UNIVERSITÉ PAUL SABATIER : PRÉPARATION À L'AGRÉGATION DE MATHÉMATIQUES FONCTIONS HOLOMORPHES

PASCAL J. THOMAS

Rappels de cours et exercices, octobre 2010[1]

Les remarques et corrections sont les bienvenues.

1. Rappel du programme et bibliographie

Avant d'attaquer les exercices, vous devez réviser les sujets ci-dessous dans les références à votre disposition.

(Je suppose connue la théorie des séries entières).

Fonctions analytiques, c'est-à-dire localement développables en série entière. Théorème des zéros isolés (prolongement analytique).

Fonctions holomorphes, c'est-à-dire dérivables au sens complexe. Equations de Cauchy-Riemann.

Intégration sur des chemins du plan complexe. Homotopie de chemins. Théorème de Cauchy ($\int_\gamma f(z)dz = 0$, quand γ est un chemin homotope à un point dans le domaine de f).

Indice d'un chemin par rapport à un point. Formule de Cauchy ($f(z) = (2\pi i)^{-1}\mathrm{ind}(\gamma, z) \int_\gamma f(\zeta)d\zeta$). Conséquence : les fonctions holomorphes sont analytiques.

Formule de la moyenne. Principe du module maximum.

Primitive d'une fonction holomorphe sur un ouvert étoilé ; en particulier, logarithme complexe.

Séries de Laurent, singularités isolées. Fonctions méromorphes. Formule des résidus, applications au calcul d'intégrales définies.

Suites, séries, produits de fonctions holomorphes. Théorème de Weierstrass (la limite d'une suite de fonctions holomorphes convergeant uniformément sur les compacts d'un ouvert est holomorphe sur cet ouvert).

Fonctions remarquables : exponentielle complexe, fonctions trigonométriques, fonction Γ.

Ces sujets (et d'autres) sont couverts par exemple dans les cours de Licence de fonctions holomorphes que vous avez pu avoir à l'université (cf. résumé du cours de C. Wagschal, par exemple), ou dans les livres suivants (liste non limitative, donnée par ordre de préférence personnelle) :

L. Ahlfors, *Complex Analysis,* chapitres 2, 4.1, 4.2, 4.3, 4.5, 5.1, 5.2.

[1]édition 2009 d'un document de 2002, révisé en 2006 et 2009; compilé par Pascal Thomas.

Excellent pour l'intuition géométrique, vous aurez peut-être besoin de détailler ses raisonnements.

E. Amar & E. Matheron, *Analyse Complexe,* chapitres 3 à 8.

Moderne, complet et bien expliqué, avec une foule d'exercices.

H. Cartan, *Théorie élémentaire des fonctions analytiques,* chapitres 1, 2, 3, et 5.1 à 5.3.

Un classique, avec beaucoup d'exercices standards.

W. Rudin, *Analyse Réelle et Complexe,* chapitre 10.

Le livre de Rudin est incontournable, et a les défauts de ses qualités : la concision et l'élégance des raisonnements. Il couvre aussi la théorie de l'intégration et une partie de l'analyse fonctionnelle.

P. Tauvel, *Analyse Complexe pour la Licence,* chapitres 8 à 12.

Je connais moins bien, mais la liste des sujets est adéquate.

P. Dolbeault, *Analyse Complexe,* chapitres 1 (jusqu'au 1.5), 2, 3.1.

Le livre de Dolbeault a un point de vue plus "moderne", centré sur l'équation de Cauchy-Riemann et qui prépare à plusieurs variables complexes; il peut être plus dur à suivre.

E. C. Titchmarsh, *The Theory of Functions,* chapitres 2, 3.1 à 3.5, 4.1 et 4.2, 5.1 et 5.2.

Le livre de Titchmarsh a un point de vue et un style plus anciens, ce qui peut surprendre mais aussi faire comprendre les motivations.

Ce qui suit est un choix d'exercices, dont certains sont des fragments de cours (juste au-delà du programme réduit du concours).

Vous devez préparer les exercices avant de venir (ceux qui auront été annoncés comme étant au programme), après avoir jeté un coup d'œil à une référence écrite.

Si vous ne savez pas faire un problème, essayez de voir quel théorème peut s'appliquer, et relisez le passage pertinent du cours en voyant ce qui pourrait s'appliquer. Si vous trouvez la solution dans un livre et que vous la comprenez assez pour la refaire au tableau, c'est bon !

