# Proximité de fonctions stationnaires

Alain BOUDOU and Sylvie VIGUIER-PLA
Equipe de Stat. et Proba., Institut de Mathématiques, UMR5219,
Université Paul Sabatier, 118 Route de Narbonne, F-31062 Toulouse Cedex 9, France
boudou@math.univ-toulouse.fr, viguier@math.univ-toulouse.fr

**Résumé**.

Dans ce texte, $G$ est un groupe abélien localement compact, dont le dual $\widehat{G}$ est à base dénombrable. Une fonction aléatoire continue (f.a.c.) stationnaire $(X_g)_{g\in G}$, définie sur $G$, est une famille d'éléments de $L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ($\mathbb{C}-$Hilbert séparable) telle que l'application $g \in G \mapsto X_g \in L^2$ soit continue et telle que $< X_g, X_{g'} >=< X_{g-g'}, X_0 >$ pour tout couple $(g, g')$ d'éléments de $G$.

Une mesure aléatoire (m.a.) est une mesure vectorielle $Z$, définie sur $\mathcal{B}_{\widehat{G}}$, tribu de Borel de $\widehat{G}$, à valeurs dans $L^2$ telle que $< Z(A), Z(B) >= 0$, pour tout couple $(A, B)$ d'éléments disjoints de $\mathcal{B}_{\widehat{G}}$.

On montre alors que l'application $\mu_Z : A \in \mathcal{B}_{\widehat{G}} \mapsto \|ZA\|^2 \in \mathbb{R}_+$ est une mesure bornée. L'intégrale stochastique peut alors se définir comme l'unique isométrie de $L^2(\widehat{G}, \mathcal{B}_{\widehat{G}}, \mu_Z)$ sur $H_Z = \overline{\text{vect}}\{ZA, A \in \mathcal{B}_{\widehat{G}}\}$, qui à $1_A$ associe $ZA$, cela quelque soit $A$ de $\mathcal{B}_{\widehat{G}}$. L'image d'un élément $\varphi$ de $\mathcal{L}^2(\mu_Z)$ est notée $\int \varphi \mathrm{d}Z$ et est appelée intégrale de $\varphi$ relativement à la m.a. $Z$.

On peut montrer qu'à toute f.a.c. stationnaire $(X_g)_{g\in G}$ on peut associer une, et une seule m.a. $Z$, telle que $X_g = \int (\gamma, g)_{\widehat{G},G} \mathrm{d}Z(\gamma)$, pour tout $g$ de $G$.

Etant donné que pour tout $g$ de $G$, nous avons $X_g = Z(\{0_{\widehat{G}}\}) + \int 1_{\widehat{G}-\{0\}}(\gamma)(\gamma, g)_{\widehat{G},G} \mathrm{d}Z(\gamma)$.

On peut dire que $Z(\{0_{\widehat{G}}\})$ est "commun" à tous les $X_g$. Si ces derniers sont tous proches d'un élément de $L^2$, il est légitime de penser qu'il en est de même de $Z(\{0_{\widehat{G}}\})$. D'où la définition.

**Définition 1**. *Nous dirons que $G$ possède la propriété de continuité lorsque pour toute f.a.c. stationnaire et pour tout $h$ de $L^2$ nous avons $\|Z\{0\} - h\| \leq sup\{\|X_g - h\|; g \in G\}$.*

Ainsi, $\|X_g - h\| \leq \varepsilon$ pour tout $g$ de $G$, implique $\|Z\{0\} - h\| \leq \varepsilon$. Les groupes $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{Z}^k$, $\mathbb{R}^k$, $\Pi$ et $\Pi^k$, c'est-à-dire tous les groupes que l'on rencontre dans le cadre des processus stationnaires, possèdent cette propriété. Dans la suite du texte, nous supposerons que c'est également le cas du groupe $G$ ici considéré.

Une mesure spectrale (m.s.) sur $\xi$, tribu de parties d'un ensemble $E$, est une application $\mathcal{E}$ de $\xi$ sur $\mathcal{P}$, ensemble des projecteurs orthogonaux de $L^2(\mathcal{A})$, telle que

$-$ $\mathcal{E}E = I$;

$-$ $\mathcal{E}A \cup B = \mathcal{E}A + \mathcal{E}B$ pour tout couple $(A, B)$ d'éléments disjoints de $\xi$;

$-$ $\lim_{n\to\infty} \mathcal{E}A_n X = 0$ pour tout suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\xi$ qui converge en décroissant vers $\emptyset$ et pour tout $X$ de $L^2$.

