

**UNIVERSITÉ PAUL SABATIER : PRÉPARATION À
L'AGRÉGATION DE MATHÉMATIQUES
TOPOLOGIE**

PASCAL J. THOMAS

Avertissement. Ces notes constituent un rappel de cours. Elles sont écrites dans un style relativement familier. Les démonstrations sont souvent données brièvement, en insistant sur les idées. Vous êtes encouragés à aller consulter d'autres références, et à refaire les démonstrations par écrit à chaque fois qu'elles vous semblent trop expéditives (ou sont omises).

CONTENTS

1. Définitions générales	2
1.1. Premières notions	2
1.2. Espaces métriques	3
1.3. Fermés, frontière, intérieur...	4
1.4. Distance à un ensemble	6
2. Limites, suites	7
2.1. Limites	7
2.2. Suites	7
2.3. Valeurs d'adhérence	8
2.4. Usage des suites	9
3. Applications continues	10
3.1. Continuité globale	10
3.2. Continuité en un point	11
3.3. Homéomorphismes, topologies définies par des familles d'applications	12
3.4. Propriétés particulières aux espaces métriques	13
4. Connexité	14
4.1. Topologie induite	14
4.2. Connexité en général	15
4.3. Application continues	16
4.4. Composantes connexes	16
4.5. Ensemble de Cantor	18
4.6. Connexité par arcs	19
5. Compacité	20
5.1. Propriété de Borel-Lebesgue	20
5.2. Propriété de Bolzano-Weierstrass	21
5.3. Fermés bornés dans \mathbb{R}^n	23
5.4. Théorème de Heine	24
6. Une construction de \mathbb{R}	24
7. Espaces complets	26
7.1. Suites de Cauchy	26

7.2.	Prolongement d'applications continues	27
7.3.	Théorème du point fixe	28
7.4.	Théorème de Baire	29
8.	Espaces vectoriels normés	30
8.1.	Premières définitions	30
8.2.	Applications linéaires continues	31
8.3.	Théorème de Riesz	32
8.4.	Espaces de Banach	33
9.	Exemple : Espaces de fonctions continues	35
9.1.	Théorème d'Ascoli	35
9.2.	Théorème de Stone-Weierstrass	36
10.	Dualité	37
10.1.	Définitions	37
10.2.	Théorème de Hahn-Banach	37
11.	Conséquences du Théorème de Baire	39
11.1.	Théorème de Banach-Steinhaus	39
11.2.	Théorème de l'application ouverte	40
12.	Espaces de Hilbert	41
12.1.	Produit hermitien	41
12.2.	Définition, propriété de projection	42
12.3.	Dual d'un espace de Hilbert	43
12.4.	Bases hilbertiennes	44
13.	Opérateurs sur les espaces de Hilbert	47
13.1.	Exemples ; spectre	47
13.2.	Opérateur adjoint	48
13.3.	Lax-Milgram ; un problème variationnel	49
13.4.	Opérateurs compacts	50
14.	Références bibliographiques	54

1. DÉFINITIONS GÉNÉRALES

L'idée de la topologie est de pouvoir définir une notion de proximité, ou de voisinage, entre les éléments (qu'on appellera points) d'un ensemble (qu'on appellera espace). Nous donnerons une axiomatique assez générale qui permet de le faire, même si nous étudierons surtout le cas d'une topologie donnée par une distance (espace métrique).

1.1. Premières notions.

Définition 1.1. Une *topologie* sur un ensemble X est donnée par une famille $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X)$ dont les membres sont appelés (*ensembles*) *ouverts* et qui vérifie les axiomes suivants :

- (1) $\emptyset, X \in \mathcal{T}$.
- (2) Si $O_1, O_2 \in \mathcal{T}$, alors $O_1 \cap O_2 \in \mathcal{T}$.
- (3) Si $(O_\alpha, \alpha \in A)$ est une famille quelconque avec $O_\alpha \in \mathcal{T}, \forall \alpha \in A$, alors $\bigcup_{\alpha \in A} O_\alpha \in \mathcal{T}$.

