

Extension de valuation et polygone de Newton *

Michel Vaquié

Laboratoire Emile Picard, UMR CNRS 5580

Université Paul Sabatier, Toulouse

France

vaquie@math.ups-tlse.fr

Abstract

Soient (K, ν) un corps valué et L est une extension monogène finie de K définie par $L = K[x]/(P)$, alors toute valuation de L qui prolonge ν définit une pseudo-valuation ζ de $K[x]$ de noyau l'idéal (P) . Nous savons associer à ζ une famille de valuations de $K[x]$, appelée famille admissible, construite de façon explicite à partir de valuations augmentées et de valuations augmentées limites.

Nous donnons une condition nécessaire et suffisante pour qu'une valuation μ de $K[x]$ appartienne à la famille admissible associée à une pseudo-valuation ζ correspondant à une valuation de L , condition ne faisant pas intervenir ζ mais uniquement le polynôme P . Nous pouvons ainsi déterminer toutes les valuations de L qui prolongent la valuation ν de K .

Pour cela nous définissons le polygone de Newton associé à P , à un polynôme ϕ et à une valuation μ , à partir du développement de P selon les puissances de ϕ .

Introduction

Soit K un corps muni d'une valuation ν et soit L un extension algébrique finie monogène de K , $L = K(\theta)$. Nous voulons déterminer toutes les valuations μ de L qui prolongent la valuation ν , c'est-à-dire toutes les valuations μ de L dont la restriction à K est égale à ν . Si nous appelons P le polynôme minimal de θ sur K , le corps L est isomorphe au quotient de l'anneau des polynômes $K[x]$ par l'idéal engendré par P , $L = K[x]/(P)$, et toute valuation μ de L correspond alors à une pseudo-valuation ζ de $K[x]$ dont le noyau $\mathcal{S}(\zeta) = \{f \in K[x] \mid \zeta(f) = +\infty\}$ est égal à l'idéal premier (P) , cette pseudo-valuation ζ est définie par $\zeta(f) = \mu(f(\theta))$. Déterminer toutes les valuations μ de L qui prolongent ν revient alors à déterminer toutes les pseudo-valuations ζ de $K[x]$ qui prolongent ν et dont le noyau est égal à (P) .

A toute valuation ou pseudo-valuation ζ de $K[x]$ qui prolonge ν , nous savons associer une *famille admissible* de valuations de $K[x]$, cette famille est essentiellement unique et nous la notons $\mathcal{A}(\zeta)$. Le problème se ramène alors à déterminer toutes les familles admissibles $\mathcal{A}$ de valuations de $K[x]$ correspondant aux pseudo-valuations ζ de noyau égal à (P) .

Une famille admissible $\mathcal{A}$ est une famille de valuations ou de pseudo-valuations $(\mu_i)_{i \in I}$ indexée par un ensemble totalement ordonné I , avec I possédant un plus petit élément 1, vérifiant les propriétés suivantes.

1. Pour tout polynôme f de $K[x]$ la famille $(\mu_i(f))_{i \in I}$ est croissante, c'est-à-dire $\mu_i(f) \leq \mu_{i'}(f)$ pour $i < i'$ dans I .
2. Pour tout polynôme f de $K[x]$ la famille $(\mu_i(f))_{i \in I}$ est stationnaire à partir d'un certain rang, c'est-à-dire il existe i dans I tel que nous avons l'égalité $\mu_i(f) = \mu_{i'}(f)$ pour tout $i' \geq i$.

*2000 Mathematics Subject Classification: 13A18 (12J10 14E15)

De plus sitôt que nous avons l'égalité $\mu_i(f) = \mu_{i'}(f)$ pour $i < i'$, nous avons $\mu_i(f) = \mu_{i''}(f)$ pour tout $i'' \geq i$.

3. Chaque valuation μ_i de la famille est définie à partir des valuations μ_j pour $j < i$, soit comme *valuation augmentée*, soit comme *valuation augmentée limite*. La première valuation μ_1 de la famille est définie de façon explicite à partir de la valuation ν grâce à un polynôme ϕ_1 de degré 1 et à une valeur γ_1 .

Nous renvoyons au paragraphe 1, ou aux articles [Va 1] ou [Va 2] pour la définition précise d'une famille admissible, ainsi que pour les définitions de valuation augmentée et de valuation augmentée limite.

Soit $\mathcal{A} = (\mu_i)_{i \in I}$ une famille admissible, alors pour tout i appartenant à I , sauf éventuellement pour le dernier élément $\bar{l}$ de I s'il existe, μ_i est une valuation. L'application ζ définie par $\zeta(f) = \sup \mu_i(f)$, qui est aussi égal à $\mu_i(f)$ pour i suffisamment grand d'après la propriété 2, et qui est égal à $\mu_{\bar{l}}$ si $\bar{l}$ est le dernier élément de I , est une valuation ou une pseudo-valuation de $K[x]$. Nous disons que la famille $\mathcal{A}$ *converge* vers ζ ou qu'elle est la famille admissible *associée* à ζ , et nous la notons $\mathcal{A}(\zeta)$.

Une valuation μ de $K[x]$ appartenant à une famille admissible $\mathcal{A}(\zeta)$ associée à une pseudo-valuation ζ de $K[x]$ de noyau l'idéal (P) est appelée une valuation *approchée* du polynôme P .

Le résultat principal de cet article permet de donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'une valuation μ de $K[x]$ soit une valuation approchée du polynôme P , condition qui ne fait intervenir que le polynôme P et ne suppose pas connue la pseudo-valuation ζ .

Théorème 0.1. (cf. théorème 2.6) *La valuation μ de $K[x]$ est une valuation approchée du polynôme P si et seulement si*

1. P est μ_- -divisible par ϕ si μ est la valuation augmentée $\mu = [\mu_- ; \mu(\phi) = \gamma]$ avec $\mu_- \neq \nu$, et est A -divisible si μ est la valuation augmentée limite $\mu = [(\mu_\alpha)_{\alpha \in A} ; \mu(\phi) = \gamma]$,
2. il existe au moins un polynôme-clé ψ pour la valuation μ , avec ψ non μ -équivalent à ϕ , qui μ -divise P .

De plus si μ est une valuation approchée de P , nous pouvons déterminer quels sont les *polynômes-clés* ϕ et les valeurs γ pour lesquels la valuation augmentée μ' associée à ϕ et γ , $\mu' = [\mu ; \mu'(\phi) = \gamma]$, est aussi une valuation approchée de P . De même si nous trouvons une famille pseudo-convergente $\mathcal{C} = (\mu_\alpha)_{\alpha \in A}$ de valuations approchées de P , nous pouvons déterminer quelles sont les valeurs γ pour lesquelles la valuation augmentée limite associée à un polynôme-clé limite ϕ et à la valeur γ , $\mu' = [(\mu_\alpha)_{\alpha \in A} ; \mu(\phi) = \gamma]$, est encore une valuation approchée de P .

Comme le critère ne suppose pas connue a priori la pseudo-valuation ζ , et en particulier nous pouvons remarquer qu'il peut exister plusieurs pseudo-valuations ζ telles que la valuation μ appartienne aux familles $\mathcal{A}(\zeta)$, nous pouvons construire *pas à pas* les familles admissibles $\mathcal{A}(\zeta)$ cherchées. Nous trouvons ainsi les familles admissibles associées à toutes les pseudo-valuations ζ de $K[x]$ de noyau (P) , c'est-à-dire toutes les valuations de L qui prolongent la valuation ν .

Pour déterminer les valuations approchées d'un polynôme P de $K[x]$ nous définissons pour toute valuation μ de $K[x]$ et pour tout polynôme ϕ le *polygone de Newton* associé à P , ϕ et μ , que nous notons $\mathcal{PN}(P; \phi; \mu)$. Celui-ci est défini à partir du *développement de P selon les puissances de ϕ* , c'est-à-dire à partir de l'écriture $P = p_m \phi^m + \dots + p_0$ où les polynômes p_j sont de degré strictement inférieur au degré de ϕ . Plus précisément les polynômes ϕ sont les polynômes μ -irréductibles qui μ -divisent le polynôme P et les valeurs γ sont obtenues comme les pentes des faces de la *partie principale* $\mathcal{PN}(P; \phi; \mu)^+$ du polygone de Newton associé à P , ϕ et μ .

Nous pouvons voir le polygone de Newton $\mathcal{PN}(P; \phi; \mu)$ comme une généralisation du polygone de Newton associé à une courbe plane. Plus précisément soit $f(x, y)$ est un polynôme dans $k[x, y]$ définissant une courbe plane et considérons f comme un polynôme P de $K[x]$ avec $K = k(y)$, alors le polygone de Newton associé à f est essentiellement identique au polygone de Newton $\mathcal{PN}(P; \phi; \mu)$ associé à P , à $\phi = x$ et à la valuation y -adique, $\nu = \nu_y$, de K (cf. le chapitre 4).

1 Polygone de Newton

Nous allons rappeler les résultats concernant les familles admissibles de valuations, nous renvoyons le lecteur aux articles de l'auteur, plus précisément à [Va 1], [Va 2], [Va 3] et [Va 6] pour des définitions précises et pour des résultats plus complets.

Nous considérons un corps K muni d'une valuation ν et nous choisissons un plongement du groupe des valeurs Γ_ν dans un groupe abélien totalement ordonné Γ . Toutes les valeurs γ que nous considérerons seront alors dans Γ .

Nous appelons $\mathcal{E} = \mathcal{E}(K[x], \nu)$ l'ensemble des valuations ou pseudo-valuations de l'anneau des polynômes $K[x]$ dont la restriction à K est égale à ν , et nous appelons $\mathcal{F} = \mathcal{F}(K[x], \nu)$ l'ensemble des *familles admissibles* de valuations de $K[x]$ appartenant à $\mathcal{E}$.

Nous rappelons qu'une pseudo-valuation ζ d'un anneau R est une application ζ de R à valeurs dans $\bar{\Gamma} = \Gamma \cup \{+\infty\}$, où Γ est un groupe abélien totalement ordonné, vérifiant les propriétés

$$\zeta(fg) = \zeta(f) + \zeta(g) \quad \text{et} \quad \zeta(f + g) \geq \inf(\zeta(f), \zeta(g)) ,$$

mais pouvant prendre la valeur $+\infty$ pour des éléments $f \neq 0$. L'ensemble

$$\mathcal{S}(\zeta) = \{f \in R \mid \zeta(f) = +\infty\}$$

est appelé le *noyau* de la pseudo-valuation ζ , c'est un idéal premier de l'anneau R .

À toute valuation ou pseudo-valuation μ de $\mathcal{E}$ nous pouvons associer une famille *admise* $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{F}$, que nous notons $\mathcal{A}(\mu)$, nous rappelons que cette famille n'est pas unique mais définie à équivalence près. La famille $\mathcal{A}$ est une famille admissible, c'est-à-dire est réunion de familles *admissibles simples* $\mathcal{S}^{(j)}$, pour j parcourant J , avec $J = \{1, \dots, N\}$ ou $J = \mathbb{N}^*$, chaque famille simple $\mathcal{S}^{(j)}$ étant constituée d'une partie *discrète* $\mathcal{D}^{(j)}$ et d'une partie *pseudo-convergente* ou *continue* $\mathcal{C}^{(j)}$, la dernière famille pseudo-convergente $\mathcal{C}^{(N)}$ pouvant être éventuellement vide.

Nous pouvons écrire la famille $\mathcal{A}$ sous la forme $\mathcal{A} = (\mu_l)_{l \in I}$, où I est un ensemble totalement ordonné, chaque valuation μ_l étant définie soit comme *valuation augmentée*, soit comme *valuation augmentée limite*. Dans le premier cas nous avons

$$\mu_l = [\mu_{l'} ; \mu_l(\phi_l) = \gamma_l] ,$$

et ϕ_l est un *polynôme-clé* définissant la valuation μ_l à partir de la valuation $\mu_{l'}$ avec $l' < l$, nous remarquons que si l a un unique prédécesseur $l-1$ dans I nous avons $l' = l-1$. Dans le deuxième cas nous avons

$$\mu_l = [(\mu_\alpha)_{\alpha \in A} ; \mu_l(\phi_l) = \gamma_l] ,$$

et ϕ_l est un *polynôme-clé limite* définissant la valuation μ_l à partir de la famille pseudo-convergente $(\mu_\alpha)_{\alpha \in A}$.

Nous notons respectivement $(\phi_l)_{l \in I}$ et $(\gamma_l)_{l \in I}$ les familles de polynômes et de valeurs associées à la famille de valuations $\mathcal{A}$. Nous disons que la famille $\mathcal{A}$ est *complète* si l'ensemble I possède un plus grand élément $\bar{l}$, dans ce cas la valuation ou la pseudo-valuation μ est la valuation $\mu_{\bar{l}}$, sinon nous disons que la famille $\mathcal{A}$ est *ouverte*. Dans le cas où l'ensemble I possède un plus grand élément $\bar{l}$, nous définissons I^* comme I privé de $\bar{l}$, sinon nous posons $I^* = I$, et nous définissons la sous-famille $\mathcal{A}^* = (\mu_l)_{l \in I^*}$.

La première valuation μ_1 de la famille $\mathcal{A}$ est obtenue à partir de la valuation ν de K grâce à un polynôme ϕ_1 unitaire de degré 1 et à une valeur γ_1 . Nous considérerons parfois que la valuation $\nu = \mu_0$ appartient à la famille $\mathcal{A}$ et par abus de notation nous considérerons que 0 est le plus petit élément de l'ensemble I . La valuation μ_1 est ainsi considérée comme une valuation augmentée, définie par le polynôme ϕ_1 , et nous la notons encore

$$\mu_1 = [\nu ; \mu_1(\phi_1) = \gamma_1] .$$

Comme le polynôme ϕ_1 est de degré un, tout polynôme f de $K[x]$ s'écrit sous la forme

$$f = a_m \phi^m + \dots + a_1 \phi + a_0 ,$$

avec a_j appartenant au corps K et la valuation $\mu_1(f)$ est définie par

$$\mu_1(f) = \inf (\nu(a_j) + j\gamma_1, 0 \leq j \leq m) .$$

Nous allons rappeler quelques définitions et propriétés concernant les valuations de l'anneau des polynômes $K[x]$ (cf. [McL 1], [McL 2], [Va 1], [Va 6]).

Nous pouvons d'abord déduire de la division euclidienne dans l'anneau des polynômes $K[x]$ la définition suivante. Pour tout couple de polynômes f et ϕ dans $K[x]$ nous définissons le *développement de f selon les puissances de ϕ* par

$$f = f_m\phi^m + \dots + f_1\phi + f_0 ,$$

où les polynômes f_j vérifient $\deg f_j < \deg \phi$ pour tout j , $0 \leq j \leq m$.

Pour toute valuation μ appartenant à $\mathcal{E}(K[x], \nu)$ nous appelons $\text{gr}_\mu K[x]$ l'*algèbre graduée* associée à la valuation μ et H_μ l'application naturelle de $K[x]$ dans $\text{gr}_\mu K[x]$ qui à tout polynôme f associe sa *partie homogène* qui est de degré $\alpha = \mu(f)$.

Nous disons que deux polynômes f et g sont μ -équivalents s'ils ont même image dans $\text{gr}_\mu K[x]$, $H_\mu(f) = H_\mu(g)$, c'est-à-dire si nous avons $\mu(f - g) > \mu(f) = \mu(g)$, et nous notons $f \sim_\mu g$.

Nous disons que f est μ -divisible par g , ou que g μ -divise f si l'image $H_\mu(f)$ est divisible par l'image $H_\mu(g)$ dans $\text{gr}_\mu K[x]$, c'est-à-dire s'il existe un polynôme q dans $K[x]$ tel que nous ayons $\mu(f - qg) > \mu(f) = \mu(qg)$, et nous notons $g \mid_\mu f$.

Nous pouvons ainsi définir les notions de μ -minimalité, de μ -irréductibilité et de μ -invertibilité par:

un polynôme f est μ -minimal si et seulement si il vérifie

$$f \mid_\mu g \implies \deg g \geq \deg f,$$

un polynôme f est μ -irréductible si et seulement si il vérifie

$$f \mid_\mu ab \implies f \mid_\mu a \quad \text{ou} \quad f \mid_\mu b ,$$

un polynôme f est μ -invertible si et seulement si il existe g dans $K[x]$ tel que $fg \sim_\mu 1$.

Nous rappelons qu'un polynôme ϕ appartenant à $K[x]$ est appelé un *polynôme-clé* pour la valuation μ s'il vérifie les propriétés suivantes:

- ϕ est μ -minimal,
- ϕ est μ -irréductible,
- ϕ est unitaire.

Alors pour toute valeur γ dans $\bar{\Gamma} = \Gamma \cup \{+\infty\}$ vérifiant $\gamma > \mu(\phi)$, nous pouvons définir la valuation augmentée μ' associée au polynôme-clé ϕ et à la valeur γ , que nous notons $\mu' = [\mu ; \mu'(\phi) = \gamma]$, de la façon suivante. Pour tout f dans $K[x]$ la valuation $\mu'(f)$ est définie par

$$\mu'(f) = \inf (\mu(f_j) + j\gamma, 0 \leq j \leq m) ,$$

où $f = f_m\phi^m + \dots + f_1\phi + f_0$ est le développement de f selon les puissances de ϕ .