2. Séries entières, équations de Cauchy-Riemann

2.1. Soit f analytique sur le disque unité, de série de Taylor $f(z) = \sum_n a_n z^n$. On suppose que $|a_1| \geq \sum_{n\geq 2} n|a_n|$. Montrer que f est injective ou constante sur le disque unité.

2.2. Montrer que la fonction $z \mapsto \cos\sqrt{z}$, définie a priori sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$, peut s'étendre en une fonction holomorphe sur tout $\mathbb{C}$, et donner son développement en série entière.

2.3. Soit $f(z) = \frac{1}{1-z-z^2}$. Au voisinage de 0, $f(z) = \sum a_k z^k$.

a) Montrer que $a_{k+2} = a_{k+1} + a_k$, $a_0 = a_1 = 1$ (nombres de Fibonacci).

b) Calculer les a_k en décomposant f en éléments simples.

(Amar-Matheron, ex. 3.40)

2.4. Soient f et g_n, $n \in N$, des fonctions entières (c'est-à-dire analytiques sur C tout entier). On suppose que $\lim_{n\to\infty} g_n^{(k)}(0)$ existe pour tout $k \geq 0$, et que

$$|g_n^{(k)}(0)| \leq |f^{(k)}(0)| \text{ pour tous } k, n.$$

Montrer que la suite $\{g_n\}$ converge uniformément sur tout compact de C, et que sa limite est une fonction entière.

(Indication : pensez au théorème de la convergence dominée pour la mesure de comptage sur N).

L'hypothèse de domination est nécessaire : pour le voir, considérez par exemple $g_n(z) = a_n z^n$; a quelle condition cette suite est-elle convergente, et quelle est alors sa limite ?

2.5. Soit Ω un ouvert connexe de C et f une fonction holomorphe sur Ω. On suppose que $\mathrm{Re}\, f$ est constante sur Ω. Montrer que f est constante. Même question avec $|f|$ à la place de $\mathrm{Re}\, f$.

2.6. Soit Ω un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ et f, g deux fonctions holomorphes sur Ω telles que pour tout $z \in \Omega$, $f(z) + \overline{g(z)} \in \mathbb{R}$. Montrer que $f(z) = c + g(z)$, où c est une constante réelle.

2.7. Montrer que si f est holomorphe et bornée sur $D(0,1) \setminus \{0\}$, alors elle admet un prolongement holomorphe à tout le disque.

Indications : on peut considérer la fonction $g(z) = zf(z)$ et se ramener ainsi au cas où f est continue. On peut aussi montrer que f admet une primitive F, qui se prolonge au disque.

Ce résultat s'appelle Théorème de la Singularité Eliminable de Riemann.

3. Principe des zéros isolés, prolongement analytique

3.1. Trouver toutes les fonctions analytiques f sur le disque unité telles que

$$f''(\frac{1}{n}) + f(\frac{1}{n}) = 0,$$

pour tout entier $n \geq 2$.

3.2. Pour toutes les conditions ci-dessous, dire s'il est possible de trouver une fonction f holomorphe sur le disque unité qui les vérifie, et si oui, ce qu'on peut dire de cette fonction.

(1) $f(\frac{1}{n}) = \sin\frac{\pi n}{2}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

(2) $f(\frac{1}{n}) = \frac{1}{n^2}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

(3) $f(\frac{1}{n}) = -\frac{1}{n^3}$, $f(-\frac{1}{n}) = \frac{1}{n^3}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

(4) $f(\frac{1}{n}) = \frac{1}{n^3}$, $f(-\frac{1}{n}) = \frac{1}{n^3}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

(5) $f(\frac{1}{2n}) = f(\frac{1}{2n+1}) = \frac{1}{n}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

(6) $f(\frac{1}{n}) = e^{-n}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

(7) $n^{-5/2} \leq |f(\frac{1}{n})| \leq 2n^{-5/2}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

(Source : Tauvel).

3.3. a) Soit $f(z) = \sum_k a_k z^k$ une série entière de rayon de convergence 1, avec $a_k \geq 0$ pour tout k. Montrer que f n'est pas prolongeable analytiquement au voisinage du point 1.