Il est facile de vérifier que, pour tout $X$ de $L^2$, l'application $Z_{\mathcal{E}}^X : A \in \xi \mapsto \mathcal{E}A \in L^2$ est une m.a..

Si $(F, \mathcal{F})$ est un deuxième espace mesurable et $f$ une application de $E$ dans $F$ mesurable, l'application $f(\mathcal{E}) : A \in \mathcal{F} \mapsto \mathcal{E}f^{-1}A \in \mathcal{P}$ est une m.s., sur $\mathcal{F}$, appelée m.s. image de $\mathcal{E}$ par $f$.

Etant donné deux m.s. $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$ sur $\mathcal{B}_{\widehat{G}}$ qui commutent, c'est-à-dire telles que $(\mathcal{E}_1A_1)(\mathcal{E}_2A_2) = (\mathcal{E}_2A_2)(\mathcal{E}_1A_1)$, pour tout couple $(A_1, A_2)$ d'éléments de $\mathcal{B}_{\widehat{G}}$, on peut montrer qu'il existe une, et une seule, m.s., notée $\mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2$, sur $\mathcal{B}_{\widehat{G}} \otimes \mathcal{B}_{\widehat{G}}$, telle que $\mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2(A_1 \times A_2) = (\mathcal{E}_1A_1)(\mathcal{E}_2A_2)$. On appelle alors produit de convolution de $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$, que l'on note $\mathcal{E}_1 * \mathcal{E}_2$, la m.s. sur $\mathcal{B}_{\widehat{G}}$ image de $\mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2$ par l'application mesurable $(\gamma_1, \gamma_2) \in \widehat{G} \times \widehat{G} \mapsto \gamma_1 + \gamma_2 \in \widehat{G}$.

Losque $\mathcal{E}$ est une m.s. sur $\mathcal{B}_\Pi$, tribu de Borel de $[-\pi, \pi[$, groupe identifiable au dual de $\mathbb{Z}$, l'application $U : X \in L^2 \mapsto \int \mathrm{e}^{i\lambda} \mathrm{d}Z_{\mathcal{E}}^X(\lambda) \in L^2$ est un opérateur unitaire appelé opérateur unitaire déduit de la m.s. $\mathcal{E}$.

Si $g$ est un élément de $G$, l'application $h_g$, qui à $\gamma$ de $\widehat{G}$ associe l'unique élément $h_g(\gamma)$ de $[-\pi, \pi[$ tel que $\mathrm{e}^{ih_g(\gamma)} = (\gamma, g)_{\widehat{G},G}$ est continue. Lorsque $\mathcal{E}$ est une m.s. sur $\mathcal{B}_{\widehat{G}}$, si $U_g$ est l'opérateur unitaire déduit de $h_g\mathcal{E}$, m.s. sur $\mathcal{B}_\Pi$, on appelle groupe des opérateurs unitaires déduit de $\mathcal{E}$ la famille $\{U_g; g \in G\}$.

On peut alors vérifier que, pour tout $X$ de $L^2$, $(U_g X)_{g\in G}$ est une f.a.c. stationnaire de m.a. associée $Z^X_{\mathcal{E}}$.

On montre que lorsque $\{U^1_g; g\in G\}$ et $\{U^2_g; g\in G\}$ sont les groupes d'opérateurs unitaires respectivement déduits de $\mathcal{E}_1$ et de $\mathcal{E}_2$, m.s. sur $\mathcal{B}_{\widehat{G}}$ qui commutent, alors $\{U^1_g U^2_g; g\in G\}$ est le groupe des opérateurs unitaires déduit de la m.s. $\mathcal{E}_1 * \mathcal{E}_2$. On montre également que $\{U^2_{-g}; g\in G\}$ est le groupe des opérateurs unitaires déduit de la m.s. $w\mathcal{E}_2$, où $w$ est l'application mesurable $\gamma\in\widehat{G}\mapsto -\gamma\in\widehat{G}$. Donc en combinant les deux résultats qui précèdent nous pouvons affirmer que $\{U^1_g U^2_{-g}; g\in G\}$ est le groupe des opérateurs unitaires déduit de la m.s. $\mathcal{E}_1 * (w\mathcal{E}_2)$.

La commutativité peut s'exprimer en termes de f.a.c. comme suit.

