Une généralisation de la notion de fonctions aléatoires stationnairement corrélées

Alain BOUDOU et Sylvie VIGUIER-PLA

Equipe de Stat. et Proba., Institut de Mathématiques, UMR5219,
Université Paul Sabatier, 118 Route de Narbonne, F-31062 Toulouse Cedex 9, France
boudou@math.univ-toulouse.fr, viguier@math.univ-toulouse.fr

Résumé. Nous introduisons une notion qui généralise celle de stationnarité corrélée : la notion de fonctions aléatoires continues (f.a.c.) stationnaires qui commutent. Elle pourrait être définie par la commutativité des opérateurs de décalage.

Exemple 1. Si $(W_{n,m})_{(n,m)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}$ est une série stationnaire, alors les séries $(W_{n,0})_{n\in\mathbb{Z}}$ et $(W_{0,n})_{n\in\mathbb{Z}}$ sont stationnaires et commutent.

Exemple 2. Si $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une série stationnaire, alors $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ et $(X_{3n})_{n\in\mathbb{Z}}$ sont stationnaires et commutent.

Lorsque deux fonctions sont stationnairement corrélées, elles commutent, la réciproque n'est pas vraie.

En effet, dans l'exemple 1, il n'y a pas stationnarité corrélée, car

$$< W_{n,0}, W_{0,m} >=< W_{n,-m}, W_{0,0} >\neq< W_{n-m,0}, W_{0,0} >.$$

Dans le second exemple, il en est de même :

$$< X_{3n}, X_m >=< X_{3n-m}, X_0 >\neq< X_{3(n-m)}, X_m >.$$

Nous donnons plusieurs définitions équivalentes de cette notion. Voici l'une d'elles.

Définition 1. *On dit que deux séries $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ et $(Y_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ commutent s'il existe deux opérateurs unitaires U et V tels que $X_n = U^n X_0$, $Y_n = V^n Y_0$, et $UV = VU$.*

Nous étudions différentes propriétés asymptotiques associées à cette notion, dont les suivantes, exprimées dans le cas des séries.

Propriété 1. *Si deux séries stationnaires $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ et $(Y_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ commutent et sont telles que $lim_{n\to\infty}(X_n - Y_n) = 0$, alors elles sont égales.*

Pour démontrer un tel résultat, nous commençons par l'établir dans le cas particulier où $Y_n = Y_0$ (pour tout n de $\mathbb{Z}$), ensuite, nous le généralisons en utilisant la série auxiliaire $((V^{-1}U)^n X_0)_{n\in\mathbb{Z}}$.

Propriété 2. *Si deux séries stationnaires $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ et $(Y_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ commutent et sont telles que, pour tout $n > N$, N étant un entier quelconque, $\|X_n - Y_n\| \leq \alpha$, alors, pour tout n de $\mathbb{Z}$, $\|X_n - Y_n\| \leq 3\alpha$, et, désignant par Z_X et Z_Y les mesures aléatoires respectivement associées aux séries $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ et $(Y_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, $\|Z_X A - Z_Y A\| \leq 3\alpha$, pour tout borélien A de $[-\pi, \pi[$.*

Par des contre-exemples, nous montrons la nécessité de l'hypothèse de commutativité.

Cette dernière propriété indique que la connaissance d'une proximité partielle entre les deux séries induit la connaissance d'une proximité pour l'ensemble des deux séries.

Nous examinons ensuite comment, à partir de deux f.a.c. stationnaires qui ne commutent pas, nous pouvons "extraire" des parties qui commutent. Pour cela, nous introduisons la notion de commutateur de deux opérateurs unitaires.

Définition 2. *Etant donnés deux opérateurs unitaires U et V (qui peuvent être des opérateurs de décalage), on appelle commutateur de U et V tout projecteur D tel que $DU = UD$, $DV = VD$, et $UDV = VDU$.*

Nous montrons qu'il existe un commutateur maximal, relativement à une relation d'ordre partiel.

Nous explorons, sur des exemples simulés, chacune de ces propriétés, et voyons comment celles-ci peuvent être exploitées sur des exemples concrets.

Notre travail s'est concentré sur l'étude des séries. Cependant, ces résultats s'étendent lorsque l'ensemble d'indiçage est $\mathbb{R}$.

Mots-clés. Commutativité, Fonctions aléatoires continues, Mesures aléatoires, Processus stationnaires

Abstract. We introduce and examine the notion of stationary continuous random functions (c.r.f.) which commute. This notion generalizes the notion of stationarily correlated functions. When two f.a.c.'s are stationarily correlated, they commute. The converse is not true. For example, when $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ is a stationary series, the stationary series $(X_{3n})_{n\in\mathbb{Z}}$ commutes with $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, although these two series are not necessarily stationarily correlated.

We give several equivalent definitions of this notion. We study several assymptotic associated properties, and we examine how, from two c.r.f.'s which do not commute, we can extract parts which commute.

We explore on simulated examples of processes each of these properties, and see how they can be exploited in concrete applications.

Keywords. Commutativity, Continuous random functions, Random measures, Stationary processes

AMS subject classification. 60G57, 60G10, 60B15, 60H05

Bibliographie

Azencott, R. and Dacunha-Castelle, D. (1984). *Séries d'observations irrégulières.* Masson, Paris.

Bosq, D. (2000). *Linear Processes in Function Spaces. Theory and Applications.* Lecture notes in statistics, **149**, Springer, Berlin.

Boudou, A. (2007). Groupe d'opérateurs unitaires déduit d'une mesure spectrale - une application. *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I* **344** 791-794.

Boudou, A. and Romain, Y. (2011). *On product measures associated with stationary processes.* The Oxford handbook of functional data analysis, 423-451, Oxford Univ. Press, Oxford.

Boudou, A. and Viguier-Pla, S. (2010) Relation between unit operators proximity and their associated spectral measures. *Statist. Probab. Lett.* **80**, no. 23-24, 1724-1732.