(Indication : montrer que si f était prolongeable, sa série de Taylor au point $\frac{1}{2}$ aurait un rayon de convergence supérieur à $\frac{1}{2}$, et en déduire une contradiction avec le rayon de convergence de f en utilisant un théorème de permutation de sommes.)

b) On pose $f(z) = \sum_{k \geq 0} z^{k!}$. Montrer que f n'est prolongeable en aucun point du cercle unité.

(Source : Chambert-Loir & Fermigier, *Exercices de mathématiques pour l'agrégation, Analyse,* tome 2.)

3.4. Soit f analytique sur Ω un ouvert connexe de C, qui vérifie : pour tout $z \in \Omega$, il existe un entier n tel que $f^{(n)}(z) = 0$. Montrer que f est une fonction polynomiale. (Indication : théorème de Baire).

4. Formules de Cauchy

4.1. Soit f une fonction analytique sur C tout entier. On suppose que pour tout $r > 0$,

$$\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})| d\theta \leq r^{17/3}.$$

Montrer que f est identiquement nulle. (Indication : considérer $r \to 0$ et $r \to \infty$).

4.2. a) (Principe de Réflexion de Schwarz)

Soit un ouvert $\Omega \subset \{z : \operatorname{Im} z > 0\}$; on pose $C(\Omega) := \{\bar{z}, z \in \Omega\} \subset \{z : \operatorname{Im} z < 0\}$.

Si f est analytique sur Ω et continue sur $\Omega \cup (\partial\Omega \cap \mathbb{R})$, avec $f(z) \in \mathbb{R}$ pour $z \in \partial\Omega \cap \mathbb{R}$, on définit $\hat{f}(z) := f(z)$ pour $z \in \Omega \cup (\partial\Omega \cap \mathbb{R})$, $\hat{f}(z) := \overline{f(\bar{z})}$ pour $z \in C(\Omega)$. Montrer que $\hat{f}$ est holomorphe sur l'intérieur de $\Omega \cup (\partial\Omega \cap \mathbb{R}) \cup C(\Omega)$.

b) Soit $\mathbb{D}_+ := \{z : |z| < 1, \operatorname{Im} z > 0\}$. Soit f holomorphe sur $\mathbb{D}_+$ et continue sur $\overline{\mathbb{D}}_+$, avec $f(z) = 0$ pour $z \in [-1, +1]$. Montrer que f est identiquement nulle.

c) Montrer que si f holomorphe sur $\mathbb{D}$ et continue sur $\overline{\mathbb{D}}$, et s'annulle sur un arc ouvert non vide de $\partial\mathbb{D}$, alors $f = 0$.

4.3. Soit f une fonction holomorphe sur un voisinage du disque unité fermé. Montrer que

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} \frac{\overline{f(z)}}{z-a} dz = \overline{f(0)} \text{ si } |a| < 1, \quad = \overline{f(0)} - \overline{f(\frac{1}{\bar{a}})} \text{ si } |a| > 1.$$

(Indication : vous pouvez calculer d'abord $\int \frac{\bar{z}^k dz}{z-a}$).

Ce résultat reste-t-il vrai si f est seulement holomorphe sur le disque ouvert et continue sur le disque fermé?

4.4. Evaluer de deux façons les intégrales

$$\int_{|z|=1} \left(2 + (z + \frac{1}{z})\right) \frac{f(z)}{z} dz, \quad \int_{|z|=1} \left(2 - (z + \frac{1}{z})\right) \frac{f(z)}{z} dz,$$

et en déduire que

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) \cos^2 \frac{\theta}{2} = 2f(0) + f'(0), \quad \frac{2}{\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) \sin^2 \frac{\theta}{2} = 2f(0) - f'(0).$$

4.5. Soit f holomorphe et injective sur un voisinage du disque fermé $\overline{D(0,R)}$. On appelle γ la courbe qui est l'image par f du cercle $C(0,R)$.

a) Montrer que la longueur de γ vérifie $L(\gamma) \geq 2\pi R|f'(0)|$, et que cette inégalité est la meilleure possible.

b) Montrer que l'aire entourée par γ vérifie $A(\gamma) \geq \pi R^2|f'(0)|^2$, et que cette inégalité est la meilleure possible. (Indication : passer en coordonnées polaires, et appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz).

