

Introduisons maintenant la notion de commutativité entre deux séries stationnaires avec une nouvelle définition.

Définition 2.2.1. *Nous dirons que deux séries stationnaires,* $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ *et* $(X'_n)_{n\in\mathbb{Z}}$*, de m.a. associées respectivement* Z *et* Z'*, commutent s'il existe deux m.s.* $\mathcal{E}$ *et* $\mathcal{E}'$*, sur* $\mathcal{B}$ *pour* H*, qui commutent et telles que* $Z = Z_{\mathcal{E}}^{X_0}$ *et* $Z' = Z_{\mathcal{E}'}^{X'_0}$*.*

Cela signifie, d'une façon grossière, que les opérateurs de décalage commutent. Cela généralise la stationnarité corrélée. En effet, deux séries stationnaires et stationnairement corrélées commutent. La réciproque n'est pas toujours vraie.

2.3 Écart entre mesures spectrales

Dans cette section, nous allons présenter des outils qui sont développés dans Boudou and Viguier-Pla (2016).

L'objectif étant de mesurer l'écart entre m.s., nous allons nous appuyer sur une relation d'ordre partiel bien connue définie sur l'ensemble des projecteurs de H.

Nous dirons que le projecteur P est inférieur au projecteur Q, et nous noterons $P \ll Q$, lorsque $PQ = P$. Pour tout X de H, nous avons alors $\|PX\| \leq \|QX\|$.

Toute famille de projecteurs possède une borne supérieure et une borne inférieure. Étant donnée une suite de projecteurs $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on peut alors poser $\liminf (P_n)_{n\in\mathbb{N}} = \sup\{\inf\{P_m; m \geq n\}; n \in \mathbb{N}\}$ et $\limsup (P_n)_{n\in\mathbb{N}} = \inf\{\sup\{P_m; m \geq n\}; n \in \mathbb{N}\}$. On a alors $\liminf (P_n)_{n\in\mathbb{N}} \ll \limsup (P_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Lorsque $P = lim\,inf (P_n)_{n\in\mathbb{N}} = lim\,sup\,(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on dit que la suite $r-$converge vers P, ce que l'on note $lim^r_n P_n = P$. La $r-$convergence implique alors la convergence ponctuelle.

À partir de cette relation d'ordre, on peut définir un outil voisin de la distance.

Pour tout couple de projecteurs (P, Q), on note $d(P, Q) = sup\{P, Q\} - inf\{P, Q\}$.

Cet écart n'est pas une distance : $d(P, Q)$ est un projecteur et non un élément de $\mathbb{R}_+$. Il possède cependant des propriétés très similaires. En particulier

Une suite de projecteurs $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $r-$converge vers P si et seulement si $lim^r_n d(P_n, P) = 0$.

La définition suivante vient alors naturellement.

On appelle écart entre deux m.s. $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$, sur $\mathcal{B}$ pour H, le projecteur $sup\{\, d(\mathcal{E}A, \mathcal{E}'A); A \in \mathcal{B}\}$, que l'on note $E_{\mathcal{E},\mathcal{E}'}$.

On montre que

si $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$ sont les m.s. respectivement associées aux opérateurs unitaires U et U', alors, quelque soit X de H, on a :

i) $\|U^n X - U'^n X\| \leq 2\|E_{\mathcal{E},\mathcal{E}'}(X)\|$, pour tout n de $\mathbb{Z}$; (1)

ii) lorsqu'il y a commutativité, on a : $E_{\mathcal{E},\mathcal{E}'} = (w\mathcal{E} * \mathcal{E}')(\complement\{0\})$.

3 Distance entre mesures aléatoires

Nous allons utiliser une notion voisine de la partition.

Definition 3.1. *Nous dirons qu'une famille finie d'éléments de $\mathcal{B}$, $\{A_j; j \in J\}$, est une famille exhaustive (f.e.) lorsque $A_i \cap A_{j'} = \emptyset$, pour tout couple (j, j') d'éléments distincts de J, et $\cup_{j\in J} A_j = \Pi$.*

Si l'on désigne par $\mathcal{M}$ l'ensemble des m.a., on peut montrer la proposition suivante.