C'est une valuation de $K[x]$, une pseudo-valuation de noyau l'idéal engendré par ϕ dans le cas $\gamma = +\infty$, vérifiant $\mu(f) \leq \mu'(f)$ pour tout f dans $K[x]$.

De même si $\mathcal{C} = (\mu_\alpha)_{\alpha \in A}$ est une famille pseudo-convergente de valuations, associée à la famille $(\phi_\alpha)_{\alpha \in A}$ de polynômes-clés et à la famille $(\gamma_\alpha)_{\alpha \in A}$ de valeurs, nous pouvons définir les notions de A -divisibilité, ainsi que celles de A -minimalité, de A -irréductibilité et de A -invertibilité de la manière suivante:

les polynômes f et g sont A -équivalents si et seulement si il existe α_0 dans A tel que pour tout $\alpha \geq \alpha_0$ dans A , f et g sont A -équivalents, et nous notons $f \sim_A g$,

le polynôme f est A -divisible par le polynôme g , ou g A -divise f , si et seulement si il existe α_0 dans A tel que pour tout $\alpha \geq \alpha_0$ dans A , f est μ_α -divisible par g , et nous notons $g \mid_A f$,

un polynôme f est A -minimal si et seulement si il vérifie

$$f \mid_A g \implies \deg g \geq \deg f,$$

un polynôme f est A -irréductible si et seulement si il vérifie

$$f \mid_A ab \implies f \mid_A a \quad \text{ou} \quad f \mid_A b,$$

un polynôme f est A -inversible si et seulement si il existe α_0 dans A tel que pour tout $\alpha \geq \alpha_0$ dans A , f est μ_α -inversible.

Un polynôme ϕ appartenant à $K[x]$ est appelé un *polynôme-clé limite* pour la famille pseudo-convergente $\mathcal{C} = (\mu_\alpha)_{\alpha \in A}$ s'il vérifie les propriétés suivante:

- ϕ est A -minimal,
- ϕ est A -irréductible,
- ϕ est unitaire.

C'est équivalent à dire que le polynôme ϕ est un polynôme unitaire de degré minimal pour lequel la famille $(\mu_\alpha(\phi))_{\alpha \in A}$ n'est pas stationnaire. Plus précisément supposons que la famille $\mathcal{C}$ est *admissible pseudo-convergente*, c'est-à-dire que la famille de polynômes $(\phi_\alpha)_{\alpha \in A}$ n'est pas *convergente* (cf. [Va 6]). Par définition cela signifie que l'ensemble

$$\tilde{\Phi}(\mathcal{C}) = \{f \in K[x] \mid \mu_\alpha(f) < \mu_\beta(f) \ \forall \alpha < \beta \text{ dans } A\}$$

est non vide et que tout polynôme f appartenant à cet ensemble vérifie $\deg f > \deg \phi_\alpha$. Nous notons d_A le degré minimal d'un polynôme f appartenant à $\tilde{\Phi}(\mathcal{C})$, alors l'ensemble $\Phi(\mathcal{C}) = \Phi(A)$ défini par

$$\Phi(\mathcal{C}) = \{\phi \in K[x] \mid \mu_\alpha(\phi) < \mu_\beta(\phi) \ \forall \alpha < \beta \text{ dans } A, \deg \phi = d_A \text{ et } \phi \text{ unitaire}\},$$

est égal à l'ensemble des polynômes-clés limites pour la famille $\mathcal{C}$.

Pour tout polynôme g n'appartenant pas à l'ensemble $\tilde{\Phi}(\mathcal{C})$, c'est en particulier le cas pour tout polynôme g avec $\deg g < \deg \phi = d_A$, nous définissons $\mu_A(g)$ par $\mu_A(g) = \sup (\mu_\alpha(g), \alpha \in A)$, c'est-à-dire $\mu_A(g) = \mu_\alpha(g)$ pour α suffisamment grand dans A .

Pour toute valeur γ dans $\bar{\Gamma}$ vérifiant $\gamma > \mu_\alpha(\phi)$ pour tout α dans A , nous pouvons définir la valuation augmentée limite μ' associée au polynôme-clé limite ϕ et à la valeur γ , que nous notons $\mu' = [(\mu_\alpha)_{\alpha \in A} ; \mu'(\phi) = \gamma]$, de la façon suivante. Pour tout f dans $K[x]$ la valuation $\mu'(f)$ est définie par

$$\mu'(f) = \inf (\mu_A(f_j) + j\gamma, \ 0 \leq j \leq m),$$

où $f = f_m \phi^m + \dots + f_1 \phi + f_0$ est le développement de f selon les puissances de ϕ .

C'est une valuation de $K[x]$, une pseudo-valuation de noyau l'idéal engendré par ϕ dans le cas $\gamma = +\infty$, vérifiant $\mu_\alpha(f) \leq \mu'(f)$ pour tout α dans A et pour tout polynôme f de $K[x]$.

Nous allons introduire une généralisation de la notion de polygone de Newton (cf. [McL 2] §5 ou [Va 4] §5).

Soit Γ un groupe ordonné et nous définissons la *droite* D de l'espace $\mathbb{R} \times \Gamma$ comme le sous-ensemble $D = \{(x, \gamma) \in \mathbb{R} \times \Gamma \mid q\gamma + \alpha x + \beta = 0\}$, où $q \in \mathbb{R}$, et α et $\beta \in \Gamma$. La *pente* $p(D)$ de la droite D d'équation $q\gamma + \alpha x + \beta = 0$ est l'élément $p(D) = \alpha/q$ appartenant à $\Gamma \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$. Cette définition de la pente ne correspond pas à la définition usuelle, par exemple celle utilisée dans [Va 4], mais est égale à l'opposé.

Chaque droite D définit deux *demi-espaces* $H_{\geq}^D$ et $H_{\leq}^D$ de $\mathbb{R} \times \Gamma$ par:

$$H_{\geq}^D = \{(x, \gamma) \in \mathbb{R} \times \Gamma \mid q\gamma + \alpha x + \beta \geq 0\}$$

$$H_{\leq}^D = \{(x, \gamma) \in \mathbb{R} \times \Gamma \mid q\gamma + \alpha x + \beta \leq 0\}.$$

Pour tout sous-ensemble A de $\mathbb{R} \times \Gamma$ nous définissons son *enveloppe convexe* $\text{Conv}(A)$ par

$$\text{Conv}(A) = \bigcap H ,$$

où H parcourt l'ensemble des demi-espaces de $\mathbb{R} \times \Gamma$ contenant A . Une *face* F de $\text{Conv}(A)$ est un sous-ensemble F de $\text{Conv}(A)$ défini par $F = \text{Conv}(A) \cap D$, où D est une droite de $\mathbb{R} \times \Gamma$ vérifiant:

- $\text{Conv}(A)$ est contenu dans l'un des demi-espaces $H_{\geq}^D$ ou $H_{\leq}^D$ définis par D ,
- $F = \text{Conv}(A) \cap D$ contient au moins deux points distincts.

Nous définissons la *pente* $p(F)$ de la face F comme la pente de la droite D qui définit F .

Soient μ une valuation de $K[x]$, f et ϕ deux polynômes de $K[x]$ et soit

$$f = f_m \phi^m + \dots + f_1 \phi + f_0 ,$$

le développement de f selon les puissances de ϕ .

Définition 1.1. *Le polygone de Newton associé aux polynômes f et ϕ et à la valuation μ , que nous notons $\mathcal{PN}(f; \mu; \phi)$, est l'enveloppe convexe de l'ensemble $\{(k, \delta) \mid \delta \geq \mu(f_k), 0 \leq k \leq m\}$:*

$$\mathcal{PN}(f; \mu; \phi) = \text{Conv}(\{(k, \delta) \mid \delta \geq \mu(f_k), 0 \leq k \leq m\}) .$$

Nous pouvons définir le *support* du polynôme f associé à la valuation μ et au polynôme ϕ , c'est le sous-ensemble $\text{Supp}_{(\mu; \phi)}(f)$ de $\mathbb{R}^+ \times \Gamma$ défini par

$$\text{Supp}_{(\mu; \phi)}(f) = \{(k, \mu(f_k)) \mid 0 \leq k \leq m\} .$$

Cet ensemble détermine le polygone de Newton $\mathcal{PN}(f; \mu; \phi)$ car nous avons l'égalité

$$\{(k, \delta) \mid \delta \geq \mu(f_k), 0 \leq k \leq m\} = \text{Supp}_{(\mu; \phi)}(f) + (\{0\} \times \Gamma^+) ,$$

où Γ^+ est le sous-ensemble des éléments $\gamma \geq 0$ de Γ .

Par définition le polygone de Newton $\mathcal{PN} = \mathcal{PN}(f; \mu; \phi)$ est l'ensemble des couples (x, γ) appartenant à $\mathbb{R}^+ \times \Gamma$ pour lesquels il existe des entiers k_1 et k_2 avec

$$0 \leq k_1 \leq x \leq k_2 \leq m$$

$$(k_2 - k_1)\gamma \geq (k_2 - x)\mu(f_{k_1}) - (k_1 - x)\mu(f_{k_2}) .$$

La donnée du polygone de Newton $\mathcal{PN}$ est équivalente à la donnée

d'une suite finie d'entiers: $0 = a_0 < a_1 < \dots < a_r = m$,

d'une suite finie de valeurs dans Γ : $\delta_1 > \dots > \delta_r$,

définis par les propriétés suivantes:

1. pour tout k , $0 \leq k \leq m$, nous avons l'inégalité:

$$\mu(f_k) + k\delta_t \geq \mu(f_{a_{t-1}}) + a_{t-1}\delta_t = \mu(f_{a_t}) + a_t\delta_t ,$$

2. pour $k < a_{t-1}$ et pour $k > a_t$, nous avons l'inégalité stricte:

$$\mu(f_k) + k\delta_t > \mu(f_{a_{t-1}}) + a_{t-1}\delta_t = \mu(f_{a_t}) + a_t\delta_t .$$

Les couples $(a_t, \mu(f_{a_t}))$, $0 \leq t \leq r$, sont appelés les *sommets* du polygone $\mathcal{PN}(f; \mu; \phi)$, δ_t est la pente de la face F_t comprise entre les sommets $(a_{t-1}, \mu(f_{a_{t-1}}))$ et $(a_t, \mu(f_{a_t}))$, et nous posons $\delta_0 = +\infty$ et $\delta_{r+1} = -\infty$, c'est-à-dire $\delta_{r+1} < \delta < \delta_0$ pour tout δ dans Γ .

Définition 1.2. *Soient f et ϕ deux polynômes dans $K[x]$, alors l'ordre de μ -divisibilité de f par ϕ est le plus grand entier n tel que ϕ^n μ -divise f .*

En particulier l'ordre de μ -divisibilité de f par ϕ est égal à l'ordre de divisibilité de $H_\mu(f)$ par $H_\mu(\phi)$ dans l'algèbre graduée $\text{gr}_\mu K[x]$.

Remarque 1.3. Pour tout un polynôme f il existe un polynôme μ -inversible e et des polynômes-clés pour la valuation μ , $\phi_1, \dots, \phi_t$, $t \geq 0$, non μ -équivalents entre eux et des entiers $n_1, \dots, n_t$, tels que nous ayons

$$f \underset{\mu}{\sim} e \phi_1^{n_1} \dots \phi_t^{n_t}$$

et cette décomposition est unique à μ -équivalence près (cf. [Va 3] Corollaire à la Proposition 2.3), et pour tout j l'exposant n_j est l'ordre de μ -divisibilité de f par ϕ_j . Cette décomposition correspond à la décomposition en facteurs irréductibles de l'image $H_\mu(f)$ dans $\text{gr}_\mu K[x]$, $H_\mu(f) = EF_1^{n_1} \dots F_t^{n_t}$, et au choix pour chaque F_j d'un polynôme de degré minimal ϕ_j avec $H_\mu(\phi_j) = F_j$.

Lemme 1.4. Soit ϕ un polynôme μ -minimal, alors pour tout polynôme f , nous avons l'égalité

$$\mu(f) = \inf(\mu(f_j \phi^j) ; 0 \leq j \leq m) .$$

De plus, si n est l'ordre de μ -divisibilité de f par ϕ nous avons

$$\mu(f) = \mu(f_n \phi^n) < \mu(f_j \phi^j) \text{ pour tout } j < n .$$

Preuve. Comme le polynôme ϕ est μ -minimal, il en est de même pour tout ϕ^j , $j \geq 1$, par conséquent si nous écrivons la division euclidienne $f = q\phi^j + r$ de f par ϕ^j , nous avons $\mu(q\phi^j) \geq \mu(f)$ et $\mu(r) \geq \mu(f)$ avec $\mu(r) > \mu(f)$ si et seulement si f est μ -divisible par ϕ^j , c'est-à-dire si l'ordre de μ -divisibilité de f par ϕ est supérieur ou égal à j .

Soit a le plus petit entier, $0 \leq a \leq m$, tel que $\mu(f_a \phi^a)$ soit égal à $\inf(\mu(f_j \phi^j) ; 0 \leq j \leq m)$, alors nous avons $\mu(f_{a-1} \phi^{a-1} + \dots + f_0) \geq \inf(\mu(f_j \phi^j) ; 0 \leq j \leq a-1) > \mu(f_a \phi^a)$, d'où

$$\mu(f_a \phi^a) = \mu(f_a \phi^a + f_{a-1} \phi^{a-1} + \dots + f_0) \geq \mu(f) .$$

Nous en déduisons l'égalité $\mu(f_a \phi^a) = \mu(f)$, que le polynôme f n'est pas μ -divisible par ϕ^{a+1} et est μ -divisible par ϕ^a . $\square$

Nous en déduisons de façon immédiate le résultat suivant.

Corollaire 1.5. Avec les hypothèses précédentes, le couple $(n, \mu(f_n))$ est un sommet du polygone de Newton $\mathcal{PN}(f; \mu; \phi)$, c'est-à-dire il existe s , $0 \leq s \leq r$ tel que $a_s = n$.

De plus si nous posons $\mu(\phi) = \delta$, alors nous avons les inégalités: $\delta_{s+1} \leq \delta < \delta_s$.

Si ϕ est un polynôme-clé pour la valuation μ , pour toute valeur $\gamma > \delta = \mu(\phi)$ nous pouvons définir la valuation augmentée $\mu' = [\mu ; \mu'(\phi)]$. Rappelons que par définition ϕ est un polynôme μ -minimal et que nous avons

$$\mu'(f) = \inf(\mu(f_k) + k\gamma; 0 \leq k \leq m) .$$

Par conséquent nous voyons que le polygone de Newton $\mathcal{PN}(f; \mu; \phi)$ joue un rôle important pour l'étude des valuations augmentées de μ associées à un polynôme-clé donné ϕ , et plus particulièrement la partie du polygone de Newton correspondant aux pentes $\delta_i > \delta$. Nous posons la définition suivante.

Définition 1.6. La partie principale du polygone de Newton est la partie de $\mathcal{PN}(f; \mu; \phi)$ au-dessus des faces de pente strictement plus grande que $\delta = \mu(\phi)$, c'est-à-dire la partie comprise entre les sommets $(0, \mu(f_0))$ et $(n, \mu(f_n))$, où n est l'ordre de μ -divisibilité de f par ϕ :

$$\mathcal{PN}(f; \mu; \phi)^+ = \mathcal{PN}(f; \mu; \phi) \cap ([0, n] \times \Gamma) .$$

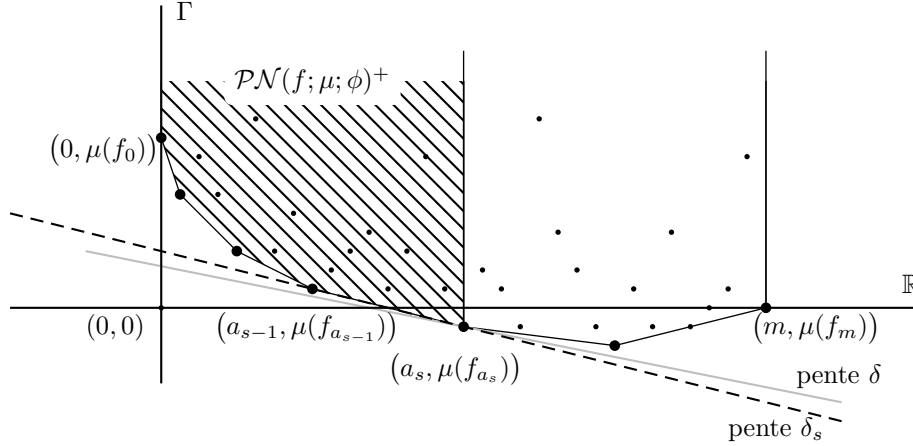


Figure 1.1: Polygone de Newton $\mathcal{PN}(f; \mu; \phi)$

Remarque 1.7. Si nous écrivons le polynôme f de $K[x]$ sous la forme $f = a_d x^d + \dots a_0$, nous pouvons définir le polygone de Newton $\mathcal{PN}(f; \nu; x)$ comme l'enveloppe convexe dans $\mathbb{R}^+ \times \Gamma$ de l'ensemble $\{(k, \delta) \mid \delta \geq \nu(a_k), 0 \leq k \leq d\}$.