5. Principe du module maximum

5.1. Soit f une fonction holomorphe sur un ouvert connexe Ω. Soit Ω' un ouvert non vide, relativement compact dans Ω. On suppose que $|f|$ est constant sur la frontière de Ω'. Montrer que f est constante sur Ω ou s'annule au moins une fois dans Ω'. (Indication : considérer la fonction $1/f$).

Que se passe-t-il si on suppose plutôt que f prend des valeurs réelles sur la frontière de Ω'?

5.2. Soit f holomorphe sur un ouvert Ω. Sous quelles conditions $|f|$ peut-il admettre un *minimum* local?

5.3. a) (Théorème de Liouville)

Soit f une fonction entière bornée. Montrer qu'elle est constante. Suggestion : soit a un point donné du plan. Utiliser la formule de Cauchy sur des cercles de plus en plus grands pour calculer $f'(a)$.

b) En déduire le Théorème Fondamental de l'Algèbre.

c) Soit f une fonction entière telle que pour tout $z \in C$, $|f(z)| \leq M|z|^m$, où $M > 0$ et $m \in N$ sont des constantes. Montrer que f est un polynôme de degré inférieur ou égal à m.

5.4. Montrer (ou se rappeler) que pour tout point a du disque unité, l'application

$$\varphi_a(z) = \frac{a-z}{1-z\bar{a}}$$

est une bijection biholomorphe du disque unité.

Soit f une fonction holomorphe du disque unité dans lui-même, telle qu'il existe deux points $a \neq b$ du disque vérifiant $f(a) = a$, $f(b) = b$. Montrer que $f(z) = z$, pour tout z du disque.

(Indication : Lemme de Schwarz).

6. Primitives, logarithme, théorème de Rouché

6.1. Soit Ω un ouvert connexe du plan complexe. On suppose que f est continue sur Ω, et que f^2 (le carré pour la multiplication) est holomorphe sur Ω. La fonction f est-elle holomorphe sur Ω ? Démontrer ou donner un contre-exemple.

6.2. Montrer qu'il existe une fonction g holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus [-1,+1]$ telle que $g(z)^2 = z^2 - 1$ et $\lim_{z\to\infty} g(z)/z = 1$.

6.3. Quel est le nombre de racines du polynôme $z^8 - 5z^7 + z - 2$ dans le disque unité $\mathbb{D}$?

6.4. Quel est le nombre des solutions de l'équation $z^4 + 8z^3 + 3z^2 + 8z + 3 = 0$ dans le demi plan $\{\operatorname{Re} z > 0\}$? (indication : utiliser un demi cercle de grand rayon).

6.5. Montrer que toutes les racines de $z^4 - 8z + 10$ sont dans l'anneau $\{1 < |z| < 3\}$ (indication : comparer avec les fonctions $z^4 - 8z$ et $8z - 10$ selon les cas).

6.6. Soit P un polynôme (holomorphe). Montrer que $\max_{|z|=1} |\bar{z} - P(z)| \geq 1$.

6.7. a) Soit $\delta > 0$ et $K := \{e^{i\theta} : -\pi + \delta \leq \theta \leq \pi - \delta\}$. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe P un polynôme (holomorphe) tel que $\max_K |\bar{z} - P(z)| < \varepsilon$. Indication : $z = 1/z$; écrire $z = e^{\ln z}$ sur K (pourquoi peut-on ?)

b) Montrer que les polynômes holomorphes sont denses dans les fonctions continues sur K pour la norme de la convergence uniforme.

7. Singularités, Résidus

7.1. Soit f une fonction holomorphe sur $D(0, R) \setminus \{0\}$. Montrer que si f possède une singularité essentielle en 0, alors pour tout $\varepsilon > 0$, $f(D(0, \varepsilon) \setminus \{0\})$ est dense dans C.

Montrer que si h est entière et non-constante, alors $h \circ f$ admet une singularité essentielle en 0.

7.2. Soit f une fonction entière et propre (l'image réciproque de tout compact est compacte). Montrer que f est un polynôme.

(Indication : étudier la singularité en 0 de la fonction $z \mapsto f(\frac{1}{z})$ et utiliser l'exercice 5.3 (c)).

7.3. Savez-vous déterminer toutes les applications holomorphes et bijectives du disque unité sur lui-même ? (utiliser l'exercice 5.4).