- Exemple 1.2.*
- Si on prend $X = \mathbb{R}$, et que \mathcal{T} est la famille de toutes les unions (quelconques) d'intervalles ouverts, on obtient la topologie usuelle (ou euclidienne) sur \mathbb{R} .
 - Pour un X arbitraire, $\mathcal{T} := \mathcal{P}(X)$ définit une topologie appelée *topologie discrète*.
 - Pour un X arbitraire, la famille constituée de l'ensemble vide et de tous les ensembles dont le complémentaire est de cardinal fini définit une topologie (qui est distincte de la topologie discrète quand X est de cardinal infini). Si X est de cardinal infini, la famille de tous les ensembles de cardinal fini ne définit pas une topologie (même en y adjoignant X).
 - Pour $X = \mathbb{C}^n$, on dira que $U \in \mathcal{T}$ si et seulement si il existe une famille $(P_\alpha, \alpha \in A)$ de polynômes à n variables tel que $U = \{z \in \mathbb{C}^n : \exists \alpha \in A : P_\alpha(z) \neq 0\}$. Ceci définit une topologie appelée *topologie de Zariski*, utile en géométrie algébrique.
 Pour $n = 1$, notez qu'on retrouve l'exemple précédent.

Désormais nous travaillerons dans un espace X muni d'une topologie \mathcal{T} , ce que nous ne répéterons pas à chaque énoncé.

Définition 1.3. Soit $x \in X$. On appelle *voisinage* de x tout sous-ensemble $V \subset X$ tel qu'il existe un ouvert U avec $x \in U \subset V$.

- Proposition 1.4.*
- (1) Aucun voisinage n'est vide. Une union (quelconque) de voisinages de x , et une intersection finie de voisinages de x sont aussi des voisinages de x .
 - (2) Un ensemble $U \subset X$ est un ouvert si et seulement si pour tout $x \in U$, U est un voisinage de x .

Démonstration. Les propriétés ci-dessus sont faciles, sauf peut-être l'implication réciproque dans la deuxième : supposons que pour tout $x \in U \subset X$, il existe $U_x \in \mathcal{T}$ tel que $x \in U_x \subset U$. Alors $U = \cup_{x \in U} U_x$, et donc c'est un ouvert comme union d'ouverts. □

1.2. Espaces métriques. Nous allons maintenant définir notre principale source d'exemples.

Définition 1.5. Une *distance* sur un ensemble X est une application $d : X \times X \rightarrow [0, +\infty[$ telle que, pour tous $x, y, z \in X$:

- (1) $d(x, y) = d(y, x)$.
- (2) $d(x, y) = 0$ si et seulement si $x = y$.
- (3) (inégalité triangulaire) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

(X, d) est appelé *espace métrique*.

La *boule ouverte* pour la distance d de centre $x \in X$ et de rayon $r > 0$ est l'ensemble $B(x, r) := \{y \in X : d(x, y) < r\}$.

Proposition 1.6. La topologie définie par la distance d a pour ouverts les ensembles U qui sont des unions (quelconques) de boules ouvertes pour d . De façon équivalente, V est un voisinage de x si et seulement si il existe $r > 0$ tel que $B(x, r) \subset V$.

La démonstration est laissée au lecteur. Si on veut démontrer les axiomes d'une topologie directement à partir de la première description des ouverts, il faut voir que si l'intersection de deux boules ouvertes n'est pas vide, elle contient une boule ouverte centrée en chacun de ses points. Cela résulte de l'inégalité triangulaire.

Les topologies définies par une distance jouissent en particulier d'une propriété importante.

Définition 1.7. Un espace topologique X est dit *séparé*, ou *de Hausdorff*, si pour tous $x \neq y \in X$, alors il existe des ouverts U_x et U_y tels que $x \in U_x$, $y \in U_y$, et $U_x \cap U_y = \emptyset$.

Proposition 1.8. Un espace métrique est toujours séparé.

Démonstration. Il suffit de prendre $r := \frac{1}{2}d(x, y)$ et $U_x := B(x, r)$, $U_y := B(y, r)$. On conclut par l'inégalité triangulaire. \square

Application : montrer que la topologie de l'exemple 1.2(4) ne peut pas être définie par une distance.

Exemple 1.9. (1) Pour $X = \mathbb{R}$, $d(x, y) := |x - y|$. La topologie associée est la topologie euclidienne sur \mathbb{R} .

(2) Pour un X arbitraire, $d(x, x) = 0$ pour tout x , et $d(x, y) = 1$ si $x \neq y$. La topologie associée est la topologie discrète.