Dans ce cas nous identifions la partie principale du polygone avec le polygone tout entier:

$$\mathcal{PN}(f; \nu; x)^+ = \mathcal{PN}(f; \nu; x) .$$

Nous voulons étendre les définitions précédentes au cas d'une famille admissible pseudo-convergente $\mathcal{C}$ de valuations et d'un polynôme-clé limite ϕ pour $\mathcal{C}$.

Définition 1.8. Le polygone de Newton associé au polynôme f , à la famille pseudo-convergente $\mathcal{C} = (\mu_\alpha)_{\alpha \in A}$ et au polynôme-clé limite ϕ pour $\mathcal{C}$, que nous notons $\mathcal{PN}(f; (\mu_\alpha)_{\alpha \in A}; \phi)$ ou $\mathcal{PN}(f; \mathcal{C}; \phi)$, est l'enveloppe convexe de l'ensemble $\{(k, \delta) \mid \delta \geq \mu_A(f_k), 0 \leq k \leq m\}$:

$$\mathcal{PN}(f; \mathcal{C}; \phi) = \text{Conv}(\{(k, \delta) \mid \delta \geq \mu_A(f_k), 0 \leq k \leq m\}) .$$

Nous pouvons aussi définir le *support* du polynôme f associé à la famille de valuations $\mathcal{C}$ et au polynôme-clé limite ϕ , c'est le sous-ensemble $\text{Supp}_{(\mathcal{C}; \phi)}(f)$ de $\mathbb{R}^+ \times \Gamma$ défini par

$$\text{Supp}_{(\mathcal{C}; \phi)}(f) = \{(k, \mu_A(f_k)) \mid 0 \leq k \leq m\} ,$$

et il détermine encore le polygone de Newton $\mathcal{PN}(f; \mathcal{C}; \phi)$ car nous avons l'égalité

$$\{(k, \delta) \mid \delta \geq \mu_A(f_k), 0 \leq k \leq m\} = \text{Supp}_{(\mathcal{C}; \phi)}(f) + (\{0\} \times \Gamma^+) .$$

Le polygone de Newton $\mathcal{PN}(f; \mathcal{C}; \phi)$ est encore un sous-ensemble de $\mathbb{R}^+ \times \Gamma$, et nous notons comme précédemment

$$0 = a_0 < a_1 < \dots < a_r = m \quad \text{et} \quad \delta_1 > \dots > \delta_r$$

les suites définissant les sommets et les pentes du polygone. Nous définissons aussi l'entier s , $0 \leq s \leq m$, comme le plus grand entier tel que $\delta_s > \mu_\alpha(\phi)$ pour tout α dans A .

Définition 1.9. La partie principale du polygone de Newton est la partie de $\mathcal{PN}(f; \mathcal{C}; \phi)$ au-dessus des faces de pente strictement plus grande que $\mu_\alpha(\phi)$ pour tout α , c'est-à-dire la partie comprise entre les sommets $(0, \mu(f_0))$ et $(a_s, \mu(f_{a_s}))$:

$$\mathcal{PN}(f; \mathcal{C}; \phi)^+ = \mathcal{PN}(f; \mathcal{C}; \phi) \cap ([0, a_s] \times \Gamma) .$$

Nous avons un résultat analogue au lemme 1.4 pour une famille admissible pseudo-convergente $\mathcal{C} = (\mu_\alpha)_{\alpha \in A}$, associée aux familles $(\phi_\alpha)_{\alpha \in A}$ et $(\gamma_\alpha)_{\alpha \in A}$, et un polynôme-clé limite ϕ .

Définition 1.10. Soient f un polynôme dans $K[x]$ et $\mathcal{C} = (\mu_\alpha)_{\alpha \in A}$ une famille admissible pseudo-convergente de valuations, alors l'ordre de $\mathcal{C}$ -divisibilité ou ordre de A -divisibilité de f est le plus grand entier n tel que ϕ^n A -divise f , où ϕ est un polynôme-clé limite pour la famille $\mathcal{C}$.

Remarque 1.11. L'ordre de $\mathcal{C}$ -divisibilité est bien défini et ne dépend pas du polynôme-clé limite ϕ choisi. En effet tous les polynômes-clés limites pour la famille $\mathcal{C}$ sont A -équivalents.

Soient $\mathcal{C} = (\mu_\alpha)_{\alpha \in A}$ une famille admissible pseudo-convergente de valuations, $(\phi_\alpha)_{\alpha \in A}$ la famille de polynômes-clés et $(\gamma_\alpha)_{\alpha \in A}$ la famille de valeurs associées, et soit $d = \deg \phi_\alpha$. Nous déduisons alors du théorème de A -factorisation ([Va 1], Théorème 1.19) que pour tout polynôme f dans $K[x]$ il existe α_0 dans A , $\lambda = \lambda(f)$ dans Γ et un entier $k = k(f)$ dans $\mathbb{N}$ avec $dk < \deg f$ tels que

$$\forall \alpha \geq \alpha_0 \quad \mu_\alpha(f) = k\gamma_\alpha + \lambda.$$

En particulier un polynôme f appartient à l'ensemble $\tilde{\Phi}(\mathcal{C})$ si et seulement si l'entier $k(f)$ ainsi associé à f est strictement positif.

Lemme 1.12. Avec les notations précédentes, pour tous polynômes f et g dans $K[x]$ nous avons l'implication

$$f \underset{A}{\mid} g \implies k(g) \geq k(f).$$

Preuve. Soit α dans A suffisamment grand tel que nous avons les égalités

$$\mu_\beta(f) = k(f)\gamma_\beta + \lambda(f) \quad \text{et} \quad \mu_\beta(g) = k(g)\gamma_\beta + \lambda(g),$$

pour tout $\beta \geq \alpha$ dans A et tel que g est μ_α -divisible par f . Il existe alors des polynômes r et q dans $K[x]$, qui dépendent de α , tels que nous avons

$$g = fq + r \quad \text{et} \quad \mu_\alpha(r) > \mu_\alpha(g) = \mu_\alpha(fq).$$

Nous déduisons du théorème de A -factorisation qu'il existe $\alpha' > \alpha$, des entiers positifs k' et k'' , des valeurs λ' et λ'' dans Γ tels que pour tout β vérifiant $\alpha \leq \beta \leq \alpha'$ nous avons les égalités

$$\mu_\beta(r) = k'\gamma_\beta + \lambda' \quad \text{et} \quad \mu_\beta(q) = k''\gamma_\beta + \lambda''.$$

Nous en déduisons qu'il existe α'' dans A avec $\alpha < \alpha'' \leq \alpha'$ tel que pour tout β vérifiant $\alpha \leq \beta \leq \alpha''$ nous avons $\mu_\beta(r) > \mu_\beta(g) = \mu_\beta(fq)$, d'où la relation $k(g) = k(f) + k'' \geq k(f)$.

Nous notons $k_0 = k_0(\mathcal{C})$ l'entier $k(\phi)$ associé à un polynôme-clé limite ϕ et nous déduisons aussi du lemme 1.12 qu'il ne dépend pas du polynôme-clé limite choisi.

Si pour tout α nous écrivons $\phi = g_{a,\alpha}\phi_\alpha^a + \dots + g_{0,\alpha}$ le développement du polynôme-clé limite ϕ selon les puissances de ϕ_α , nous avons l'inégalité $a \geq k_0$. De plus si nous supposons que l'ensemble des valeurs $\{\gamma_\alpha; \alpha \in A\}$ a une borne supérieure $\bar{\gamma}$ nous avons $a = k_0$ et $g_{a,\alpha} = 1$ (cf. [Va 2] Théorème 3.5).

Lemme 1.13. Soit n l'ordre de $\mathcal{C}$ -divisibilité de f et soit $f = f_m\phi^m + \dots + f_0$ le développement de f selon les puissances d'un polynôme-clé limite ϕ , alors pour tout α suffisamment grand f est μ_α -équivalent à $f_n\phi^n$.

Preuve. Soient $k_0 = k_0(\mathcal{C})$ et λ_0 l'entier et la valeur associés au polynôme-clé limite ϕ , c'est-à-dire tels que nous ayons $\mu_\alpha(\phi) = \lambda_0 + k_0\gamma_\alpha$ pour α suffisamment grand, et nous avons $k_0 \geq 1$.

Pour tout α nous avons $\mu_\alpha(f) \geq \inf(\mu_\alpha(f_j\phi^j); 0 \leq j \leq m)$, avec égalité si les $\mu_\alpha(f_j\phi^j)$ sont tous distincts, et pour α suffisamment grand nous avons $\mu_\alpha(f_j\phi^j) = \mu_A(f_j) + j(\lambda_0 + k_0\gamma_\alpha)$. Comme l'ensemble $\{\gamma_\alpha\}$ n'a pas de plus grand élément, nous en déduisons qu'il existe un entier n , $0 \leq n \leq m$ tel que nous ayons

$$\mu_\alpha(f) = \mu_A(f_n) + n(\lambda_0 + k_0\gamma_\alpha) < \mu_A(f_j) + j(\lambda_0 + k_0\gamma_\alpha) \text{ pour } j \neq n,$$

et n est l'ordre de $\mathcal{C}$ -divisibilité de f par ϕ . □

Remarque 1.14. Nous déduisons du lemme 1.13 que pour tout polynôme f de $K[x]$ nous avons l'égalité

$$k(f) = n.k_0(\mathcal{C}) ,$$

où n est l'ordre de $\mathcal{C}$ -divisibilité de f .

De plus comme tout polynôme n'appartenant pas à $\tilde{\Phi}(\mathcal{C})$ est A -inversible, pour tout polynôme f dont l'ordre de divisibilité est égal à n , il existe un polynôme e A -inversible tel que

$$f \underset{A}{\sim} e \phi^n .$$

Nous déduisons aussi du lemme 1.13 que pour tout entier $j \geq 1$ le polynôme ϕ^j est A -minimal.

Corollaire 1.15. *Si n est l'ordre de $\mathcal{C}$ -divisibilité de f alors le couple $(n, \mu_A(f_n))$ est un sommet du polygone de Newton $\mathcal{PN}(f; \mathcal{C}; \phi)$, c'est-à-dire qu'il existe s , $0 \leq s \leq r$ tel que $a_s = n$. De plus nous avons $\delta_s > \mu_\alpha(\phi)$ pour tout α dans A et il existe α avec $\mu_\alpha(\phi) > \delta_{s+1}$.*

Preuve. C'est une conséquence des inégalités

$$\mu_A(f_j) + j\mu_\alpha(\phi) > \mu_A(f_n) + n\mu_\alpha(\phi)$$

qui sont valables pour tout α suffisamment grand. $\square$

Soient μ une valuation et ϕ un polynôme-clé pour μ , alors pour tout polynôme f et pour toute relation de la forme

$$(*) \quad f = q_l \phi^l + \dots + q_0 ,$$

sans faire aucune hypothèse sur les polynômes q_j nous pouvons définir un polygone de Newton $\mathcal{PN}(*)$ comme l'enveloppe convexe dans $\mathbb{R}^+ \times \Gamma$ de l'ensemble $\{(j, \delta) \mid \delta \geq \mu(q_j), 0 \leq j \leq l\}$. En général ce polygone dépend de l'écriture $(*)$ choisie, mais nous avons le résultat suivant.

Proposition 1.16. *Si les polynômes q_j apparaissant dans le développement $(*)$ sont tous μ -inversibles, alors le couple $(n, \mu(q_n))$, où n est l'ordre de μ -divisibilité de f par ϕ , est un sommet du polygone de Newton $\mathcal{PN}(*)$, et la partie de $\mathcal{PN}(*)$ comprise entre les sommets $(0, \mu(q_0))$ et $(n, \mu(q_n))$ coïncide avec la partie principale du polygone de Newton $\mathcal{PN}(f; \mu; \phi)^+$.*

Preuve. Soit $\gamma > \delta = \mu(\phi)$ et soit μ' la valuation augmentée associée au polynôme-clé ϕ et à la valeur γ , $\mu' = [\mu; \mu'(\phi) = \gamma]$.

Comme les polynômes q_j sont μ -inversibles, nous pouvons calculer la valuation $\mu'(f)$ à partir du développement $(*)$ (cf. [McL 1] Theorem 5.2, [Va 1] Corollaire à la Proposition 1.3), c'est-à-dire nous avons l'égalité

$$\mu'(f) = \inf(\mu(q_j) + j\gamma; 0 \leq j \leq l) .$$

Par conséquent si $f = f_m \phi^m + \dots + f_0$ est le développement de f selon les puissances de ϕ , nous avons l'égalité

$$\inf(\mu(p_k) + k\gamma; 0 \leq k \leq m) = \inf(\mu(q_j) + j\gamma; 0 \leq j \leq l)$$

pour tout γ avec $\delta < \gamma < +\infty$, et nous en déduisons le résultat. $\square$

Dans la suite nous considérerons les polygones de Newton associés au polynôme P définissant une extension L de K fixée et nous noterons $\mathcal{PN}_\mu(\phi)$, $\mathcal{PN}_\mathcal{C}(\phi)$, le polygone de Newton associé aux polynômes P et ϕ et à la valuation μ , respectivement à la famille pseudo-convergente $\mathcal{C} = (\mu_\alpha)_{\alpha \in A}$. De même nous noterons $\mathcal{PN}_\mu(\phi)^+$ et $\mathcal{PN}_\mathcal{C}(\phi)^+$ les parties principales de ces polygones de Newton.

Remarque 1.17. Si le polynôme ϕ est de degré supérieur au degré de P , alors le polygone de Newton $\mathcal{PN}_\mu(\phi)$ est réduit au seul sommet $(0, \mu(P))$, et si il est de degré égal à celui de P , nous avons $P = \phi + a_0$ et le polygone de Newton $\mathcal{PN}_\mu(\phi)$ a une seule face comprise entre les deux sommets $(0, \mu(a_0))$ et $(1, 0)$.

Définition 1.18. Soit μ une valuation augmentée $\mu = [\mu_- ; \mu(\phi) = \gamma]$, respectivement une valuation augmentée limite $\mu = [(\mu_\alpha)_{\alpha \in A} ; \mu(\phi) = \gamma]$, alors pour tout polynôme f nous définissons le degré effectif $D_\phi(f)$ comme le plus grand entier j , $0 \leq j \leq m$ pour lequel nous avons l'égalité $\mu(f) = \mu_-(f_j) + j\gamma$, respectivement $\mu(f) = \mu_A(f_j) + j\gamma$, où $f = f_m\phi^m + \dots + f_0$ est le développement de f selon les puissances de ϕ .

Remarque 1.19. Nous déduisons des théorèmes permettant de définir les valuations augmentées et les valuations augmentées limites (cf. [McL 1] Theorem 4.4, [Va 1] Théorème 1.2 et Proposition 1.22) que le degré effectif est additif, c'est-à-dire que pour tous polynômes f et g nous avons l'égalité:

$$D_\phi(fg) = D_\phi(f) + D_\phi(g) .$$

Nous vérifions aussi que le degré effectif $D_\phi(f)$ ne dépend que de la classe de μ -équivalence du polynôme f , ou de la classe de μ_α -équivalence pour α suffisamment grand dans le cas d'une valuation augmentée limite.

Par définition, si nous appelons $o_\phi(f)$ l'ordre de μ -divisibilité de f par ϕ , ou l'ordre de A -divisibilité de f dans le cas d'une valuation augmentée limite, nous avons toujours l'inégalité

$$o_\phi(f) \leq D_\phi(f) .$$

La valeur $\gamma = \mu(\phi)$ est la pente d'une face du polygône de Newton $\mathcal{PN}(f; \mu; \phi)$ si et seulement si nous avons l'inégalité stricte $o_\phi(f) < D_\phi(f)$, les deux sommets définissant la face sont alors $(o_\phi(f), \mu(f_{o_\phi(f)}))$ et $(D_\phi(f), \mu(f_{D_\phi(f)}))$.

Nous aurons aussi besoin du résultat suivant, qui est une extension du lemme 1.1 de [Va 1].

Lemme 1.20. Soit μ_1 une valuation bien spécifiée définie par le polynôme ψ , c'est-à-dire une valuation augmentée $[\mu ; \mu_1(\psi) = \delta]$ ou une valuation augmentée limite $[(\mu_\alpha)_{\alpha \in A} ; \mu_1(\psi) = \delta]$. Alors tout polynôme g de $K[x]$ μ_1 -inversible est μ_1 -équivalent à r où r est le reste de la division euclidienne de g par le polynôme ψ .