Proposition 3.1. *L'application $d : (Z, Z') \in \mathcal{M}\times\mathcal{M} \mapsto (sup\{\sum_{j\in J} \|ZA_j - Z'A_j\|^2; \{A_j; j \in J\}$ f.e.$\})^{1/2} \in \mathbb{R}_+$ est une distance.*

Si $\mathcal{E}$ est une m.s. sur $\mathcal{B}$ pour H, pour toute f.e. $\{A_j; j \in J\}$, on a : $\sum_{j\in J} \|Z^X_{\mathcal{E}} A_j - Z^{X'}_{\mathcal{E}} A_j\|^2 = \sum_{j\in J} \|\mathcal{E}A_j(X - X')\|^2 = \|X - X'\|^2$, d'où ce qui suit.

Proposition 3.2. *Lorsque $\mathcal{E}$ est une m.s. sur $\mathcal{B}$ pour H, pour tout X de H, on a : $d(Z^X_{\mathcal{E}}, Z^{X'}_{\mathcal{E}}) = \|X - X'\|$.*

Il est possible d'exprimer l'écart entre m.s. au moyen des f.e..

Proposition 3.3. *Étant données $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$ deux m.s. sur $\mathcal{B}$ pour H, si l'on désigne par $\mathcal{P}_{\mathcal{E},\mathcal{E}'}$ la famille des projecteurs du type $I - \sum_{j\in J} inf\{\mathcal{E}A_j, \mathcal{E}'A_j\}$, où $\{A_j; j\in J\}$ est une f.e., on a alors $E_{\mathcal{E},\mathcal{E}'} = sup\mathcal{P}_{\mathcal{E},\mathcal{E}'}$.*

Examinons un "pseudo-algorithme" qui permet d'obtenir le projecteur écart entre deux m.s..

Pour tout $n \geq 1$, posons $A_{n,k} = [-\pi + k\frac{2\pi}{2^n}; -\pi + (k+1)\frac{2\pi}{2^n}[$, cela quelque soit k de $\{0, 1, \dots, 2^n - 1\}$. Il est clair que $\{A_{n,k}; k = 0, 1, \dots, 2^n - 1\}$ est une f.e.. On a alors le résultat suivant.

Proposition 3.4. *Si $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$ sont deux m.s. sur $\mathcal{B}$ pour H, alors la suite de projecteurs $(I - \sum_{k=0}^{2^n-1} inf\{\mathcal{E}A_{n,k}, \mathcal{E}'A_{n,k}\})_{n\in\mathbb{N}^*}$ $r-$converge vers $E_{\mathcal{E},\mathcal{E}'}$.*

On peut alors établir ce qui suit.

Proposition 3.5. *Si $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$ sont deux m.s. sur $\mathcal{B}$ pour H qui commutent, alors, pour tout X de H, on a : $d(Z^X_{\mathcal{E}}, Z^X_{\mathcal{E}'}) = \sqrt{2}\|E_{\mathcal{E},\mathcal{E}'}(X)\|$.*

Démonstration. Comme les m.s. $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$ commutent, pour tout A de $\mathcal{B}$, on a $\inf\{\mathcal{E}A, \mathcal{E}'A\} = \mathcal{E}A\mathcal{E}'A$. Et donc lorsque $\{A_j; j \in J\}$ est une f.e., il vient

$$\sum_{j\in J} \|Z^X_{\mathcal{E}}A_j - Z^X_{\mathcal{E}'}A_j\|^2 = 2\|(I - \sum_{j\in J} \inf\{\mathcal{E}A_j, \mathcal{E}'A_j\})X\|^2 \leq 2\|E_{\mathcal{E},\mathcal{E}'}\|^2.$$