(3) Soit d une distance et $\psi : [0, +\infty[\rightarrow [0, +\infty[$ une application croissante, non identiquement nulle, telle que $\psi(0) = 0$ et pour tout t, u , $\psi(t+u) \leq \psi(t) + \psi(u)$ (ce sera le cas par exemple si $\psi(0) = 0$ et ψ est une fonction concave). Alors $\psi \circ d$ est une distance.

Application : si une topologie est définie par une distance, alors on peut toujours la définir par une distance bornée, c'est-à-dire telle que $\sup_{x, y \in X} d(x, y) < \infty$. Il suffit de prendre $\psi(t) = \min(t, 1)$ par exemple.

(4) Si X est l'ensemble des suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que $u_n \in \{0, 1\}$ pour tout n et $u_n = 0$ à partir d'un certain rang, $d(u, v) := \#\{n : u_n \neq v_n\}$ est une distance.

(5) On prend $X = \mathbb{Q}$. On choisit un nombre premier p . Si $x \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$, il existe un unique $n \in \mathbb{Z}$ tel que $x = p^n \frac{a}{b}$, où a et b sont des entiers non-divisibles par p . On pose $|x|_p = p^{-n}$, et $|0|_p = 0$. La distance *p -adique* sur \mathbb{Q} est définie par $d(x, y) := |x - y|_p$. Elle est utilisée en théorie des nombres.

1.3. Fermés, frontière, intérieur... Il est souvent utile de considérer les complémentaires des ensembles qui nous intéressent.

Définition 1.10. Un ensemble F est dit *fermé* si son complémentaire est ouvert.

Un ensemble peut être à la fois fermé et ouvert : \emptyset et X (l'espace entier) le sont toujours.

Les propriétés suivantes sont des conséquences immédiates de la définition 1.1.

Proposition 1.11. Une union finie de fermés est fermée, et une intersection (quelconque) de fermés l'est aussi.

Il en résulte qu'on peut trouver le plus petit fermé contenant un ensemble donné : il suffit de prendre l'intersection de tous les fermés qui le contiennent (il y en a au moins un, l'espace X). Ce procédé consistant à rajouter tout ce qu'il faut à un ensemble (et

juste ce qu'il faut) pour qu'il ait une propriété désirée est parfois appelé opération de clôture (la clôture algébrique en est un autre exemple).

Définition 1.12. On appelle *adhérence* d'un ensemble $A \subset X$, et on note \overline{A} , le plus petit fermé contenant A .

Par conséquent, A est fermé si et seulement si $A = \overline{A}$.

Définition 1.13. On dit que x est un *point d'accumulation* de A si et seulement si $x \in \overline{A \setminus \{x\}}$. Si $x \in A$ n'est pas un point d'accumulation de A , on dit que c'est un point *isolé* de A .

En particulier, si $x \in \overline{A} \setminus A$, alors x est un point d'accumulation de A .

Définition 1.14. Si $\overline{A} = X$, on dit que A est *dense* dans X .

Proposition 1.15. $x \in \overline{A}$ si et seulement si pour tout voisinage V de x , $V \cap A \neq \emptyset$.

Démonstration. Si $x \in U_x \subset V$ et $V \cap A = \emptyset$, avec U_x ouvert, alors $x \notin X \setminus U_x$ et c'est un fermé qui contient A . Réciproquement, si $x \notin \overline{A}$, il existe F fermé, $F \supset A$, $x \notin F$ et $X \setminus F$ sera un voisinage de x qui ne rencontre pas A . \square

De façon exactement symétrique à la définition de l'adhérence :

Définition 1.16. On appelle *intérieur* d'un ensemble $A \subset X$, et on note A° , le plus grand ouvert contenu dans A .

Par conséquent, A est ouvert si et seulement si $A = A^\circ$.

Proposition 1.17. $x \in A^\circ$ si et seulement si A est un voisinage de x .

La démonstration est laissée au lecteur (et peut lui permettre de redémontrer la Proposition 1.15 de manière légèrement différente).

Les définitions impliquent immédiatement $(X \setminus A)^\circ = X \setminus \overline{A}$. Cet ensemble est parfois appelé *extérieur* de A . Il est souvent intéressant de considérer l'ensemble des points qui ne sont ni à l'intérieur ni à l'extérieur de A .

Définition 1.18. La *frontière* de $A \subset X$ est $\partial A := \overline{A} \setminus A^\circ = \overline{A} \cap \overline{(X \setminus A)}$.