Preuve. Rappelons que comme ψ est un polynôme-clé pour la valuation μ_1 , nous avons toujours $\mu(r) = \mu_1(r) \geq \mu_1(g)$ avec l'inégalité stricte $\mu_1(r) > \mu_1(g)$ si et seulement si g est μ_1 -divisible par ψ (cf. [Va 1] Lemme 1.1).

Nous supposons que la valuation μ_1 est une valuation augmentée, le cas d'une valuation augmentée limite se démontre de manière similaire. Soit $g = a_s\psi^s + \dots + a_1\psi + a_0$ le développement de g selon les puissances de ψ , avec $r = a_0$. Par hypothèse il existe un polynôme h tel que hg soit μ_1 -équivalent à 1, c'est-à-dire tel que $\mu_1(hg - 1) > \mu_1(hg) = \mu_1(1) = 0$.

Si nous avons $\mu_1(hg - 1) = \mu(hg - 1)$ alors hg est μ -équivalent à 1, par conséquent g n'est pas μ -divisible par ψ et $\mu_1(g) = \mu(g)$ et le résultat est une conséquence du lemme 1.4 de [Va 1].

Supposons que nous avons $\mu_1(hg - 1) > \mu(hg - 1)$. Pour tout δ' avec $\mu(\psi) < \delta' < \delta = \mu_1(\psi)$ nous pouvons définir la valuation augmentée μ' associée à ϕ et à δ' , $\mu' = [\mu ; \mu'(\psi) = \delta']$, alors pour tout polynôme f nous avons $\mu(f) \leq \mu'(f) \leq \mu_1(f)$ avec $\mu(f) = \mu'(f)$ si et seulement si $\mu(f) = \mu_1(f)$. Nous pouvons choisir δ' suffisamment proche de δ tel que nous avons encore l'inégalité $\mu'(hg - 1) > \mu(hg - 1)$, nous en déduisons que g n'est pas μ' -divisible par ψ et nous avons $\mu(r) = \mu(a_0) = \mu'(g)$. Comme ψ divise $g - r$ et comme nous avons $\delta' < \delta$, nous en déduisons $\mu'(g) \leq \mu'(g - r) < \mu_1(g - r)$, d'où le résultat. $\square$

2 Valuations approchées

Soit P un polynôme irréductible séparable unitaire appartenant à $K[x]$, et soit L l'extension algébrique de K définie par P , c'est-à-dire $L = K[x]/(P)$. Si nous choisissons une racine θ de P dans K^{sep} , une clôture séparable de K fixée, L est le sous-corps $K(\theta)$ de K^{sep} .

Toute valuation μ de L qui prolonge la valuation ν définit une pseudo-valuation ζ de $K[x]$, dont le noyau $\mathcal{S}(\zeta) = \{f \in K[x] \mid \zeta(f) = +\infty\}$ est égal à l'idéal de $K[x]$ engendré par le polynôme P , $\mathcal{S}(\zeta) = (P)$. La pseudo-valuation ζ est définie par

$$\zeta(f) = \mu(f(\theta)) \quad \forall f \in K[x] .$$

Il existe une bijection entre le sous-ensemble $\mathcal{E}_P = \mathcal{E}_P(K[x], \nu)$ des pseudo-valuations ζ de $\mathcal{E}(K[x], \nu)$ dont le noyau est égal à l'idéal (P) et l'ensemble $\mathcal{E}(L, \nu)$ des valuations μ de L qui prolongent la valuation ν . Nous appelons indifféremment $\mathcal{A}(\mu)$ ou $\mathcal{A}(\zeta)$ la famille admise de valuations de $K[x]$, définie uniquement à équivalence près, associée à la pseudo-valuation ζ .

Nous voulons déterminer l'ensemble $\mathcal{E}(L, \nu)$ des valuations μ de L qui prolongent ν , c'est-à-dire l'ensemble $\mathcal{E}_P$ des pseudo-valuations ζ appartenant à $\mathcal{E}(K[x], \nu)$ qui ont pour noyau l'idéal (P) . C'est équivalent à déterminer l'ensemble des familles admises $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{F}(K[x], \nu)$ qui sont associées aux pseudo-valuations appartenant à $\mathcal{E}_P$.

Une valuation ou pseudo-valuation μ de $\mathcal{E}$ est dite *bien spécifiée* si μ est obtenue soit comme valuation augmentée $\mu = [\mu_- ; \mu(\phi) = \gamma]$ pour une valuation μ_- , soit comme valuation augmentée limite $\mu = [(\mu_\alpha)_{\alpha \in A} ; \mu(\phi) = \gamma]$ pour une famille pseudo-convergente $\mathcal{C} = (\mu_\alpha)_{\alpha \in A}$ (cf. [Va 3]). Une valuation, ou pseudo-valuation, μ est bien spécifiée si et seulement si la famille admise associée $\mathcal{A}(\mu)$ est complète, et dans ce cas la valuation ou pseudo-valuation μ est la dernière valuation $\mu_{\bar{I}}$ de la famille $\mathcal{A}(\mu)$ ([Va 3], Proposition 1.4).

Toute pseudo-valuation ζ de $\mathcal{E}_P$ est bien spécifiée, et ζ est alors la pseudo-valuation augmentée ou la pseudo-valuation augmentée limite $\mu_{\bar{I}}$ associée au polynôme $\phi_{\bar{I}} = P$ et à la valeur $\gamma_{\bar{I}} = +\infty$.

Sur l'ensemble $\mathcal{E}$ nous avons deux relations d'ordre partiel $\mu \leq \mu'$ et $\mu << \mu'$ définies de la manière suivante (cf. [Va 2]):

1. $\mu \leq \mu'$ si et seulement si $\mu(f) \leq \mu'(f)$ pour tout f dans $K[x]$,
2. $\mu << \mu'$ si et seulement si $\mathcal{A}(\mu)$ est une sous-famille de $\mathcal{A}(\mu')$.

Si les deux valuations μ et μ' sont bien spécifiées, ce que nous supposons dans la suite, alors nous avons $\mu << \mu'$ si et seulement si μ appartient à la famille $\mathcal{A}(\mu')$.

Nous rappelons que si nous avons deux valuations μ et μ' de $\mathcal{E}$ qui vérifient $\mu \leq \mu'$, nous définissons l'ensemble $\tilde{\Phi} = \tilde{\Phi}(\mu, \mu')$ comme l'ensemble des polynômes f de $K[x]$ tels que $\mu(f) < \mu'(f)$. Si $\tilde{\Phi}$ est non vide, c'est-à-dire pour $\mu \neq \mu'$, nous notons d le degré minimal d'un polynôme appartenant à cet ensemble et nous posons

$$\Phi = \Phi(\mu, \mu') = \{ \phi \in K[x] \mid \mu(\phi) < \mu'(\phi) , \deg \phi = d \text{ et } \phi \text{ unitaire} \} ,$$

et tout polynôme appartenant à Φ est un polynôme-clé pour μ .

La relation $\mu << \mu'$ entraîne la relation $\mu \leq \mu'$. Réciproquement nous avons le résultat suivant.

Lemme 2.1. *Soient μ et μ' deux valuations ou pseudo-valuations bien spécifiées de $\mathcal{E}$ qui vérifient la relation $\mu \leq \mu'$, et soit ϕ le polynôme qui définit la valuation μ .*

Alors soit nous avons $\mu << \mu'$, soit il existe un polynôme-clé ϕ'' pour μ avec $\deg \phi'' = \deg \phi$ et une valuation augmentée $\mu'' = [\mu ; \mu''(\phi'') = \gamma'']$ qui vérifie $\mu'' << \mu'$. De plus si la valuation μ est de la forme $\mu = [\mu_- ; \mu(\phi) = \gamma]$, respectivement $\mu = [(\mu_\alpha)_{\alpha \in A} ; \mu(\phi) = \gamma]$, la valuation μ'' est aussi de la forme $\mu'' = [\mu_- ; \mu''(\phi'') = \gamma'']$, respectivement $\mu'' = [(\mu_\alpha)_{\alpha \in A} ; \mu''(\phi'') = \gamma'']$.

Preuve. Nous considérons d'abord le cas où μ est une valuation augmentée $\mu = [\mu_- ; \mu(\phi) = \gamma]$, avec μ_- qui n'est pas la valuation ν de K , alors nous avons $\mu_- << \mu'$, c'est-à-dire μ_- est une des valuations de la famille admise $\mathcal{A}$ associée à μ' , c'est-à-dire est de la forme $\mu_i^{(j)}$ (cf; [Va 2], Proposition 2.18).

Nous avons $\mu_- \leq \mu \leq \mu'$, avec $\mu_- \neq \mu$, par conséquent les ensembles $\Phi = \Phi(\mu_-, \mu)$ et $\Phi' = \Phi(\mu_-, \mu')$ sont égaux (cf. [Va 2], Corollaire au Lemme 2.3). Le polynôme-clé ϕ appartient

à Φ et tout successeur de la valuation μ_- dans la famille $\mathcal{A}$ est défini à partir d'un polynôme appartenant à Φ' .

Supposons que nous ayons l'égalité $\gamma = \mu(\phi) = \mu'(\phi)$ et nous considérons les différents cas.

- i) L'ensemble $\tilde{\Phi}(\mu, \mu')$ est vide alors nous avons $\mu = \mu'$.
- ii) L'ensemble $\tilde{\Phi}(\mu, \mu')$ est non vide et le degré minimal d'un polynôme f dans $\tilde{\Phi}(\mu, \mu')$ est strictement plus grand que le degré de ϕ , alors nous avons $\mu = \mu_{i+1}^{(j)}$ et μ appartient à $\mathcal{A}$, d'où $\mu < \mu'$.
- iii) L'ensemble $\tilde{\Phi}(\mu, \mu')$ est non vide et le degré minimal d'un polynôme de $\tilde{\Phi}(\mu, \mu')$ est égal au degré de ϕ , alors $\Phi(\mu, \mu')$ est égal à l'ensemble des ψ dans $\Phi(\mu, \mu')$ tels que $\mu'(\psi) > \mu'(\phi)$. Si l'ensemble des valeurs $\Lambda = \{\mu'(\psi), \psi \in \Phi(\mu, \mu')\}$ n'admet pas de plus grand élément alors la valuation μ appartient à une sous famille admissible pseudo-convergente de $\mathcal{A}$ et nous avons $\mu < \mu'$. Si l'ensemble Λ admet un plus grand élément λ , la valuation μ'' cherchée est la valuation $\mu_{i+1}^{(j)} = [\mu_i^{(j)} ; \mu_{i+1}^{(j)}(\phi_{i+1}^{(j)}) = \gamma_{i+1}^{(j)}]$ avec $\gamma_{i+1}^{(j)} = \mu'(\phi_{i+1}^{(j)}) = \lambda = \gamma''$, dans ce cas nous avons $\phi'' = \phi + h$ avec $\mu_-(h) = \gamma$ et $\gamma < \gamma''$.

Supposons que nous ayons l'inégalité $\gamma = \mu(\phi) < \mu'(\phi) = \gamma_1$. Comme ϕ est un polynôme-clé pour la valuation μ nous pouvons définir la valuation augmentée $\mu_1 = [\mu ; \mu_1(\phi) = \gamma_1]$ qui est aussi égale à la valuation augmentée $[\mu_- ; \mu_1(\phi) = \gamma_1]$ et qui vérifie $\mu \leq \mu_1 \leq \mu'$ avec $\mu_1(\phi) = \mu'(\phi)$.

Dans ce cas la valuation μ n'appartient pas à la famille $\mathcal{A}$, mais nous déduisons de ce qui précède appliquée à la valuation μ_1 que nous pouvons prendre pour μ'' soit μ_1 , soit la valuation μ'' définie par le polynôme $\phi'' = \phi_{i+1}^{(j)}$ et par la valeur $\gamma'' = \gamma_{i+1}^{(j)}$. En particulier nous avons soit $\phi'' = \phi$, soit $\phi'' = \phi + h$ avec $\mu_-(h) = \gamma_1$, d'où ϕ'' μ -équivalent à ϕ .

Le cas où μ est une valuation augmentée associée à un polynôme unitaire ϕ de degré un, c'est-à-dire pour $\mu_- = \nu$, et le cas où μ est une valuation augmentée limite, $\mu = [(\mu_\alpha)_{\alpha \in A} ; \mu(\phi) = \gamma]$, se démontrent de manière identique. $\square$

Définition 2.2. Nous appelons valuation approchée du polynôme P de $K[x]$ toute valuation bien spécifiée μ de $\mathcal{E}(K[x], \nu)$ pour laquelle il existe une pseudo-valuation ζ de $\mathcal{E}_P$ telle que $\mu \leq \zeta$ et qui vérifie $\mu(\phi) = \zeta(\phi)$ où ϕ est le polynôme qui définit μ . Nous disons que μ est la valuation approchée associée à la pseudo-valuation ζ de $\mathcal{E}_P$.

Nous notons $\mathcal{V}_{AP}$ l'ensemble des valuations approchées de P .

Définition 2.3. Nous appelons racine approchée du polynôme P de $K[x]$ tout polynôme ϕ qui définit une valuation approchée μ de P .

Nous notons $\mathcal{R}_{AP}$ l'ensemble des racines approchées de P .

Remarque 2.4. Dans la définition d'une famille admissible $\mathcal{A}$ nous avons demandé que pour toute sous-famille simple $\mathcal{S}^{(j)}$ de $\mathcal{A}$, les polynômes-clé $\phi_i^{(j)}$ définissant la partie discrète $\mathcal{D}^{(j)}$ de $\mathcal{S}^{(j)}$ vérifient l'inégalité stricte $\deg \phi_i^{(j)} < \deg \phi_{i+1}^{(j)}$. Cette condition sur les degrés ayant pour fonction d'assurer la minimalité de la famille de valuations augmentées itérées apparaissant dans $\mathcal{S}^{(j)}$, et ainsi permet d'avoir l'unicité de la partie discrète $\mathcal{D}^{(j)}$ (cf. [Va 2]).

Nous pouvons ne pas imposer cette condition sur le degré, et seulement demander que pour toute valuation $\mu_i^{(j)}$ appartenant à $\mathcal{D}^{(j)}$ le polynôme-clé $\phi_{i+1}^{(j)}$ vérifie $\deg \phi_i^{(j)} \leq \deg \phi_{i+1}^{(j)}$ et ne soit pas $\mu_i^{(j)}$ -équivalent à $\phi_i^{(j)}$. Nous trouvons alors une famille de valuations augmentées ou augmentées limites qui vérifie essentiellement les mêmes propriétés qu'une famille admissible, une telle famille est appelée une famille *pré-admissible* dans [Va 6].

Lemme 2.5. Une valuation μ est une valuation approchée du polynôme P si et seulement si elle appartient à une famille pré-admissible associée à l'une des pseudo-valuations ζ de $\mathcal{E}_P$.

Preuve. C'est une conséquence de la définition d'une famille pré-admissible et du fait que de toute famille pré-admissible $\mathcal{A}'$ nous pouvons extraire une famille admissible $\mathcal{A}$ déterminée de la manière suivante.

Soient $\mathcal{S}^{(j)} = (\mu_1^{(j)}, \dots, \mu_n^{(j)}; (\mu_\alpha^{(j)})_{\alpha \in A^{(j)}})$, $1 \leq j \leq N$, les sous-familles pré-admissibles simples de $\mathcal{A}'$. Alors la sous-famille $\mathcal{A}$ obtenue en enlevant toutes les valuations $\mu_i^{(j)}$ pour lesquelles nous avons l'égalité $\deg \phi_i^{(j)} = \deg \phi_{i+1}^{(j)}$, est une famille admissible. $\square$

Par définition une valuation approchée est une valuation et non une pseudo-valuation, en particulier toute valuation approchée de P est distincte de la pseudo-valuation ζ à laquelle elle est associée.

Théorème 2.6. *Soit μ une valuation bien spécifiée de $\mathcal{E}(K[x], \nu)$ et soit ϕ le polynôme qui définit la valuation μ . Alors μ est une valuation approchée du polynôme P si et seulement si*

1. P est μ_- -divisible par ϕ si μ est la valuation augmentée $\mu = [\mu_-; \mu(\phi) = \gamma]$ avec $\mu_- \neq \nu$, et est A -divisible si μ est la valuation augmentée limite $\mu = [(\mu_\alpha)_{\alpha \in A}; \mu(\phi) = \gamma]$,
2. il existe au moins un polynôme-clé ψ pour la valuation μ , avec ψ non μ -équivalent à ϕ , qui μ -divise P .

Remarque 2.7. Dans le cas où μ est une valuation augmentée, $\mu = [\mu_-; \mu(\phi) = \gamma]$, nous déduisons du théorème 5.1 de [McL 1] ou du théorème 1.2 de [Va 1] que la condition (1) est équivalente à la condition $\mu_-(P) < \mu(P)$, et dans le cas où μ est une valuation augmentée limite, $\mu = [(\mu_\alpha)_{\alpha \in A}; \mu(\phi) = \gamma]$, nous déduisons de la proposition 1.23 de [Va 1] que la condition (1) est équivalente à la condition $\mu_\alpha(P) < \mu(P)$ pour tout α dans A .