Et du plan complexe sur lui-même ? (utiliser l'exercice 7.2).

7.4. (Indice de l'image d'un cercle)

Soit U un ouvert connexe de $\mathbb{C}$, un disque $D = D(a, R) \Subset U$. On pose $\gamma(t) = a + Re^{i\theta}$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Pour f holomorphe sur U, on pose $\chi = f \circ \gamma$.

a) Si $x \in \mathbb{C} \setminus f(\overline{D})$, montrer que l'indice de χ par rapport à x, $ind_x(\chi) = 0$.

b) Si $x \in f(D) \setminus f(\partial D)$, montrer que $\{z \in D : f(z) = x\}$ est un ensemble fini, noté $\{a_1, \ldots, a_k\}$.

c) On note m_j la multiplicité du zéro de $f(z) - x$ au point $z = a_j$. Montrer que

$$f(z) - x = g(z) \prod_{j=1}^{k} (z - a_j)^{m_j},$$

où g est holomorphe sur U, et $g(z) \neq 0$, pour tout $\in \overline{D}$.

d) En déduire l'indice $ind_x(\chi)$.

(Tauvel, p. 65).

7.5. a) Calculer l'intégrale définie

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1 + x^n}$$

en utilisant le contour constitué du segment de droite de 0 à $R > 1$, puis de l'arc de cercle centré en 0 qui va de R à $Re^{2\pi i/n}$, puis du segment qui va de $Re^{2\pi i/n}$ à 0.

b) Calculer l'intégrale définie
$$\int_0^\infty \frac{x^\alpha dx}{1+x^n}$$
en utilisant le contour constitué du segment de droite de ε à R, puis de l'arc de cercle centré en 0 qui va de R à $Re^{2\pi i/n}$, puis du segment qui va de $Re^{2\pi i/n}$ à $\varepsilon e^{2\pi i/n}$, puis de l'arc de cercle centré en 0 qui va de $\varepsilon e^{2\pi i/n}$ à ε. (Ici $0 < \varepsilon < 1 < R$).

7.6. Calculer l'intégrale définie
$$\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} \cos(\alpha x) dx$$
en utilisant la fonction entière $f(z) = e^{-z^2}$ et le contour formé des côtés du rectangle de sommets $-R, R, R+i\alpha/2, -R+i\alpha/2$.

7.7. Calculer les transformées de Fourier de $\frac{\sin x}{x}$ et e^{-x^2}.

8. Suites, Séries, Produits, Fonctions spéciales

8.1. Soit Ω un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ et f une fonction holomorphe sur Ω et non-constante. Soit (f_n) une suite de fonctions holomorphes sur Ω convergeant vers f, uniformément sur les compacts de Ω.

a) On suppose que F est un fermé tel que $f_n^{-1}(0) \subset F$ pour tout n. Montrer que $f^{-1}(0) \subset F$ (Théorème de Hurwitz). (Indication : se ramener au cas où $F = \emptyset$, et à un zéro isolé d'ordre m. Considérer $\int z^{m-1} \frac{1}{f(z)} dz$ sur un cercle bien choisi).

b) Application : Soit (P_n) une suite de polnômes à coefficients réels dont toutes les racines sont réelles, qui converge uniformément sur les compacts de $\mathbb{C}$ vers une fonction f. Montrer que tous les zéros de f sont réels. Montrer que les dérivées de e^{az-z^2} n'ont que des zéros réels quand $a \in \mathbb{R}$.

8.2. Montrer que la fonction a priori définie sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$
$$g(z) := \frac{\pi^2}{\sin^2 \pi z} - \sum_{n \in Z} \frac{1}{(z-n)^2}$$
est en fait une fonction entière.

Montrer que $g(z+1) = g(z)$ pour tout z, et que $\lim_{|y|\to\infty} g(x+iy) = 0$, uniformément pour $0 \le x \le 1$. En déduire que g est identiquement nulle.

En déduire que
$$\pi \cot \pi z = \frac{1}{z} + \sum_{n\neq 0} \left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{n} \right) = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^\infty \frac{2z}{z^2-n^2}.$$

En déduire les valeurs de $\sum_1^\infty \frac{1}{n^2}$, $\sum_1^\infty \frac{1}{n^4}$, $\sum_1^\infty \frac{1}{n^6}$.