Par conséquent, $A = \partial A$ si et seulement si A est un fermé d'intérieur vide.

Il est intéressant de noter qu'on pourrait définir une topologie à partir de l'ensemble de ses fermés, à partir des voisinages de tout point, ou à partir de la donnée de la frontière, ou de l'adhérence, ou de l'intérieur, de tout sous-ensemble.

Exemple 1.19. Soit I un intervalle de \mathbb{R} (ou n'importe quel ensemble, à vrai dire). Considérons $X = \mathbb{R}^I$ (l'ensemble de toutes les applications (fonctions) définies sur I à valeurs dans \mathbb{R} ; en fait, on pourrait remplacer \mathbb{R} par n'importe quel espace métrique, par exemple). Étant donnée une fonction $f \in X$ un ensemble fini $E := \{x_1, \dots, x_N\} \subset I$, et $\varepsilon > 0$, on définit le voisinage élémentaire de f ,

$$V_{E,\varepsilon}(f) := \{g \in X : \forall x_i \in E, |g(x_i) - f(x_i)| < \varepsilon\}.$$

Un ensemble U sera dit un voisinage de f s'il existe E fini, $E \subset I$, et $\varepsilon > 0$ tels que $V_{E,\varepsilon}(f) \subset U$. On définit une famille d'ouverts en demandant qu'un ouvert soit

voisinage de chacun de ses points. On peut vérifier que ceci est une topologie, dite de la convergence simple.

En vous servant de la définition de la limite donnée un peu plus loin, vous pouvez voir que $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f$ (au sens de cette topologie) si et seulement si la suite $(f_n)_n$ converge simplement vers f .

1.4. Distance à un ensemble. Nous allons maintenant donner des caractérisations métriques de toutes les notions ci-dessus, quand la topologie est celle d'un espace métrique (X, d) . Les démonstrations sont faciles, et laissées au lecteur.

Proposition 1.20. $x \in A^\circ$ si et seulement si il existe $r > 0$ tel que $B(x, r) \subset A$.

Une propriété importante d'un espace métrique est que chaque point admet une *base dénombrable de voisinages*, c'est-à-dire une famille dénombrable d'ensembles tel que tout voisinage de x contienne un membre de cette famille.

Proposition 1.21. Pour tout V voisinage de x , il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $B(x, \frac{1}{n}) \subset V$.

On peut utiliser cette propriété pour montrer que la topologie de l'exemple 1.19 ne peut pas être définie par une distance (alors qu'elle est séparée).

La notion d'adhérence s'exprime naturellement en termes de distance d'un point à un ensemble.

Définition 1.22. Si $x \in X$ et $A \subset X$, $d(x, A) := \inf\{d(x, y) : y \in A\}$ et plus généralement si $A, B \subset X$, $d(A, B) := \inf\{d(x, y) : x \in A, y \in B\}$.

Attention ! Ceci ne définit pas une distance sur $\mathcal{P}(X)$. On peut démontrer (exercice) que si (X, d) est un espace métrique borné, alors la *distance de Hausdorff* :

$$d_H(A, B) := \max \left(\sup_{x \in A} d(x, B), \sup_{y \in B} d(y, A) \right)$$

fait de l'ensemble des *fermés* de X un espace métrique.

Proposition 1.23. $x \in \bar{A}$ si et seulement si $d(x, A) = 0$.

Dans le cas des espaces métriques, on peut donner une caractérisation qui explique mieux la terminologie "point d'accumulation" :

Proposition 1.24. Si $A \subset X$, X espace métrique, x est un point d'accumulation si et seulement si toute boule $B(x, r)$ contient une infinité de points de A .

Démonstration. Il est clair que le critère est suffisant, puisque toute boule $B(x, r)$ contiendra des points de A différents de x . Réciproquement, si il existait $r_0 > 0$ tel que $A \cap B(x, r_0)$ soit un ensemble fini, alors

$$d(x, A \setminus \{x\}) = \min \{d(x, a) : a \in A \cap B(x, r_0) \setminus \{x\}\} > 0.$$

□

Dans le cas d'un espace métrique, a est un point isolé de A si et seulement si il existe $r > 0$ tel que $B(a, r) \cap A = \{a\}$.

2. LIMITES, SUITES

Nous allons maintenant considérer deux espaces topologiques X et Y avec leurs topologies respectives, et une application $f : X \rightarrow Y$. Dans certains cas les ensembles sous-jacents peuvent être égaux, avec des familles d'ouverts différentes !