**Définition 2**. *Deux f.a.c. stationnaires $(X^1_g)_{g\in G}$ et $(X^2_g)_{g\in G}$, de m.a. associées respectives $Z_1$ et $Z_2$, commutent lorsqu'il existe deux m.s. $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$, sur $\mathcal{B}_{\widehat{G}}$, qui commutent telles que $Z_1 = Z^{X^1_0}_{\mathcal{E}_1}$ et $Z_2 = Z^{X^2_0}_{\mathcal{E}_2}$.*

Cette notion généralise celle de "stationnarité corrélée" en ce sens que deux f.a.c. stationnaires, stationnairement corrélées, commutent mais que la réciproque est fausse. Par exemple, si $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une série stationnaire, les séries stationnaires $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ et $(X_{2n})_{n\in\mathbb{Z}}$ commutent mais ne sont pas stationnairement corrélées. Elle va nous permettre de comparer la proximité des m.a. respectivement associées à deux f.a.c. stationnaires proches qui commutent.

Pour cela, considérons deux f.a.c. stationnaires $(X^1_g)_{g\in G}$ et $(X^2_g)_{g\in G}$ qui commutent et telles que $\|X^1_g - X^2_g\| \le \varepsilon$ pour tout $g$ de $G$. Dans un premier temps nous supposerons que $X^1_0 = X^2_0 = X$.

Par définition, il existe deux m.s. $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$, sur $\mathcal{B}_{\widehat{G}}$, qui commutent et telles que (avec des notations évidentes) $Z_1 = Z^X_{\mathcal{E}_1}$ et $Z_2 = Z^X_{\mathcal{E}_2}$. D'où $X^1_g = \int (.,g)_{\widehat{G},G}\mathrm{d}Z_1 = \int (.,g)_{\widehat{G},G}\mathrm{d}Z_{\mathcal{E}_1} = U^1_g X$ et, d'une façon analogue, $X^2_g = U^2_g X$. On peut donc écrire

$$\|U^2_{-g}U^1_g X - X\| = \|U^1_g X - U^2_g X\| = \|X^1_g - X^2_g\| \le \varepsilon, \text{ pour tout } g \text{ de } G. \tag{1}$$

Si l'on désigne par $P_1$ (resp. $P_2$, $m$) l'application mesurable $(\gamma_1,\gamma_2)\in\widehat{G}\times\widehat{G}\mapsto\gamma_1\in\widehat{G}$ (resp. $(\gamma_1,\gamma_2)\in\widehat{G}\times\widehat{G}\mapsto\gamma_2\in\widehat{G}$, $(\gamma_1,\gamma_2)\in\widehat{G}\times\widehat{G}\mapsto\gamma_1-\gamma_1\in\widehat{G}$), il est facile de vérifier que $P_1 + wP_2 = m$. Les propriétés algébriques du produit de convolution nous permettent d'écrire

$$\mathcal{E}_1 * (w\mathcal{E}_2) = (P_1(\mathcal{E}_1\otimes\mathcal{E}_2)) * (wP_2(\mathcal{E}_1\otimes\mathcal{E}_2)) = (P_1 + wP_2)(\mathcal{E}_1\otimes\mathcal{E}_2) = m(\mathcal{E}_1\otimes\mathcal{E}_2).$$

Comme $(U^2_{-g}U^1_g X)_{g\in G}$ est une f.a.c. stationnaire de m.a. associée $Z^X_{\mathcal{E}_1 * w\mathcal{E}_2}$, donc de m.a. associée $Z^X_{m(\mathcal{E}_1\otimes\mathcal{E}_2)}$, d'après (1) nous avons $\|Z^X_{m(\mathcal{E}_1\otimes\mathcal{E}_2)}\{0\} - X\| \le \varepsilon$, puisque le groupe $G$ possède la propriété de continuité.

Etant donné que $m^{-1}\{0\} = \{(\gamma_1,\gamma_2)\in\widehat{G}\times\widehat{G}; \gamma_1=\gamma_2\}$, l'inégalité précédente peut s'écrire

$$\|Z^X_{\mathcal{E}_1\otimes\mathcal{E}_2}\{(\gamma_1,\gamma_2)\in\widehat{G}\times\widehat{G}; \gamma_1=\gamma_2\} - X\| \le \varepsilon,$$

ou bien encore

$$\|Z^X_{\mathcal{E}_1\otimes\mathcal{E}_2}\complement\{(\gamma_1,\gamma_2)\in\widehat{G}\times\widehat{G}; \gamma_1=\gamma_2\}\| \le \varepsilon, \tag{2}$$

si l'on remarque que $Z^X_{\mathcal{E}_1\otimes\mathcal{E}_2}(\widehat{G}\times\widehat{G}) = X$.