Dans le cas où μ_- est la valuation ν de K , c'est-à-dire pour μ associée à un polynôme unitaire de degré un, la condition (1) est supposée toujours vérifiée.

La condition (2) est équivalente à demander que l'image de P dans l'algèbre graduée $\text{gr}_\mu K[x]$ associée à la valuation μ admette un diviseur premier distinct de $H_\mu(\phi)$.

Remarque 2.8. Le théorème 2.6 permet de déterminer uniquement à partir de la valuation μ et du polynôme P si la valuation μ apparaît dans une famille pré-admissible $\mathcal{A}(\zeta)$ associée à une pseudo-valuation ζ appartenant à l'ensemble $\mathcal{E}_P(K[x], \nu)$, sans faire intervenir cette pseudo-valuation ζ .

Ainsi grâce au théorème nous pouvons construire les familles admissibles $\mathcal{A}$ appartenant à $\mathcal{F}(K[x], \nu)$ associées aux pseudo-valuations ζ dont le noyau est égal à l'idéal (P) , c'est-à-dire associées aux valuations μ qui prolongent ν à l'extension $L = K[x]/(P)$ de K .

Preuve. Montrons d'abord que si μ est une valuation approchée du polynôme P , elle vérifie les conditions i) et ii) du théorème. Par hypothèse, il existe alors une pseudo-valuation ζ dans $\mathcal{E}_P$ telle que $\mu \leq \zeta$ et $\gamma = \mu(\phi) = \zeta(\phi)$.

Si μ est une valuation augmentée, $\mu = [\mu_-; \mu(\phi) = \gamma]$, comme μ_- est une valuation, nous avons $\mu_-(P) < +\infty$, d'où P appartient à $\tilde{\Phi}(\mu_-, \zeta)$ et par conséquent appartient à $\tilde{\Phi}(\mu_-, \mu)$ d'après le corollaire au lemme 2.3 de [Va 2], nous en déduisons que P est μ_- -divisible par le polynôme-clé ϕ . Si μ est une valuation augmentée limite $\mu = [(\mu_\alpha)_{\alpha \in A}; \mu(\phi) = \gamma]$, nous montrons de la même manière que pour tout α nous avons $\mu_\alpha(P) < \mu(P)$, par conséquent P est A -divisible par le polynôme-clé limite ϕ .

Si la condition ii) n'était pas vérifiée pour la valuation μ , le polynôme P serait μ -équivalent à un produit $e\phi^n$, avec e μ -inversible et $n \geq 0$. Nous aurions alors

$$\zeta(P - e\phi^n) \geq \mu(P - e\phi^n) > \mu(e\phi^n) = \zeta(e\phi^n),$$

d'où l'égalité $\zeta(P) = \zeta(e\phi^n)$, ce qui est impossible car $\zeta(e\phi^n) < +\infty$.

Pour montrer la réciproque, nous allons faire une récurrence descendante sur le degré du polynôme ϕ . Plus précisément nous allons montrer que si μ est une valuation bien définie associée à un polynôme ϕ de degré d qui vérifie les conditions i) et ii) du théorème, il existe une nouvelle valuation bien définie μ' associée à un polynôme ϕ' de degré $d' > d$ qui vérifie encore les conditions i) et ii) du théorème et telle que nous ayons $\mu \leq \mu'$ et $\mu(\phi) = \mu'(\phi)$. En fait nous allons

construire la valuation μ' comme valuation augmentée, $\mu' = [\mu_1 ; \mu'(\phi')]$ avec $\mu_1 = \mu$ ou μ_1 valuation augmentée pour la valuation μ , ou comme valuation augmentée limite, $\mu' = [(\mu_\alpha)_{\alpha \in A} ; \mu'(\phi')]$ avec $(\mu_\alpha)_{\alpha \in A}$ famille admissible pseudo-convergente où chaque μ_α est une valuation augmentée pour μ .

Si nous avons $\deg \phi' = d' = \deg P$, alors ϕ' est égal à P , μ' est une des pseudo-valuations ζ appartenant à $\mathcal{E}_P$ et nous trouvons directement que μ est une valuation approchée du polynôme P . Si nous avons l'inégalité $\deg \phi' = d' < \deg P$, alors μ' est une valuation et par hypothèse de récurrence μ' est une valuation approchée de P associée à une pseudo-valuation ζ de $\mathcal{E}_P$. Nous avons alors les inégalités $\mu \leq \mu' \leq \zeta$, et comme ϕ est un polynôme de degré $d < \deg \phi'$ nous avons $\mu'(\phi) = \zeta(\phi)$, par conséquent μ est aussi une valuation approchée de P associée à ζ .

Nous considérons la décomposition de P en facteurs μ -irréductibles,

$$P \underset{\mu}{\sim} e \phi_0^{n_0} \phi_1^{n_1} \dots \phi_t^{n_t},$$

avec $\phi_0 = \phi$ et les ϕ_j sont des polynômes-clés pour μ non μ -équivalents entre eux, et $n_0 \geq 0$ et $n_j \geq 1$ pour $j = 1, \dots, t$, et par hypothèse nous avons $t \geq 1$.

Pour tout $j = 1, \dots, t$ nous considérons l'ensemble Ψ_j des polynômes-clés ψ pour μ qui sont μ -équivalents à ϕ_j , en effet dans la décomposition de P en facteurs μ -irréductibles nous pouvons remplacer ϕ_j par n'importe quel polynôme ψ appartenant à Ψ_j . Un polynôme ψ appartient à Ψ_j si et seulement si nous avons $\psi = \phi_j - h$ avec h vérifiant $\deg h < \deg \phi_j$ et $\mu(h) > \mu(\phi_j)$.

Considérons le polynôme-clé ϕ_1 et l'ensemble Ψ_1 . Au polynôme ϕ_1 et à la valuation μ nous pouvons associer le polygone de Newton $\mathcal{PN}_\mu(\phi_1)$, qui est déterminé par le développement de P selon les puissances de ϕ_1 , $P = q_m \phi_1^m + \dots + q_0$. Nous avons associé à $\mathcal{PN}_\mu(\phi_1)$ la suite d'entiers $0 = a_0 < a_1 < \dots < a_r = m$ correspondant aux sommets $(a_k, \mu(q_{a_k}))$, et la suite de valeurs $\delta_1 > \dots > \delta_r$ correspondant aux pentes des faces.

D'après le corollaire 1.5 le couple $(n_1, \mu(q_{n_1}))$ est un sommet du polygone $\mathcal{PN}_\mu(\phi_1)$, et comme nous avons $n_1 > 0$ la partie principale $\mathcal{PN}_\mu(\phi_1)^+$ du polygone est non vide et il existe au moins une face de pente $\delta > \mu(\phi_1)$. Si nous choisissons une de ces faces de pente $\delta = \delta_k$, comprise entre les sommets $(a_{k-1}, \mu(q_{a_{k-1}}))$ et $(a_k, \mu(q_{a_k}))$, $0 < k \leq s$, nous pouvons définir la valuation augmentée $\mu_1 = [\mu ; \mu_1(\phi_1) = \delta]$. Alors le polynôme P est μ_1 équivalent à $q_{a_k} \phi_1^{a_k} + \dots + q_{a_{k-1}} \phi_1^{a_{k-1}}$, et nous pouvons écrire

$$P \underset{\mu_1}{\sim} e' \phi_1^{n'} g,$$

où $e' = q_{a_{k-1}}$ est un polynôme μ_1 -inversible, où $n' = a_{k-1} \geq 0$ et où g est le polynôme

$$g = q_{a_k} \phi_1^{(a_k - a_{k-1})} + \dots + q_{a_{k-1}}.$$

C'est un polynôme non μ_1 -inversible d'après le lemme 1.20 et non μ_1 -divisible par ϕ_1 . Nous en déduisons que la valuation augmentée μ_1 vérifie la condition i), car P est μ -divisible par ϕ_1 , et la condition ii), car g admet au moins un polynôme-clé ψ non μ_1 -équivalent à ϕ_1 comme μ_1 -diviseur.

Ainsi, s'il existe un polynôme-clé ϕ_j parmi les μ -diviseurs de P avec $\deg \phi_j > \deg \phi$, nous pouvons prendre pour valuation bien définie μ' la valuation augmentée $\mu' = [\mu ; \mu'(\phi') = \delta']$, où ϕ' est le polynôme-clé ϕ_j et où δ' est une des pentes de la partie principale $\mathcal{PN}_\mu(\phi_j)^+$ du polygone de Newton associé à ϕ_j .

Supposons que tous les polynômes-clés ϕ_j apparaissant comme facteurs μ -irréductibles de P aient pour degré $d = \deg \phi$, et comme précédemment nous en choisissons un ϕ_1 et nous considérons l'ensemble Ψ_1 . A tout polynôme ψ dans Ψ_1 nous pouvons associer son degré d_1 , la valeur $\gamma_1 = \mu(\psi)$ et n_1 l'ordre de μ -divisibilité de P par ψ , ces trois valeurs ne dépendent que de l'ensemble Ψ_1 et par hypothèse nous avons $d_1 = \deg \phi$. Au polynôme ψ nous associons aussi son polygone de Newton $\mathcal{PN}_\mu(\psi)$ et sa partie principale $\mathcal{PN}_\mu(\psi)^+ = \mathcal{PN}_\mu(\psi) \cap ([0, n_1] \times \Gamma)$, et nous voulons étudier $\mathcal{PN}_\mu(\psi)^+$ quand ψ parcourt Ψ_1 .

Soient ψ et ψ' deux polynômes appartenant à Ψ_1 , en particulier nous pouvons écrire $\psi' = \psi - h$ avec $\deg h < \deg \psi = d_1$ et $\mu(h) > \mu(\psi) = \gamma_1$, et soient les développements de P selon les puissances

de ψ et de ψ' , c'est-à-dire respectivement

$$P = q_m \psi^m + \dots + q_0 \quad \text{et} \quad P = q'_m \psi'^m + \dots + q'_0 .$$

Nous considérons les parties principales des polygones de Newton associés $\mathcal{PN}_\mu(\psi)^+$ et $\mathcal{PN}_\mu(\psi')^+$, déterminés respectivement par les suites

$$0 = a_0 < a_1 < \dots < a_s = n_1 \quad \text{et} \quad \delta_1 > \dots > \delta_s > \gamma_1 \quad \text{pour } \psi ,$$

$$0 = a'_0 < a'_1 < \dots < a'_{s'} = n_1 \quad \text{et} \quad \delta'_1 > \dots > \delta'_{s'} > \gamma_1 \quad \text{pour } \psi' .$$

Nous déduisons du lemme 1.4 que comme ψ et ψ' sont des polynômes μ -minimaux nous avons l'égalité $\mu(P) = \mu(q_{n_1}) + n_1 \gamma_1 = \mu(q'_{n_1}) + n_1 \gamma_1$, par conséquent nous avons $\mu(q_{n_1}) = \mu(q'_{n_1})$, c'est-à-dire que le dernier sommet $(n_1, \mu(q_{n_1}))$ de la partie principale du polygone de Newton $\mathcal{PN}_\mu(\psi)^+$ ne dépend pas du polynôme ψ de Ψ_1 .

Nous choisissons un polynôme-clé ψ appartenant à Ψ_1 , nous appelons comme précédemment δ_1 la première pente du polygone de Newton associé $\mathcal{PN}_\mu(\psi)$. Nous définissons alors la valuation augmentée $\mu_1 = [\mu ; \mu_1(\psi) = \delta_1]$.

Comme nous avons supposé $\deg \psi = \deg \phi$, pour tous les polynômes q_j apparaissant dans le développement de P selon les puissances de ψ nous avons $\mu(q_j) = \mu_1(q_j)$, par conséquent les polygones de Newton associés aux valuations μ et μ_1 sont égaux,

$$\mathcal{PN}_\mu(\psi) = \mathcal{PN}_{\mu_1}(\psi) .$$

De plus comme δ_1 est la première pente du polygone de Newton $\mathcal{PN}_{\mu_1}(\psi)$, nous déduisons du lemme 1.4 que P n'est pas μ_1 -divisible par ψ .

Proposition 2.9. *Soit ψ' un polynôme-clé pour la valuation augmentée μ_1 vérifiant $\deg \psi' = \deg \psi$ et tel que P soit μ_1 -divisible par ψ' . Alors le polynôme ψ' appartient à Ψ_1 et la partie principale $\mathcal{PN}_{\mu}(\psi')^+$ du polygone de Newton associé à ψ' coïncide avec la partie principale $\mathcal{PN}_{\mu}(\psi)^+$ du polygone de Newton associé à ψ entre les sommets $(a_1, \mu(q_{a_1}))$ et $(n_1, \mu(q_{n_1}))$, est au dessus de $\mathcal{PN}_{\mu}(\psi)^+$ entre $(0, \mu(q_0))$ et $(a_1, \mu(q_{a_1}))$ et son premier sommet $(0, \mu(q'_0))$ est strictement au dessus de celui de $\mathcal{PN}_{\mu}(\psi)^+$.*

Plus précisément si nous appelons encore

$$0 = a_0 < a_1 < \dots < a_s = n_1 \quad \text{et} \quad \delta_1 > \dots > \delta_s > \gamma_1 ,$$

et

$$0 = a'_0 < a'_1 < \dots < a'_{s'} = n_1 \quad \text{et} \quad \delta'_1 > \dots > \delta'_{s'} > \gamma_1 ,$$

les suites associées respectivement à $\mathcal{PN}_\mu(\psi)^+$ et à $\mathcal{PN}_\mu(\psi')^+$, nous avons les égalités:

$$s' = s + t \text{ avec } t \geq 0 , \quad a'_{j+t} = a_j \text{ pour } 1 \leq j \leq s , \quad \delta'_{j+t} = \delta_j \text{ pour } 2 \leq j \leq s ,$$

et les inégalités:

$$\delta'_{1+t} \geq \delta_1 \quad \text{et} \quad \mu(q'_0) > \mu(q_0) .$$

Par conséquent, si nous avons $\delta_1 = \delta'_{1+t}$, nous devons avoir $t \geq 1$ et $0 < a'_t < a_1$.

Nous pouvons aussi remarquer que comme P est μ_1 -divisible par ψ' , les polynômes ψ et ψ' ne sont pas μ_1 -équivalents.

Preuve de la proposition. Si ψ' est un polynôme-clé pour la valuation augmentée $\mu_1 = [\mu ; \mu_1(\psi) = \delta_1]$ non μ_1 -équivalent à ψ et de même degré que ψ , nous avons $\psi' = \psi - h$ avec $\deg h < \deg \psi$ et $\mu(h) = \delta_1$ (cf. [McL 1] Theorem 9.4, [Va 1] Théorème 1.11). En particulier nous en déduisons que ψ' est μ -équivalent à ψ , par conséquent appartient aussi à Ψ_1 .

Soit δ vérifiant $\delta_1 \geq \delta > \gamma_1$, alors les valuations augmentées $\mu' = [\mu ; \mu'(\psi) = \delta]$ et $\mu'' = [\mu ; \mu''(\psi') = \delta]$ sont égales (cf. [Va 2] Proposition 1.2), par conséquent nous avons l'égalité

$$\mu'(P) = \inf(\mu(q_j) + j\delta ; 0 \leq j \leq m) = \inf(\mu(q'_j) + j\delta ; 0 \leq j \leq m) ,$$

où $P = q_m\psi^m + \dots + q_0$ et $P = q'_m\psi'^m + \dots + q'_0$ sont les développements de P selon les puissances de ψ et de ψ' . Nous en déduisons l'égalité entre les parties des polygones de Newton $\mathcal{PN}_\mu(\psi)$ et $\mathcal{PN}_\mu(\psi')$ correspondant à des pentes δ vérifiant $\delta_1 > \delta > \gamma_1$. En particulier nous en déduisons l'existence de $t \geq 0$ tel que $s' = s + t$, $a'_{j+t} = a_j$ et $\delta'_{j+t} = \delta_j$ pour $2 \leq j \leq s$. De plus, pour tout δ avec $\inf(\delta_1, \delta'_{1+t}) > \delta > \delta_2 = \delta'_{2+t}$, nous avons l'égalité

$$\mu'(P) = \mu(q_{a_1}) + a_1\delta = \mu(q'_{a'_{1+t}}) + a'_{1+t}\delta ,$$

d'où $a'_{1+t} = a_1$.

Si nous avons $\delta_1 > \delta'_{1+t}$, alors pour tout δ avec $\delta_1 > \delta > \delta'_{1+t}$ nous aurions l'égalité $\mu'(P) = \mu(q_{a_1}) + a_1\delta = \mu(q'_{a'_t}) + a'_t\delta$, ce qui est impossible car $a'_t < a'_{1+t} = a_1$.