2.1. Limites.

Définition 2.1. Soient $x \in X$ et $y \in Y$. Soit $A \subset X$ tel que $x \in \overline{A}$ et $f : A \rightarrow Y$. On dit que y est la *limite* de f en x (le long de A) et on écrit $\lim_{x' \rightarrow x, x' \in A} f(x') = y$ si et seulement si pour tout voisinage V de y , il existe un voisinage U de x tel que $f(U \cap A) \subset V$.

Quand on ne mentionne pas d'ensemble A , la convention est en général que $A = X \setminus \{x\}$.

En toute rigueur, on ne devrait pas dire "la" limite puisque la définition ci-dessus pourrait s'appliquer à plusieurs valeurs de y .

Proposition 2.2. Si la topologie de Y est séparée, f ne peut avoir au plus qu'une limite en x le long de A .

Démonstration. Si on en avait deux, on les munirait de deux voisinages disjoints, et $f(U \cap A)$ ne pourrait pas être à la fois dans les deux. \square

Commentaire : vous noterez que cette définition semble un peu compliquée par rapport à celles que vous pouvez connaître. Mais je suis paresseux, et voulais écrire un énoncé qui puisse s'appliquer à beaucoup de situations d'un seul coup. Remarquez que si $x \in A$, la condition de limite implique $f(x) = y$, et donc la continuité de f au point x . La continuité des applications est abordée dans la section suivante.

D'autre part, de bons choix de A permettent d'utiliser cette définition pour les limites à droite et à gauche (si X est un intervalle $]a, b[\subset \mathbb{R}$, on prend $A =]x, b[$ ou $A =]a, x[$ respectivement), ou suivant une direction si $X = \mathbb{R}^n$, etc.

Pour considérer les limites infinies, on se place dans l'espace topologique $X = \overline{\mathbb{R}} := [-\infty, +\infty] := \{-\infty\} \cup \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, qu'on appelle *droite réelle achevée*, ou droite numérique achevée, avec les voisinages suivants pour les nouveaux points : un voisinage de $+\infty$ est n'importe quel ensemble qui contient $+\infty$ et un intervalle de la forme $]A, +\infty[$ pour un certain $A \in \mathbb{R}$; et une définition similaire pour les voisinages de $-\infty$.

Cette topologie peut être définie par la distance suivante : on pose $\arctan(+\infty) := \pi/2$, $\arctan(-\infty) := -\pi/2$, et pour $x, y \in X$, $d(x, y) := |\arctan x - \arctan y|$.

2.2. Suites. Un cas particulier important est celui où $X = \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$. On peut le munir de la topologie définie par la restriction à X de la distance ci-dessus. De façon équivalente, les ouverts de X seront tous les sous-ensembles de \mathbb{N} , et tous les sous-ensembles de X contenant $+\infty$ dont le complémentaire est fini (exercice : les axiomes d'une topologie sont vérifiés). Le seul point d'accumulation de X sera $+\infty$.

Définition 2.3. On appelle *suite* dans X toute application $f : \mathbb{N} \rightarrow X$. On note souvent $f(n) = x_n$. On dit que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = y$ si la définition 2.1 est satisfaite pour la topologie de $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ donnée ci-dessus. Si une limite existe, on dit que la suite est *convergente*.

Exercice : vérifier que c'est bien la même chose que la définition habituelle : pour tout voisinage V de y , il existe N tel que si $n \geq N$, $f(x_n) \in V$.

Dans le cas métrique, la définition se réécrit avec des boules et devient finalement :

Définition 2.4. Soient $x \in X$ et $y \in Y$. Soit $A \subset X$ tel que $x \notin A$, $d(x, A) = 0$ et $f : A \rightarrow Y$. On dit que y est la *limite* de f en x (le long de A) et on écrit $\lim_{x' \rightarrow x, x' \in A} f(x') = y$ si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un $\delta > 0$ tel que si $d(x, x') < \delta$, $x' \in A$, alors $d(f(x'), y) < \varepsilon$.

2.3. Valeurs d'adhérence. Il est souvent utile de disposer d'une notion plus faible que celle de limite.

Définition 2.5. Soient $x \in X$ et $y \in Y$. Soit $A \subset X$ tel que $x \in \overline{A} \setminus A$ et $f : A \rightarrow Y$. On dit que y est une *valeur d'adhérence* de f en x (le long de A) si et seulement si pour tout voisinage V de y , pour tout voisinage U de x , $f(U \cap A) \cap V \neq \emptyset$.