Pour tout $A$ de $\mathcal{B}_{\widehat{G}}$, il vient

$$Z_1 A = Z^X_{\mathcal{E}_1} A = Z^X_{P_1(\mathcal{E}_1\otimes\mathcal{E}_2)} A = Z^X_{\mathcal{E}_1\otimes\mathcal{E}_2}(A\times\widehat{G}) = Z^X_{\mathcal{E}_1\otimes\mathcal{E}_2}(A\times A) + Z^X_{\mathcal{E}_1\otimes\mathcal{E}_2}(A\times\complement A),$$

et d'une façon analogue,

$$Z_2 A = Z^X_{\mathcal{E}_1\otimes\mathcal{E}_2}(A\times A) + Z^X_{\mathcal{E}_1\otimes\mathcal{E}_2}(\complement A\times A).$$

D'où

$$Z_1 A - Z_2 A = Z^X_{\mathcal{E}_1\otimes\mathcal{E}_2}(A\times\complement A) - Z^X_{\mathcal{E}_1\otimes\mathcal{E}_2}(\complement A\times A).$$

Comme $Z^X_{\mathcal{E}_1\otimes\mathcal{E}_2}(A\times\complement A)$ et $Z^X_{\mathcal{E}_1\otimes\mathcal{E}_2}(\complement A\times A)$ sont orthogonaux, on peut écrire

$$\|Z_1 A - Z_2 A\|^2 = \|Z^X_{\mathcal{E}_1\otimes\mathcal{E}_2}(A\times\complement A)\|^2 + \|Z^X_{\mathcal{E}_1\otimes\mathcal{E}_2}(\complement A\times A)\|^2 = \mu_{Z^X_{\mathcal{E}_1\otimes\mathcal{E}_2}}(A\times\complement A)\cup(\complement A\times A).$$

Si l'on remarque que $(A\times\complement A)\cup(\complement A\times A)\subset\complement\{(\gamma_1,\gamma_2)\in\widehat{G}\times\widehat{G}; \gamma_1=\gamma_2\}$, cette dernière égalité, compte-tenu de (2), permet d'écrire

$$\|Z_1 A - Z_2 A\| \le \varepsilon,$$

cela pour tout $A$ de $\mathcal{B}_{\widehat{G}}$.

Nous attirons l'attention du lecteur sur le fait que notre démarche est possible grâce à l'existence de la m.a. $Z^X_{\mathcal{E}_1\otimes\mathcal{E}_2}$, donc grâce à la possibilité de pouvoir considérer la m.s. $\mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2$, qui peut être définie du fait de la commutativité des f.a.c. stationnaires $(X^1_g)_{g\in G}$ et $(X^2_g)_{g\in G}$.

Si l'on n'impose plus la contrainte $X^1_0 = X^2_0$, on obtient le résultat suivant.

**Proposition 1**. *Si $(X^1_g)_{g\in G}$ et $(X^2_g)_{g\in G}$ sont deux f.a.c. stationnaires qui commutent telles que $\|X^1_g - X^2_g\| \leq \varepsilon$, pour tout $g$ de $G$, alors, si l'on désigne par $Z_1$ et $Z_2$ les m.a. respectivement associées aux f.a.c. stationnaires $(X^1_g)_{g\in G}$ et $(X^2_g)_{g\in G}$, pour tout $A$ de $\mathcal{B}_{\widehat{G}}$, nous avons*

$$\|Z_1A - Z_2A\| \leq 3\varepsilon.$$

**Mots-clés**. mesures aléatoires, processus stationnaire, produit tensoriel de mesures, mesure spectrale

**Classification AMS**. 60G57, 60G10, 60B15, 60H05

## Bibliographie

Boudou, A. (2007). Groupe d'opérateurs unitaires déduit d'une mesure spectrale - une application. *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I* **344** 791-794.

Boudou, A. and Viguier-Pla, S. (2010). Relation between unit operators proximity and their associated spectral measures. *Stat. Proba. Letters* **80** 1724-1732.

Rudin, W. (1967). *Fourier Analysis On Groups.* Wiley-Interscience, New York.