Par hypothèse P n'est pas μ_1 -divisible par le polynôme μ_1 -minimal ψ , alors comme q_0 est le reste de la division euclidienne de P par ψ nous avons l'égalité $\mu_1(q_0) = \mu_1(P)$, par contre P est μ_1 -divisible par le polynôme ψ' , et comme q'_0 est le reste de la division euclidienne de P par ψ' nous avons l'inégalité stricte $\mu_1(q'_0) > \mu_1(P)$. Nous en déduisons l'inégalité $\mu(q'_0) > \mu(q_0)$. $\square$

Suite de la preuve du théorème. A tout polynôme ψ appartenant à Ψ_1 nous associons la valeur $\lambda(\psi) = \mu(q_0(\psi))$, où $q_0 = q_0(\psi)$ est défini par le développement de P selon les puissances de ψ , $P = q_m\psi^m + \dots + q_0$. Comme P est irréductible, pour $\deg P > \deg \psi$ nous avons toujours $q_0 \neq 0$, par conséquent $\lambda(\psi) \neq +\infty$ et nous définissons le sous-ensemble Λ_1 de Γ par

$$\Lambda_1 = \{ \lambda(\psi) \mid \psi \in \Psi_1 \} .$$

Si l'ensemble Λ_1 a un plus grand élément $\bar{\lambda}$, nous choisissons ψ dans Ψ_1 avec $\lambda(\psi) = \bar{\lambda}$. Nous déduisons alors de la proposition 2.9 que tout polynôme-clé ϕ' pour la valuation augmentée $\mu_1 = [\mu ; \mu_1(\psi) = \delta_1]$ qui μ_1 -divise P est de degré $\deg \phi' > \deg \psi$. Nous trouvons alors comme précédemment que pour toute pente δ' de la partie principale du polygone de Newton $\mathcal{PN}_{\mu_1}(\psi')$, la valuation augmentée $\mu' = [\mu_1 ; \mu'(\phi') = \delta']$ satisfait les conditions i) et ii) du théorème avec $\deg \phi' > \deg \psi$.

Supposons maintenant que l'ensemble Λ_1 n'a pas de plus grand élément. Nous choisissons un polynôme ψ appartenant à Ψ_1 tel que l'indice a_1 , $0 < a_1 \leq m$ du deuxième sommet $(a_1, \mu(q_{a_1}))$ du polygone de Newton $\mathcal{PN}_\mu(\psi)$ associé à ψ est minimal, et nous appelons encore δ_1 la pente de la première face de $\mathcal{PN}_\mu(\psi)^+$ et μ_1 la valuation augmentée $\mu_1 = [\mu ; \mu_1(\psi) = \delta_1]$. Nous considérons le sous-ensemble Ψ_1^* de Ψ_1 défini par

$$\Psi_1^* = \{ \psi' \mid \psi' \text{ polynôme-clé pour } \mu_1 \text{ et } \psi' \mid P \} .$$

Alors d'après la proposition 2.9 pour tout polynôme ψ' appartenant à Ψ_1^* les parties principales $\mathcal{PN}_\mu(\psi)^+$ et $\mathcal{PN}_\mu(\psi')^+$ des polygones de Newton associés respectivement à ψ et ψ' ont même nombre de faces, coïncident sur $[a_1, a_s] \times \Gamma$ et de plus $(a_1, \mu(q_{a_1}))$ est un sommet commun aux deux polygones de Newton. Nous définissons aussi le sous-ensemble Λ_1^* de Λ_1 par:

$$\Lambda_1^* = \{ \lambda(\psi') = \mu(q_0(\psi')) \mid \psi' \in \Psi_1^* \} .$$

L'ensemble Λ_1^* n'a pas de plus grand élément et nous pouvons écrire

$$\Lambda_1^* = \{ \lambda_\alpha \mid \alpha \in A \} ,$$

où A est un ensemble totalement ordonné tel que $\lambda_\alpha < \lambda_\beta$ pour $\alpha < \beta$ dans A . Pour tout α dans A nous choisissons un polynôme ψ_α dans Ψ_1^* avec $\lambda(\psi_\alpha) = \lambda_\alpha$. Nous notons γ_α la pente de la première face du polygone de Newton $\mathcal{PN}_\mu(\phi_\alpha)$ associé à ϕ_α , et nous définissons la valuation augmentée $\mu_\alpha = [\mu ; \mu_\alpha(\phi_\alpha) = \gamma_\alpha]$, où γ_α est défini par l'égalité $\lambda_\alpha = \mu(q_{a_1}) + a_1\gamma_\alpha$.

La famille $\mathcal{C} = (\mu_\alpha)_{\alpha \in A}$ est une famille pseudo-convergente de valuations, et nous définissons l'ensemble

$$\tilde{\Phi}(A) = \{f \in K[x] \mid \mu_\alpha(f) < \mu_\beta(f) \text{ pour tout } \alpha < \beta \text{ dans } A\}.$$

Nous voulons montrer que la famille de polynômes $(\phi_\alpha)_{\alpha \in A}$ associée à la famille $\mathcal{C}$ est non convergente, c'est-à-dire que la famille $\mathcal{C}$ est une famille admissible pseudo-convergente, ce qui est équivalent à montrer qu'il n'existe pas de polynôme unitaire ψ' avec $\deg \psi' = d$ appartenant à $\tilde{\Phi}(A)$. Supposons qu'il existe un tel polynôme ψ' , alors nous déduisons de l'inégalité $\mu_\alpha(\psi') < \mu_\beta(\psi')$ que pour tout α dans A , ψ' est un polynôme-clé pour la valuation μ_α et nous pouvons écrire ψ' sous la forme $\psi' = \psi_\alpha + h_\alpha$ avec $\mu(h_\alpha) = \gamma_\alpha$ et $\deg h_\alpha < d$, par conséquent ψ' appartient à Ψ_1^* . Il existe alors θ dans A tel que $\lambda(\psi') = \lambda_\theta$, et nous posons $\psi' = \psi_\theta + h_\theta$. Comme ψ' est un polynôme-clé pour μ_α et comme $\mu_\alpha(\psi') = \gamma_\alpha$, nous avons l'égalité

$$\mu_\alpha(P) = \inf(\mu(q'_j) + j\gamma_\alpha; 0 \leq j \leq m),$$

où $P = q'_m \psi'^m + \dots + q'_0$ est le développement de P selon les puissances de ψ' . Nous en déduisons l'inégalité $\lambda_\theta = \mu(q'_0) \geq \mu_\alpha(P) = \lambda_\alpha$ pour tout α dans A , ce qui contredit le fait que Λ_1^* n'a pas de plus grand élément.

Par construction nous avons $\mu_\alpha(P) = \lambda_\alpha$, le polynôme P appartient à $\tilde{\Phi}(A)$ et par conséquent P est A -divisible par tout polynôme-clé limite ϕ' pour la famille $\mathcal{C}$.

Nous choisissons un polynôme-clé limite ϕ' et nous considérons le polygone de Newton $\mathcal{PN}_\mathcal{C}(\phi')$ défini à partir du développement de P selon les puissances de ϕ' . Alors pour toute pente δ' d'une face de la partie principale $\mathcal{PN}_\mathcal{C}(\phi')^+$ du polygone de Newton, nous pouvons définir la valuation augmentée limite $\mu' = [(\mu_\alpha)_{\alpha \in A}; \mu'(\phi') = \delta']$, et nous vérifions que la valuation μ' , qui par définition est une valuation bien spécifiée, satisfait encore les conditions i) et ii) du théorème. $\square$

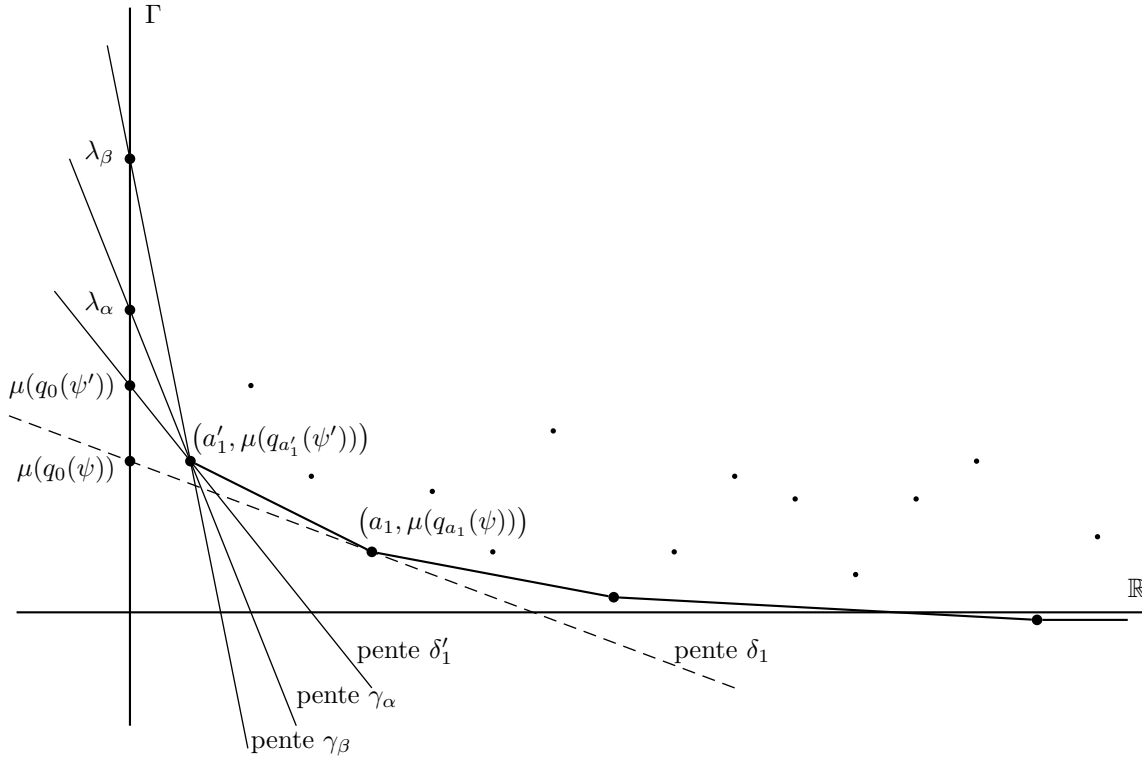


Figure 2.1: Polygones de Newton associés à la valuation μ et aux polynômes ψ , ψ' et (ψ_α)

Définition 2.10. Pour tout polynôme irréductible unitaire P de $K[x]$ et pour toute valuation bien spécifiée μ de $\mathcal{E}(K[x], \nu)$ définie par un polynôme ϕ , nous définissons l'ensemble $\mathcal{B}_P(\mu)$ des pseudo-valuations ζ appartenant à $\mathcal{E}_P$ vérifiant $\mu \leq \zeta$ et $\mu(\phi) = \zeta(\phi)$.

Nous notons $b_P(\mu)$ le cardinal de cet ensemble.

Par définition μ est une valuation approchée de P si et seulement si l'ensemble $\mathcal{B}_P(\mu)$ est non vide, c'est alors l'ensemble des pseudo-valuations de $\mathcal{E}_P$ auxquelles μ est associée et $b_P(\mu)$ est le nombre de ces pseudo-valuations.

Comme précédemment nous fixons un polynôme irréductible unitaire P de $K[x]$ et soit μ une valuation approchée de P définie par le polynôme ϕ , $\mu = [\mu_- ; \mu(\phi) = \gamma]$ ou $\mu = [\mathcal{C} ; \mu(\phi) = \gamma]$, avec $\mathcal{C} = (\mu_\alpha)_{\alpha \in A}$. Soit $\mu' = [\mu ; \mu'(\phi') = \gamma']$ une valuation augmentée définie par un polynôme-clé ϕ' vérifiant $\deg \phi' \geq \deg \phi$ et non μ -équivalent à ϕ . Nous avons alors le résultat suivant.

Lemme 2.11. *L'ensemble $\mathcal{B}_P(\mu')$ est le sous-ensemble de $\mathcal{B}_P(\mu)$ constitué des pseudo-valuations ζ vérifiant $\zeta(\phi') = \mu'(\phi') = \gamma'$.*

Preuve. Si ζ appartient à $\mathcal{B}_P(\mu')$, nous avons $\mu' \leq \zeta$ et $\zeta(\phi') = \mu'(\phi') = \gamma'$. Par conséquent nous avons aussi $\mu \leq \zeta$ et $\zeta(\phi) = \mu'(\phi) = \mu(\phi)$.

Réciproquement si ζ est une pseudo-valuation vérifiant $\mu \leq \zeta$ et $\gamma' \leq \zeta(\phi')$, la valuation augmentée μ' associée au polynôme ϕ' et à la valeur γ' vérifie aussi $\mu' \leq \zeta$. $\square$

De l'inclusion $\mathcal{B}_P(\mu') \subset \mathcal{B}_P(\mu)$ pour μ' valuation augmentée pour la valuation μ et du fait que les ensembles $\mathcal{B}_P(\mu)$ sont finis, nous déduisons que pour toute famille admissible pseudo-convergente $\mathcal{C} = (\mu_\alpha)_{\alpha \in A}$ il existe α_0 tel que les ensembles $\mathcal{B}_P(\mu_\alpha)$ sont égaux pour $\alpha \geq \alpha_0$. Nous pouvons définir alors l'ensemble $\mathcal{B}_P(\mathcal{C})$ par

$$\mathcal{B}_P(\mathcal{C}) = \bigcap_{\alpha \in A} \mathcal{B}_P(\mu_\alpha) = \mathcal{B}_P(\mu_\alpha) \quad \text{pour } \alpha \text{ suffisamment grand.}$$

Nous voulons préciser comment se comportent les ensembles $\mathcal{B}_P(\mu)$ quand nous passons de la valuation approchée μ de P aux valuations augmentées μ' pour μ qui sont encore des valuations approchées de P . Nous considérons la décomposition de P en facteurs μ -irréductibles,

$$P \underset{\mu}{\sim} e \phi_0^{n_0} \phi_1^{n_1} \dots \phi_t^{n_t},$$

avec $\phi_0 = \phi$ et les ϕ_j sont des polynômes-clés pour μ non μ -équivalents entre eux, et $n_0 \geq 0$ et $n_j \geq 1$ pour $j = 1, \dots, t$, et nous appelons n l'ordre de μ_- -divisibilité ou de $\mathcal{C}$ -divisibilité de P par ϕ . Nous déduisons alors du théorème 2.6 que nous avons $n \geq 1$ et $t \geq 1$.

Si P est un polynôme-clé pour la valuation μ nous avons $t = 1$, $n_0 = 0$ et $n_1 = 1$, sinon pour tout $i = 1, \dots, t$ nous considérons le polygone de Newton $\mathcal{PN}_\mu(\phi_i)$ associé au polynôme ϕ_i et nous appelons

$$\delta_1^{(i)} > \dots > \delta_{s_i}^{(i)}$$

les pentes des faces de la partie principale $\mathcal{PN}_\mu(\phi_i)^+$. Nous pouvons alors définir pour tout $i = 1, \dots, t$ et tout $j = 1, \dots, s_i$, la valuation augmentée

$$\mu_j^{(i)} = [\mu ; \mu_j^{(i)}(\phi_i) = \delta_j^{(i)}]$$

associée au polynôme-clé ϕ_i et à la valeur $\delta_j^{(i)} > \mu(\phi_i)$.

Proposition 2.12. *Si P est un polynôme-clé pour la valuation μ , l'ensemble $\mathcal{B}_P(\mu)$ contient une seule pseudo-valuation ζ définie par $\zeta = [\mu ; \zeta(P) = +\infty]$.*

Sinon, pour tout $i = 1, \dots, t$ et tout $j = 1, \dots, s_i$, la valuation $\mu_j^{(i)}$ est une valuation approchée du polynôme P , et l'ensemble $\mathcal{B}_P(\mu)$ est l'union disjointe des ensembles $\mathcal{B}_P(\mu_j^{(i)})$. En particulier nous en déduisons l'égalité

$$b_P(\mu) = \sum_{i,j} b_P(\mu_j^{(i)}) .$$

Preuve. Soit $\mu_j^{(i)}$ la valuation augmentée associée au polynôme-clé ϕ_i et à la valeur $\delta_j^{(i)} > \mu(\phi_i)$. Par hypothèse ϕ_i est un μ -diviseur du polynôme P . Si nous écrivons $P = q_m \phi_i^m + \dots + q_0$ le développement de P selon les puissances de ϕ_i et si $\delta_j^{(i)}$ est la pente de la face du polygone de Newton $\mathcal{PN}_\mu(\phi_i)$ comprise entre les sommets $(a_{j-1}, \mu(q_{a_{j-1}}))$ et $(a_j, \mu(q_{a_j}))$, alors P est $\mu_j^{(i)}$ -équivalent à $q_{a_j} \phi_i^{a_j} + \dots + q_{a_{j-1}} \phi_i^{a_{j-1}}$ et par conséquent il existe un polynôme-clé ψ pour la valuation $\mu_j^{(i)}$ non $\mu_j^{(i)}$ -équivalent à ϕ_i qui $\mu_j^{(i)}$ -divise P . Nous déduisons du théorème 2.6 que la valuation $\mu_j^{(i)}$ est une valuation approchée de P .