8.3. Montrer que le produit infini $p(z) := \prod_{n=0}^\infty (1+z^{2^n})$ converge uniformément sur tout compact de $D(0,1)$. Montrer que $p(z) = \frac{1}{1-z}$.

8.4. Soit $\{a_n\}$ une suite de points de $D(0,1) \setminus \{0\}$ tels que $\sum_n (1-|a_n|) < +\infty$. On pose
$$B(z) = \prod_{n=1}^\infty \frac{a_n - z}{1-\overline{a}_n z} \frac{|a_n|}{a_n}.$$
Montrer que B est holomorphe, bornée, et donner ses zéros.

8.5. Montrer que la série $\sum n^{-z}$ est uniformément convergente sur tout compact de $\{\operatorname{Re} z > 1\}$. On note sa somme $\zeta(z)$. Montrer que pour tout z tel que $\operatorname{Re} z > 1$,

$$(1 - 2^{1-z})\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} n^{-z}.$$

En déduire un prolongement analytique de la fonction ζ à l'ouvert $\{\operatorname{Re} z > 0\}$.

8.6. Soit (f_n) une suite de fonction holomorphes qui converge simplement sur un ouvert Ω vers f.

a) Montrer en utilisant le thórème de Baire qu'il existe $\Omega' \subset \Omega$, dense dans Ω, tel que pour tout $z \in \Omega'$, il existe un voisinage ω de z tel que la suite (f_n) soit bornée sur ω.

b) En déduire que la suite (f_n) converge uniformément sur les compacts de Ω' (utiliser le Théorème de Montel), et que f est holomorphe sur Ω'.

c) (Difficile) Pouvez-vous trouver un exemple où $\Omega' \neq \Omega$? (on peut utiliser le Théorème de Runge).

(Amar-Matheron, ex. 3.74)

8.7. Soit f holomorphe et bornée sur l'ouvert $\{z : |\operatorname{Im} z| < 1\}$. On suppose que $\lim_{x\to+\infty, x\in\mathbb{R}} f(x) = 0$. En considérant la suite de fonctions holomorphes $g_n(z) := f(z+n)$ sur le carré $\{z : |\operatorname{Re} z| < 1, |\operatorname{Im} z| < 1\}$, montrer que pour tout $y \in]-1, +1[$, $\lim_{x\to+\infty, x\in\mathbb{R}} f(x+iy) = 0$.

(Indication : Théorème de Montel).

9. Solutions.

9.1. Calculer la transformée de Fourier de $f(x) := \frac{\sin x}{x}$.

Remarquons d'abord que la fonction proposée n'est pas intégrable au voisinage de l'infini. Toutefois $f \in L^2(\mathbb{R})$, donc elle a une transformée de Fourier bien définie dans L^2, qui peut s'obtenir comme limite des transformées de Fourier d'une suite qui approxime f au sens de L^2. On peut donc définir la transformée de Fourier de f comme

$$\hat{f}(\xi) := \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} f(x) e^{-ix\xi} dx.$$

D'autre part il est clair que

$$\int_{-R}^{R} f(x)e^{-ix\xi}dx = \lim_{\varepsilon\to 0} \left(\int_{-R}^{-\varepsilon} f(x)e^{-ix\xi}dx + \int_{\varepsilon}^{R} f(x)e^{-ix\xi}dx \right). \tag{1}$$

Posons

$$F_1(\xi) = \int_{-R}^{-\varepsilon} \frac{e^{ix}}{x} e^{-ix\xi}dx + \int_{\varepsilon}^{R} \frac{e^{ix}}{x} e^{-ix\xi}dx,$$

$$F_2(\xi) = \int_{-R}^{-\varepsilon} \frac{e^{-ix}}{x} e^{-ix\xi}dx + \int_{\varepsilon}^{R} \frac{e^{-ix}}{x} e^{-ix\xi}dx.$$

L'intégrale qui apparaît au second membre de (1) vaut $\frac{1}{2i}(F_1(\xi) - F_2(\xi))$.

D'autre part, le changement de variable $x \mapsto -x$ montre que $F_2(\xi) = -F_1(-\xi)$.