Pour conclure, il suffit de constater que

$$\lim_n \sum_{k=0}^{2^n-1} \|Z^X_{\mathcal{E}}A_{n,k} - Z^X_{\mathcal{E}'}A_{n,k}\|^2 = 2\lim_n\|(I - \sum_{k=0}^{2^n-1} \inf\{\mathcal{E}A_{n,k}, \mathcal{E}'A_{n,k}\})X\|^2 = 2\|E_{\mathcal{E},\mathcal{E}'}X\|^2$$

car $\lim^r_n(I - \sum_{k=0}^{2^n-1} \inf\{\mathcal{E}A_{n,k}, \mathcal{E}'A_{n,k}\}) = E_{\mathcal{E},\mathcal{E}'}$ et que la $r-$convergence implique la convergence ponctuelle. □

4 Proximité de mesures aléatoires et proximité de séries stationnaires

Dans ce paragraphe, nous établissons que, sous certaines conditions, des séries stationnaires sont proches lorsque les m.a. associées le sont.

D'après *(1)* et la proposition 3.5, on établit le résultat suivant.

Proposition 4.1. *Lorsque deux opérateurs unitaires U et U', de m.s. associées respectivement $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$, commutent, alors, pour tout X de H, on a : $sup\{\|U^nX - U'^nX\|; n \in \mathbb{Z}\} \leq \sqrt{2}d(Z^X_{\mathcal{E}}, Z^X_{\mathcal{E}'})$.*

L'hypothèse de commutativité est *nécessaire*. En effet, on peut trouver des exemples où l'inégalité est fausse lorsque $UU' \neq U'U$. Le résultat que nous venons d'établir exige que $U^0X = X = U'^0X$. On peut se débarrasser de cette contrainte.

Proposition 4.2. *Si $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ et $(X'_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ sont des séries stationnaires, de m.a. associées Z et Z', qui commutent, alors on a $sup\{\|X_n - X'_n\|; n \in \mathbb{Z}\} \leq (1 + 2\sqrt{2})d(Z, Z')$.*

Démonstration. Pour cela, on utilise la définition des séries qui commutent, les propriétés de la distance, et les propositions 3.2 et 4.1. □

5 Proximité de séries stationnaires et proximité de mesures aléatoires

Cette dernière section est en quelque sorte la réciproque de la précédente : la proximité entre séries stationnaires implique la proximité entre m.a., toujours sous hypothèse de commutativité. Pour cela, nous allons utiliser la propriété d'ergodicité suivante.

Lemme 5.1. *Si $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une série stationnaire de m.a. associée Z, alors $\|Z\{0\} - X_0\| \leq sup\{\|X_n - X_0\|; n \in \mathbb{Z}\}$.*

Démonstration. Cela se déduit de $Z\{0\} = \lim_n \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$. $\square$

On peut alors établir le résultat suivant.

Proposition 5.1. *Si U et U' sont deux opérateurs unitaires de H, de m.s. associées respectivement $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$, qui commutent, alors, pour tout X de H, on a : $d(Z^X_{\mathcal{E}}, Z^X_{\mathcal{E}'}) \leq \sqrt{2} sup\{\|U^n X - U'^n X\|; n \in \mathbb{Z}\}$.*

Démonstration. D'après le fait que $(U^{-n}U'^n X)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une série qui a pour m.a. associée $Z^X_{w\mathcal{E}*\mathcal{E}'}$, le lemme 5.1 et la proposition 3.5 permettent de conclure. $\square$

Tout comme la proposition 4.1 a pu être généralisée, la proposition 5.1 peut être étendue.

Proposition 5.2. *Si $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ et $(X'_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ sont des séries stationnaires qui commutent, de m.a. associées Z et Z', alors $d(Z, Z') \leq (1 + 2\sqrt{2}) sup\{\|X_n - X'_n\|; n \in \mathbb{Z}\}$.*

Bibliographie

[1] Boudou, A. (2007). Groupe d'opérateurs unitaires déduit d'une mesure spectrale - une application. *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I* **344** 791-794.

Boudou, A. and Romain, Y. (2011). *On product measures associated with stationary processes.* The Oxford handbook of functional data analysis, 423-451, Oxford Univ. Press, Oxford.

Boudou, A. and Viguier-Pla, S. (2016). Gap between orthogonal projectors - Applications to stationary processes. *J. Mult. Anal.* to appear.

Horváth, L. and Kokoszka, P. (2012). *Inference for Functional Data with Applications.* Springer Series in Statistics, New-York.