Soit ζ appartenant à $\mathcal{B}_P(\mu)$, alors nous avons $\mu \leq \zeta$ et nous pouvons définir les ensembles $\tilde{\Phi}(\mu, \zeta)$ et $\Phi(\mu, \zeta)$. Nous déduisons de l'égalité $\mu(\phi) = \zeta(\phi)$ que tout polynôme-clé ψ appartenant à $\Phi(\mu, \zeta)$ vérifie $\deg \psi \geq \deg \phi$ et n'est pas μ -équivalent à ϕ . De plus comme P appartient à $\tilde{\Phi}(\mu, \zeta)$, le polynôme ψ μ -divise P .

Si P est un polynôme-clé pour μ alors nous avons forcément $\psi = P$ et il existe une unique pseudo-valuation ζ appartenant à $\mathcal{B}_P(\mu)$ qui est définie par $\zeta = [\mu ; \zeta(P) = +\infty]$.

Sinon, nous pouvons supposer que le polynôme-clé ψ est l'un des ϕ_i et si nous posons $\delta = \zeta(\phi_i)$ la valuation augmentée $\mu' = [\mu ; \mu'(\phi_i) = \delta]$ est une valuation approchée du polynôme P associée à ζ , c'est-à-dire ζ appartient à $\mathcal{B}_P(\mu')$. La valeur δ est égale à la pente d'une des faces de la partie principale du polygone de Newton $\mathcal{PN}_\mu(\phi_i)$, c'est une conséquence de l'inégalité $\mu'(P) < \zeta(P)$, par conséquent la valuation μ' est l'une des valuations $\mu_j^{(i)}$.

Il reste à montrer que les ensembles $\mathcal{B}_P(\mu_j^{(i)})$ sont disjoints. Si la pseudo-valuation ζ appartient à $\mathcal{B}_P(\mu_j^{(i)})$, alors nous avons $\zeta(\phi_i) = \delta_j^{(i)}$, par conséquent les ensembles $\mathcal{B}_P(\mu_j^{(i)})$ et $\mathcal{B}_P(\mu_k^{(i)})$ sont disjoints pour $j \neq k$. De plus pour $l \neq i$, le polynôme ϕ_l n'est pas μ -divisible par ϕ_i , par conséquent nous avons $\zeta(\phi_l) = \mu(\phi_l)$ pour tout ζ dans $\mathcal{B}_P(\mu_j^{(i)})$ et comme nous avons $\delta_k^{(l)} > \mu(\phi_l)$ pour tout $k = 1, \dots, s_l$, la pseudo-valuation ζ n'appartient à aucun des ensembles $\mathcal{B}_P(\mu_k^{(l)})$. $\square$

Remarque 2.13. Nous pouvons énoncer un résultat similaire pour la valuation ν de K . Plus précisément, si nous appelons $\delta_1 > \dots > \delta_s$ les pentes des faces du polygone de Newton $\mathcal{PN}(P; \nu; x)$, nous pouvons définir pour tout $j = 1, \dots, s$ la valuation augmentée $\mu_j = [\nu ; \mu_j(x) = \delta_j]$. Alors chacune des valuations μ_j ainsi définie est une valuation approchée de P et l'ensemble $\mathcal{E}_P$ des pseudo-valuations ζ de $\mathcal{E}(K[x], \nu)$ de noyau (P) est égal à l'union disjointe des ensembles $\mathcal{B}_P(\mu_j)$.

Nous avons un résultat similaire pour l'ensemble $\mathcal{B}_P(\mathcal{C})$ associé à une famille pseudo-convergente. Soit $\mathcal{C} = (\mu_\alpha)_{\alpha \in A}$ une famille admissible pseudo-convergente de valuations approchées de P et soit ϕ un polynôme-clé limite pour la famille $\mathcal{C}$. Nous considérons le polygone de Newton $\mathcal{PN}_\mathcal{C}(\phi)$ associé à ϕ et nous appelons $\delta_1 > \dots > \delta_s$ les pentes de la partie principale $\mathcal{PN}_\mathcal{C}(\phi)^+$, et nous définissons pour $j = 1, \dots, s$ la valuation augmentée limite $\mu_i = [(\mu_\alpha)_{\alpha \in A} ; \mu_i(\phi) = \delta_i]$ associée au polynôme ϕ et à la valeur δ_i .

Proposition 2.14. Si P est un polynôme-clé limite pour la famille $\mathcal{C}$, l'ensemble $\mathcal{B}_P(\mathcal{C})$ contient une seule pseudo-valuation ζ définie par $\zeta = [(\mu_\alpha)_{\alpha \in A} ; \mu_i(P) = +\infty]$.

Sinon, pour tout $i = 1, \dots, s$ la valuation μ_i est une valuation approchée du polynôme P , et l'ensemble $\mathcal{B}_P(\mathcal{C})$ est l'union disjointe des ensembles $\mathcal{B}_P(\mu_i)$.

Preuve. Comme précédemment nous vérifions que les ensembles $\mathcal{B}_P(\mu_i)$ sont disjoints car si ζ appartient à $\mathcal{B}_P(\mu_i)$ nous avons $\zeta(\phi) = \delta_i$, et qu'ils sont inclus dans $\mathcal{B}_P(\mathcal{C})$ car nous avons $\mu_\alpha \leq \mu_i$ et $\mu_\alpha(\phi_\alpha) = \mu_i(\phi_\alpha) = \zeta(\phi_\alpha)$.

Soit ζ appartenant à $\mathcal{B}_P(\mathcal{C})$ et supposons que P n'est pas un polynôme-clé limite pour la famille $\mathcal{C}$, alors P est A -divisible par le polynôme-clé limite ϕ et la valuation augmentée limite $\mu = [(\mu_\alpha)_{\alpha \in A} ; \mu_i(\phi) = \zeta(\phi)]$ est une valuation approchée de P . Comme précédemment nous montrons que les seules valeurs possibles pour $\zeta(\phi)$ sont les pentes δ_i de la partie principale $\mathcal{PN}_\mathcal{C}(\phi)^+$ du polygone de Newton, par conséquent la valuation μ est l'une des valuations μ_i . $\square$

Remarque 2.15. La décomposition de P en facteurs μ -irréductibles $P \sim e \phi_0^{n_0} \phi_1^{n_1} \dots \phi_t^{n_t}$ est unique à μ -équivalence près, mais si nous remplaçons un polynôme ϕ_i par un polynôme μ -équivalent

ϕ'_i distinct de ϕ_i , nous pouvons obtenir un polygone de Newton dont la partie principale $\mathcal{PN}_\mu(\phi'_i)^+$ est différente de la partie principale $\mathcal{PN}_\mu(\phi_i)^+$ de celui associé à ϕ_i . Par conséquent nous pouvons trouver une autre famille de valuations $\mu_j^{(i)}$, avec $1 \leq j \leq s'_i$, avec éventuellement $s_i \neq s'_i$, mais nous déduisons de la démonstration de la proposition que l'ensemble $\mathcal{B}_P(\mu, \phi_i) = \bigcup_{j=1}^{s_i} \mathcal{B}_P(\mu_j^{(i)})$ ne dépend que de la classe de μ -équivalence du polynôme-clé ϕ_i , c'est-à-dire de son image $H_\mu(\phi_i)$ dans l'algèbre graduée $\text{gr}_\mu(K[x])$.

De même la partie principale $\mathcal{PN}_\mathcal{C}(\phi)^+$ du polygone de Newton dépend du polynôme-clé limite ϕ choisi, mais l'ensemble $\mathcal{B}_P(\mathcal{C}) = \bigcup_{i=1}^s \mathcal{B}_P(\mu_i)$ ne dépend que de la famille $\mathcal{C}$.

3 Cas d'un corps valué hensélien

Nous voulons décrire les valuations approchées d'un polynôme P , et les polygones de Newton associés dans le cas où le corps valué (K, ν) est hensélien, c'est-à-dire tel que pour toute extension algébrique L de K il existe un unique prolongement de ν à L .

Rappelons que si P un polynôme irréductible séparable unitaire appartenant à $K[x]$ et si L est l'extension algébrique de K définie par P , c'est-à-dire $L = K[x]/(P)$, il existe une bijection entre l'ensemble $\mathcal{E}_P$ des pseudo-valuations ζ appartenant à $\mathcal{E}(K[x], \nu)$ ayant pour noyau l'idéal (P) et l'ensemble des valuations ζ de L qui prolongent ν . Nous allons donc étudier ce qui se passe pour les valuations approchées μ de P quand l'ensemble $\mathcal{E}_P$ contient un seul élément.

Théorème 3.1. *Soit P un polynôme irréductible unitaire tel que l'ensemble $\mathcal{E}_P$ contienne une seule pseudo-valuation ζ .*

Pour toute valuation approchée μ de P définie par un polynôme ϕ , la décomposition de P en facteurs μ -irréductibles est de la forme

$$P \underset{\mu}{\sim} e \psi^n ,$$

avec e polynôme μ -inversible, ψ polynôme-clé pour μ non μ -équivalent à ϕ et $n \geq 1$. De plus si ψ est différent de P le polygone de Newton $\mathcal{PN}_\mu(\psi)$ a une seule face et celle-ci est de pente $\delta > \mu(\psi)$.

Soit $\mathcal{C} = (\mu_\alpha)_{\alpha \in A}$ une famille simple admissible pseudo-convergente de valuations approchées de P , alors si P n'est pas un polynôme-clé limite pour la famille $\mathcal{C}$, pour tout polynôme-clé limite ϕ le polygone de Newton $\mathcal{PN}_\mathcal{C}(\phi)$ a une seule face et celle-ci est de pente $\delta > \mu_\alpha(\psi)$ pour tout α dans A .

Dire que les polygones de Newton $\mathcal{PN}_\mu(\psi)$ ou $\mathcal{PN}_\mathcal{C}(\phi)$ ont une seule face et que la pente δ de celle-ci vérifie les inégalités $\delta > \mu(\psi)$ ou $\delta > \mu_\alpha(\psi)$ pour tout α dans A , est équivalent à dire que ces polygones de Newton ont une seule face et sont égaux à leurs parties principales.

Preuve. Nous déduisons de la proposition 2.12 que pour toute valuation approchée μ du polynôme P , il existe un unique polynôme-clé ψ pour la valuation μ non μ -équivalent à ϕ qui μ -divise P , c'est-à-dire $t = 1$ et $\psi = \phi_1$, et que la partie principale $\mathcal{PN}_\mu(\psi)^+$ du polygone de Newton associé à ψ possède une seule face, c'est-à-dire $s_1 = 1$. Il reste à montrer que P n'est pas μ -divisible par le polynôme ϕ , c'est-à-dire $n_0 = 0$, et que le polygone de Newton $\mathcal{PN}_\mu(\psi)$ est égal à sa partie principale, c'est-à-dire qu'il n'existe pas de face de pente $\delta \leq \mu(\psi)$.

Pour toute famille admissible pseudo-convergente de valuations approchées $\mathcal{C}$ et pour tout polynôme-clé limite ϕ pour $\mathcal{C}$ nous avons toujours P qui est A -équivalent à $e\phi^n$, avec e polynôme A -inversible et $n \geq 1$, et de même nous déduisons de la proposition 2.14 que la partie principale du polygone de Newton $\mathcal{PN}_\mathcal{C}(\phi)^+$ possède une seule face, il reste à montrer que le polygone de Newton est égal à sa partie principale.

Nous allons procéder par récurrence sur le degré du polynôme ϕ définissant la valuation approchée μ , ou des polynômes ϕ_α définissant les valuations approchées de la famille pseudo-convergente $\mathcal{C}$, le cas $\deg \phi = 1$ étant une conséquence immédiate de la remarque 2.13.

Premièrement nous allons montrer que si μ est une valuation approchée du polynôme P , $\mu = [\mu_- ; \mu(\phi) = \gamma]$, telle que ϕ soit le seul μ_- -diviseur irréductible de P et telle que le polygone de Newton $\mathcal{PN}_{\mu_-}(\phi)$ ait une seule face, alors P a un seul μ -diviseur premier ψ , avec ψ polynôme-clé pour μ non μ -équivalent à ϕ , et le polygone de Newton $\mathcal{PN}_{\mu}(\psi)$ a une seule face.

Soit $P = q_m \phi^m + \dots + q_0$ le développement de P selon les puissances de ϕ , alors le polygone de Newton $\mathcal{PN}_{\mu_-}(\phi)$ a une seule face si et seulement si il existe δ tel que nous ayons $\mu_-(q_0) = \mu_-(q_m) + m\delta \leq \mu_-(q_j) + j\delta$ pour tout j , et comme μ est une valuation approchée de P nous avons $\delta = \gamma$, c'est à dire

$$\mu(P) = \mu_-(q_0) = \mu_-(q_m) + m\gamma .$$

Nous en déduisons que P n'est pas μ -divisible par ϕ , par conséquent la décomposition de P en facteurs μ -irréductibles est de la forme $P \sim e\psi^n$, avec ψ non μ -équivalent à ϕ . Nous en déduisons aussi que le degré effectif en ϕ pour la valuation μ , de P , $D_{\phi}(P)$, est égal à m .

Comme ψ est un polynôme-clé pour la valuation augmentée ϕ nous avons l'égalité

$$\psi = \phi^a + \dots + h_0 ,$$

avec $\mu(\psi) = a\gamma = \mu_-(h_0)$ ([McL 1] Theorem 9.4), d'où $D_{\phi}(\psi) = a$, et comme le degré effectif est additif nous trouvons $m = D_{\phi}(P) = nD_{\phi}(\psi) = na$.

Soit $P = p_r \psi^r + \dots + p_0$ le développement de P selon les puissances de ψ , alors nous avons l'inégalité $r \geq n$. Nous déduisons des développements de P selon les puissances respectivement de ϕ et de ψ

$$(m+1) \deg \phi > \deg P \geq r \deg \psi = ra \deg \phi ,$$

d'où $na = m \geq ra$, par conséquent nous avons $r = n$ et $q_m = 1$. L'ordre de μ -divisibilité de P par ψ est alors maximal, ce qui entraîne que le polygone de Newton $\mathcal{PN}_{\mu}(\psi)$ est égal à sa partie principale, par conséquent il a une seule face et celle-ci est de pente $\delta' > \mu(\psi)$.

Deuxièmement nous allons montrer que si μ est une valuation approchée du polynôme P de la forme $\mu = [(\mu_{\alpha})_{\alpha \in A} ; \mu(\phi) = \gamma]$, telle que le polygone de Newton $\mathcal{PN}_{\mathcal{C}}(\phi)$ possède une seule face, alors comme dans le cas précédent P a un seul μ -diviseur premier ψ , avec ψ polynôme-clé pour μ non μ -équivalent à ϕ , et le polygone de Newton $\mathcal{PN}_{\mu}(\psi)$ a une seule face.

Comme le polygone de Newton $\mathcal{PN}_{\mathcal{C}}(\phi)$ possède une seule face, l'ordre de $\mathcal{C}$ -divisibilité de P est maximal, et si nous écrivons encore $P = q_m \phi^m + \dots + q_0$ le développement de P selon les puissances de ϕ il existe une valeur δ telle que nous ayons

$$\mu_A(q_0) = \mu_A(q_m) + m\delta \leq \mu_A(q_j) + j\delta \quad \text{pour tout } j ,$$

et comme μ est une valuation approchée de P nous avons $\gamma = \delta$.

Comme précédemment nous déduisons de l'égalité $\mu(P) = \mu_A(q_0)$ que P n'est pas μ -divisible par ϕ et le même raisonnement sur le degré effectif $D_{\phi}(P)$ montre encore que l'ordre de μ -divisibilité de P par un polynôme-clé ψ pour μ est maximal, c'est-à-dire que le polygone de Newton $\mathcal{PN}_{\mu}(\psi)$ a une seule face.

Enfin nous allons montrer que si $\mathcal{C} = (\mu_{\alpha})_{\alpha \in A}$ est une famille admissible pseudo-convergente de valuations approchées de P telle que pour tout α le polynôme P n'est pas μ_{α} -divisible par ϕ_{α} et telle que pour tout $\alpha < \beta$ le polygone de Newton $\mathcal{PN}_{\mu_{\alpha}}(\phi_{\beta})$ possède une seule face, alors pour tout polynôme-clé limite ϕ pour $\mathcal{C}$ le polygone de Newton $\mathcal{PN}_{\mathcal{C}}(\phi)$ est égal à sa partie principale.

Nous pouvons écrire pour tout α le développement de ϕ selon les puissances de ϕ_{α} ,

$$\phi = g_{a,\alpha} \phi_{\alpha}^a + \dots + g_{0,\alpha} ,$$

et soit k_0 l'entier tel que nous ayons l'égalité $\mu_{\alpha}(\phi) = \lambda_0 + k_0 \gamma_{\alpha}$ pour α suffisamment grand. Alors pour tout $\beta > \alpha$, nous avons

$$\mu_{\beta}(\phi) = \inf(\mu_{\alpha}(g_{j,\alpha}) + j\gamma_{\beta}; 0 \leq j \leq a) = \lambda_0 + k_0 \gamma_{\beta} .$$

Nous en déduisons $D_{\phi_\beta}(\phi) = k_0$ où D_{ϕ_β} est le degré effectif en ϕ_β pour la valuation μ_α , et nous avons $1 \leq k_0 \leq a$.