On considère la fonction $h(z) := \frac{e^{i(1-\xi)x}}{x}$, holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Quand $\xi < 1$, on considère le chemin fermé γ défini par

$$\begin{aligned} \gamma_1 &: \theta \mapsto \varepsilon e^{i\theta}, \theta \text{ allant de } \pi \text{ à } 0; \\ \gamma_2 &: x \mapsto x, \varepsilon \le x \le R; \\ \gamma_3 &: \theta \mapsto Re^{i\theta}, \theta \text{ allant de } 0 \text{ à } \pi; \\ \gamma_4 &: x \mapsto x, -R \le x \le -\varepsilon. \end{aligned}$$

D'après le Théorème de Cauchy, $\int_\gamma h(z)dz = 0$, donc $F_1(\xi) = -\int_{\gamma_1} h(z)dz - \int_{\gamma_3} h(z)dz$. Or

$$\int_{\gamma_1} h(z)dz = \int_{\pi}^{0} \frac{e^{i\varepsilon e^{i\theta}(1-\xi)}}{\varepsilon e^{i\theta}} i\varepsilon e^{i\theta} d\theta \longrightarrow -\pi i$$

quand $\varepsilon \to 0$, puisque l'intégrande tend uniformément vers i et l'intervalle est borné. De façon similaire,

$$\int_{\gamma_3} h(z)dz = \int_{0}^{\pi} \frac{e^{iRe^{i\theta}(1-\xi)}}{Re^{i\theta}} iRe^{i\theta} d\theta = \int_{0}^{\pi} e^{iRe^{i\theta}(1-\xi)} i d\theta.$$

Or $\mathrm{Re}(iRe^{i\theta}(1-\xi)) = -R(1-\xi)\sin\theta \to -\infty$ quand $R \to \infty$, si $0 < \theta < 1$, et la fonction que l'on intègre est toujours majorée par 1 en module, qui est intégrable sur un intervalle borné. Donc le théorème de convergence dominée nous dit que l'intégrale tend vers 0.

Par conséquent, $\lim_{\varepsilon\to 0, R\to\infty} F_1(\xi)$ existe et vaut πi pour $\xi < 1$.

Pour $\xi > 1$, on prend le symétrique du chemin γ par rapport à l'axe réel:

$$\begin{aligned}
\gamma_1 &: \theta \mapsto \varepsilon e^{i\theta}, \theta \text{ allant de } -\pi \text{ à } 0; \\
\gamma_2 &: x \mapsto x, \varepsilon \leq x \leq R; \\
\gamma_3 &: \theta \mapsto Re^{i\theta}, \theta \text{ allant de } 0 \text{ à } -\pi; \\
\gamma_4 &: x \mapsto x, -R \leq x \leq -\varepsilon.
\end{aligned}$$

Comme avant,

$$\int_{\gamma_1} h(z)dz = \int_{-\pi}^{0} \frac{e^{i\varepsilon e^{i\theta}(1-\xi)}}{\varepsilon e^{i\theta}} i\varepsilon e^{i\theta} d\theta \longrightarrow \pi i$$

quand $\varepsilon \to 0$, $\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_3} h(z)dz = 0$ (on a changé à la fois le signe de $\sin\theta$ et de $(1-\xi)$), et donc $\lim_{\varepsilon\to 0, R\to\infty} F_1(\xi)$ existe et vaut $-\pi i$ pour $\xi > 1$.

Finalement,

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{2i}\left(F_1(\xi) - F_2(\xi)\right) = \frac{1}{2i}\left(F_1(\xi) + F_1(-\xi)\right).$$

En reportant les résultats ci-dessus, on trouve

$$\begin{aligned}
\hat{f}(\xi) &= 0 \text{ pour } \xi > 1 \text{ (et donc } -\xi < 1); \\
\hat{f}(\xi) &= \pi \text{ pour } -1 < \xi < 1 \text{ (et donc } -\xi < 1); \\
\hat{f}(\xi) &= 0 \text{ pour } \xi < -1 \text{ (et donc } -\xi > 1).
\end{aligned}$$

Remarque : si on connaît la formule d'inversion de Fourier, on se rira de cette démonstration : il est beaucoup plus facile de calculer la transformée de Fourier de la fonction $\chi_{[-1,1]}$ et de voir que l'on obtient un multiple de $\frac{\sin\xi}{\xi}$.