Soit $P = q_m \phi^m + \dots + q_0$ le développement de P selon les puissances de ϕ , alors si n est l'ordre de $\mathcal{C}$ -divisibilité de P , nous avons

$$P \underset{\mu_\alpha}{\sim} q_n \phi^n \quad \text{et} \quad \mu_\alpha(P) = \lambda + (nk_0)\gamma_\alpha$$

pour α suffisamment grand, avec $1 \leq n \leq m$. Par hypothèse pour tout $\alpha < \beta$, μ_α est une valuation approchée pour P et ϕ_β est un μ_α -diviseur de P , par conséquent P est μ_α -équivalent à $e\phi_\beta^s$, c'est-à-dire $D_{\phi_\beta}(P) = s$ avec $P = p_s \phi_\beta^s + \dots + p_0$, et nous trouvons l'égalité $s = D_{\phi_\beta}(q_n \phi^n) = nk_0$ car q_n est μ_β -inversible.

Nous déduisons des développements de P selon les puissances de ϕ et de ϕ_β et du développement de ϕ selon les puissances de ϕ_β les inégalités

$$(s+1)\deg\phi_\beta > \deg P \geq m\deg\phi \quad \text{et} \quad \deg\phi = a\deg\phi_\beta + \deg g_{a,\alpha} \geq k_0\deg\phi_\beta,$$

d'où $s \geq mk_0$, c'est-à-dire $n \geq m$. Par conséquent nous avons $n = m$, l'ordre de $\mathcal{C}$ -divisibilité de P est maximal et le polygone de Newton $\mathcal{PN}_{\mathcal{C}}(\phi)$ est égal à sa partie principale. $\square$

Remarque 3.2. Nous déduisons de la démonstration du théorème que si P est un polynôme tel que $\mathcal{E}_P$ contienne une seule pseudo-valuation ζ , toute sous-famille admissible pseudo-convergente $\mathcal{C} = (\mu_\alpha)_{\alpha \in A}$ de la famille admissible associée à ζ vérifie la conclusion du théorème 3.7 de [Va 2]: si ϕ est un polynôme-clé limite pour la famille $\mathcal{C}$, le développement de ϕ selon les puissances des polynômes ϕ_α est de la forme

$$\phi = \phi_\alpha^a + g_{a-1,\alpha} \phi_\alpha^{a-1} + \dots + g_{0,\alpha},$$

avec $\mu_\alpha(\phi) = a\gamma_\alpha$ pour α suffisamment grand.

4 Exemple

Nous considérons un corps k algébriquement clos de caractéristique nulle et nous prenons pour corps valué (K, ν) l'extension transcendante pure $K = k(y)$ munie de la valuation y -adique, $\nu = \nu_y$. Nous choisissons un polynôme unitaire irréductible P dans $K[x]$ qui appartient aussi à l'anneau des polynômes $k[x, y]$ et nous définissons l'extension L de K par $L = K[x]/(P)$. Nous appelons respectivement S et R les anneaux suivants, $S = k[y]$ et $R = k[x, y]/(P)$, dont les corps de fractions respectifs sont K et L , nous supposons que R est fini sur S de dimension $d = \deg P = [L : K]$, et qu'il existe un seul idéal premier $\mathfrak{n}$ de R au-dessus de l'idéal maximal $\mathfrak{m} = (y)$ de S . En particulier l'anneau local $R_{\mathfrak{n}}$ domine l'anneau local $S_{\mathfrak{m}}$.

Nous notons $\bar{R}$ la clôture intégrale de R dans L , alors les anneaux S et $\bar{R}$ sont réguliers de dimension 1, et $\bar{R}$ est la fermeture intégrale de S dans l'extension finie L de K . La valuation ν est l'unique valuation de K , triviale sur k , dont le centre sur S est égal à l'idéal maximal $\mathfrak{m}$, c'est-à-dire l'unique valuation de K dont l'anneau de valuation V_ν vérifie $S \subset V_\nu$ et $S \cap \max(V_\nu) = \mathfrak{m}$, et l'anneau local $S_{\mathfrak{m}}$ est en fait égal à l'anneau V_ν . Nous en déduisons que les valuations μ_i de L qui prolongent la valuation ν correspondent aux idéaux premiers de $\bar{R}$ au-dessus de $\mathfrak{m}$, plus précisément l'application qui à une valuation μ de L associe son centre $\bar{R} \cap \max(V_\mu)$ sur $\bar{R}$ induit une bijection entre l'ensemble $\mathcal{E}(L, \nu)$ des valuations de L qui prolongent la valuation ν et l'ensemble des idéaux premiers $\mathfrak{q}$ de R vérifiant $\mathfrak{q} = S \cap \mathfrak{m}$, nous avons encore l'anneau local $\bar{R}_{\mathfrak{q}}$ qui est égal à l'anneau de valuation V_μ .

Les idéaux premiers de $\bar{R}$ au-dessus de l'idéal $\mathfrak{m}$ de S sont exactement les idéaux premiers de $\bar{R}$ au-dessus de l'idéal $\mathfrak{n}$ de R , et correspondent aux *branches analytiques* de l'anneau R , c'est-à-dire aux idéaux premiers minimaux de R^{hens} , le hensélisé de l'anneau local $R_{\mathfrak{n}}$, ou ce qui revient au même aux idéaux premiers minimaux de $\hat{R}$ le complété $\mathfrak{n}$ -adique de R (cf. [Ra], Proposition 1 du Chapitre IX).

Géométriquement nous pouvons considérer la courbe plane affine C définie par $C = \text{Spec } R$, l'anneau local $R_{\mathfrak{n}}$ est l'anneau local de C au point o correspondant à l'idéal maximal $\mathfrak{n}$ de R , les idéaux premiers minimaux de R^{hens} correspondent bien aux branches analytiques de la courbe C en o . La normalisée $\bar{C}$ de la courbe C est définie par $\bar{C} = \text{Spec } \bar{R}$ et les idéaux $\mathfrak{q}$ au-dessus de $\mathfrak{n}$ correspondent aux points de $\bar{C}$ au-dessus du point o .

Si nous écrivons le polynôme P de $K[x]$ sous la forme d'un polynôme f appartenant à $k[x, y]$,

$$P(x) = f(x, y) = \sum_{i,j} a_{ij} x^i y^j ,$$

par définition le polygone de Newton $\mathcal{PN}(f)$ associé à f est l'enveloppe convexe dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ de $\Gamma(f) = \text{Supp}(f) + (\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+)$, avec $\text{Supp}(f) = \{(i, j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid a_{ij} \neq 0\}$.

Nous avons l'égalité $P = p_d x^d + \dots + p_0$ avec $p_i = \sum_j a_{ij} y^j$. Comme par hypothèse le polynôme P est unitaire, si nous appelons d son degré, nous avons $a_{ij} = 0$ pour $i > d$ et pour $i = d$ et $j > 0$ et nous avons $p_0 = a_{d0} = 1$. Nous vérifions alors que le polygone de Newton $\mathcal{PN}_{\nu}(\phi_1)$ associé à P , au polynôme $\phi_1 = x$ et à la valuation y -adique $\nu = \nu_y$ est égal à $\mathcal{PN}(f) \cap ([0, d] \times \mathbb{R})$.

Exemple 4.1. Nous reprenons l'exemple 3.2 étudié dans [Va 5], c'est-à-dire

$$P = x^4 + y^2 x^3 + y^3 (y^2 - 2) x^2 - y^5 x + y^6 .$$

Nous allons montrer comment nous trouvons les deux valuations μ et μ' de $L = K[x]/(P)$ qui prolongent la valuation y -adique ν du corps $K = k(y)$.

Nous vérifions aussi le résultat de la proposition 2.12 de [Va 5], comme la singularité n'est pas unibranche, pour toute valuation μ de L qui prolonge la valuation ν , la famille admissible $\mathcal{A}(\mu)$ associée à μ n'est pas finie, en particulier nous allons obtenir une famille infinie de polygones de Newton correspondant à une sous-famille pseudo-convergente de la famille $\mathcal{A}(\mu)$.

Comme la valuation $\nu = \nu_y$ est de rang 1 nous pouvons prendre $\Gamma = \mathbb{R}$.

Pour toute pseudo-valuation ζ de $K[x]$ de noyau l'idéal (P) , la première valuation μ_1 de la famille $\mathcal{A} = \mathcal{A}(\zeta)$, qui est de la forme $\mu_1 = [\nu ; \mu_1(\phi_1) = \gamma_1]$ avec $\phi_1 = x$, est déterminée par la valeur γ_1 . Nous construisons le polygone de Newton $\mathcal{PN}_{\nu}(\phi_1)$, par définition c'est l'enveloppe convexe de $\text{Supp}_{(\nu; \phi_1)}(P) + (\mathbb{R}^+ \times \{0\})$, avec $\text{Supp}_{(\nu; \phi_1)}(P) = \{(6, 0), (5, 1), (3, 2), (2, 3), (0, 4)\}$.

Le polygone $\mathcal{PN}_{\nu}(\phi_1)$ a une seule face, de pente $\delta_1 = 3/2$, alors γ_1 ne peut prendre que la valeur $\gamma_1 = 3/2$, et il existe une seule possibilité pour la valuation μ_1 ,

$$\mu_1 = [\nu ; \mu_1(\phi_1) = 3/2] .$$

Pour trouver les μ_1 -diviseurs μ_1 -irréductibles de P nous écrivons

$$P \underset{\mu_1}{\sim} x^4 - 2y^3 x^2 + y^6 = (x^2 - y^3)^2 ,$$

et nous trouvons le polynôme-clé ϕ_2 qui μ_1 -divise P , $\phi_2 = x^2 - y^3$.

Le développement de P selon les puissances de ϕ_2 , $P = \phi_2^2 + y^2(x + y^3)\phi_2 + y^8$ nous permet de trouver le polygone de Newton $\mathcal{PN}_{\mu_1}(\phi_2)$. Comme les pentes $\delta_1 = 9/2$ et $\delta_2 = 7/2$ sont strictement supérieures à $\mu_1(\phi_2) = 3$, le polygone de Newton est égal à sa partie principale, $\mathcal{PN}_{\mu_1}(\phi_2) = \mathcal{PN}_{\mu_1}(\phi_2)^+$, et il existe deux choix possibles pour la valuation augmentée associée au polynôme-clé ϕ_2 ,

$$\mu_2^{(1)} = [\mu_1 ; \mu_2(\phi_2) = \gamma_2^{(1)}] \quad \text{avec} \quad \gamma_2^{(1)} = \delta_1 = 9/2 ,$$

$$\mu_2^{(2)} = [\mu_1 ; \mu_2(\phi_2) = \gamma_2^{(2)}] \quad \text{avec} \quad \gamma_2^{(2)} = \delta_2 = 7/2 .$$

Si nous prenons $\mu_2 = \mu_2^{(2)} = [\mu_1 ; \mu_2(\phi_2) = 7/2]$ nous trouvons

$$P \underset{\mu_2}{\sim} \phi_2^2 + y^2 x \phi_2 = \phi_2(\phi_2 + y^2 x) ,$$

et nous pouvons prendre comme polynôme-clé pour la valuation μ_2 qui μ_2 -divise P et non équivalent à ϕ_2 , le polynôme $\phi_3 = \phi_2 + y^2x = x^2 + y^2x - y^3$. Le développement de P selon les puissances de ϕ_3 , $P = \phi_3^2 + (-y^2x + y^5)\phi_3 + (-y^7x + y^8)$ nous permet de trouver le polygone de Newton $\mathcal{PN}_{\mu_2}(\phi_3)$.

Ce polygone a deux faces, de pentes respectives $7/2$ et $9/2$, et comme nous avons $\mu_2(\phi_3) = 7/2$, la partie principale du polygone de Newton $\mathcal{PN}_{\mu_2}(\phi_3)^+$ est la partie de $\mathcal{PN}_{\mu_2}(\phi_3)$ au-dessus de $[0, 1]$. La seule valeur possible pour γ_3 est la pente de l'unique face de $\mathcal{PN}_{\mu_2}(\phi_3)^+$, et nous trouvons la valuation $\mu_3 = [\mu_2 ; \mu_3(\phi_3) = 9/2]$. Grâce à l'équivalence $x^2 \underset{\mu_3}{\sim} y^3$ nous avons

$$P \underset{\mu_3}{\sim} y^5 \phi_3 + y^8 \underset{\mu_3}{\sim} y^5 (\phi_3 - y^3x) ,$$

et nous pouvons prendre comme polynôme-clé qui μ_3 -divise P le polynôme $\phi_4 = \phi_3 - y^3x$.

Nous pouvons continuer cette construction indéfiniment, plus précisément si nous appelons $\Psi^{(2)}$ l'ensemble des polynômes-clés pour μ_2 qui sont μ_2 -équivalents à ϕ_3 , et $\Lambda^{(2)}$ le sous-ensemble de $\Gamma = \mathbb{R}$ défini dans la démonstration du théorème 2.6,

$$\Lambda^{(2)} = \{ \lambda(\psi) = \mu_2^{(1)}(q_0(\psi)) \mid \psi \in \Psi^{(2)} \} ,$$

où $P = \psi^2 + q_1(\psi)\psi + q_0(\psi)$ est le développement de P selon les puissances de ψ , alors nous vérifions que $\Lambda^{(2)}$ n'a pas de plus grand élément, en fait nous avons $\Lambda^{(2)} = \{ \lambda \in (1/2)\mathbb{N} \mid \lambda \geq 8 \}$.

Nous trouvons ainsi la famille pseudo-convergente $\mathcal{C}^{(2)} = (\mu_\alpha)_{\alpha \in A^{(2)}}$ de valuation où nous avons posé $\Lambda^{(2)} = A^{(2)}$ et pour tout α dans $A^{(2)}$ nous avons choisi un polynôme ϕ_α appartenant à Ψ vérifiant $\lambda(\phi_\alpha) = \alpha$; et la valuation μ_α est la valuation augmentée $\mu_\alpha = [\mu_2 ; \mu_\alpha(\phi_\alpha) = \gamma_\alpha]$, avec γ_α égal à la pente de la face de la partie principale du polygone de Newton $\mathcal{PN}_{\mu_2}(\phi_\alpha)^+$, c'est-à-dire $\gamma_\alpha = \lambda_\alpha - 7/2$.

Par exemple pour $\phi_\alpha = \phi_4 = \phi_3 - y^3x$, nous avons $\lambda_\alpha = 9$ et $\gamma_\alpha = 11/2$.

Il suffit de vérifier que le polynôme P est un polynôme-clé limite pour cette famille pseudo-convergente $\mathcal{C}^{(2)}$ et la pseudo-valuation cherchée est alors la valuation augmentée limite

$$\zeta^{(2)} = [(\mu_\alpha)_{\alpha \in A^{(2)}} ; \zeta^{(2)}(P) = +\infty] .$$

Si nous choisissons pour deuxième valuation de la famille $\mathcal{A}$ la valuation associée à la première pente du polygone de Newton, $\mu_2 = \mu_2^{(1)} = [\mu_1 ; \mu_2(\phi_2) = 9/2]$, nous pouvons définir de manière analogue les ensembles $\Psi^{(1)}$ et $\Lambda^{(1)}$, l'ensemble $\Lambda^{(1)}$ n'a pas de plus grand élément et nous obtenons de même une famille pseudo-convergente de valuations $\mathcal{C}^{(1)} = (\mu_\alpha)_{\alpha \in A^{(1)}}$. Dans ce cas le polynôme P est encore un polynôme-clé limite et la pseudo-valuation cherchée est la valuation augmentée limite

$$\zeta^{(1)} = [(\mu_\alpha)_{\alpha \in A^{(1)}} ; \zeta^{(1)}(P) = +\infty] .$$

References

- [McL 1] S. MacLane: A construction for absolute values in polynomial rings. Trans. Amer. Math. Soc. **40** (1936), 363-395.
- [McL 2] S. MacLane: A construction for prime ideals as absolute values of an algebraic field. Duke Math. J. **2** (1936), 492-510.
- [Ra] M. Raynaud: *Anneaux Locaux Henséliens*, Lect. Notes in Math. **169**, Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, (1970).
- [Va 1] M. Vaquié: Extension d'une valuation, à paraître dans Trans. Amer. Math. Soc..
- [Va 2] M. Vaquié: Famille admise associée à une valuation de $K[x]$, dans *Singularités franco-japonaises*, Séminaires et Congrès **10**, Soc. Math. Fr. (2005).

- [Va 3] M. Vaquié: Algèbre graduée associée à une valuation de $K[x]$, à paraître dans *Singularities in Geometry and Topology 2004*, Advanced Studies in Pure Mathematics.
- [Va 4] M. Vaquié: Valuations, dans *Resolution of Singularities - A Research Textbook in Tribute to Oscar Zariski*, Progress. in Mathematics **181**, Birkhäuser Verlag Basel (2000).
- [Va 5] M. Vaquié: Famille admissible de valuations et défaut d'une extension, prépublication (2006).
- [Va 6] M. Vaquié: Extension de valuation et famille admise, en préparation.