De même que pour la limite, si on parle de valeur d'adhérence sans autre précision, il faut appliquer cette définition avec $A = X \setminus \{x\}$. Mais l'usage de la convergence le long d'un sous-ensemble est lié aux valeurs d'adhérence :

Proposition 2.6. Si $A' \subset A$, $x \in \overline{A'}$, et $\lim_{x' \rightarrow x, x' \in A'} f(x') = y$, alors y est une valeur d'adhérence de f en x le long de A .

Dans le cas des suites, on peut caractériser les valeurs d'adhérence (en ∞) de façon plus concise :

Proposition 2.7. L'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite (x_n) est égal à $\bigcap_{p \in \mathbb{N}} \overline{\{x_n, n > p\}}$.

Démonstration. Soit y une valeur d'adhérence. Ici $A = \mathbb{N}$ et le point x est ∞ , et ses voisinages ont été définis avant la Définition 2.3. En particulier, $\{n \in \mathbb{N} : n > p\}$ est un voisinage de ∞ . On voit d'après la Définition 2.5 que pour $p \in \mathbb{N}$, pour tout V voisinage de y , il existe un $n > p$ tel que $x_n \in V$. Donc $y \in \overline{\{x_n, n > p\}}$, et ceci est vrai pour tout p .

Réciproquement, tout voisinage W de ∞ contient un ensemble de la forme $\{n \in \mathbb{N} : n > p\}$ et donc si $y \in \bigcap_{p \in \mathbb{N}} \overline{\{x_n, n > p\}}$, et V est un voisinage de y , on peut toujours trouver $n \in W$ tel que $x_n \in V$. \square

Dans le cas des suites toujours, et au moins dans le cas où Y est un espace métrique, la réciproque de la Proposition 2.6 est vraie. On rappelle qu'on appelle *sous-suite* d'une suite f la composition $f \circ \varphi$, où φ est une application strictement croissante de \mathbb{N} dans \mathbb{N} .

Proposition 2.8. y est une valeur d'adhérence de la suite (x_n) si et seulement si il existe une sous-suite $(x_{\varphi(n)})$ telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{\varphi(n)} = y$.

Démonstration. Supposons que y est une valeur d'adhérence de la suite (x_n) . Nous allons construire récursivement l'application φ . Posons $\varphi(0) = 0$. Supposons qu'on ait déterminé $\varphi(k)$ pour $k \leq n$, et que $\varphi(0) < \varphi(1) < \dots < \varphi(n)$. Alors $\{m : m > \varphi(n)\} \cup \{+\infty\}$ est un voisinage de $+\infty$, donc il existe $m > \varphi(n)$ telle que $f(x_m) \in B(y, \frac{1}{n+1})$. On prend pour $\varphi(n+1)$ le plus petit m possédant cette propriété.

Étant donné $\varepsilon > 0$, il suffit alors de prendre $N > 1/\varepsilon$ pour s'assurer que si $n > N$, alors $f(x_{\varphi(n)}) \in B(y, \frac{1}{N}) \subset B(y, \varepsilon)$. \square

Pour les suites à valeurs réelles, on peut définir deux valeurs d'adhérence particulières (et fort utiles). Dans ce qui suit, toutes bornes supérieures et inférieures et toutes les limites s'entendent dans la droite réelle achevée, donc par exemple un ensemble de réels non borné supérieurement a une borne supérieure égale à $+\infty$, et ainsi de suite.

Définition 2.9. Soit $(u_n)_n$ une suite à valeurs réelles. On pose

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} u_n := \lim_{n \rightarrow \infty} \sup \{u_p, p \geq n\}, \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} u_n := \lim_{n \rightarrow \infty} \inf \{u_p, p \geq n\}.$$

Proposition 2.10. Les limites écrites dans la définition ci-dessus existent bien dans $[-\infty, +\infty]$.

$\limsup_{n \rightarrow \infty} u_n$ est la plus grande des valeurs d'adhérence de $(u_n)_n$ dans $[-\infty, +\infty]$; $\liminf_{n \rightarrow \infty} u_n$ est la plus petite des valeurs d'adhérence de $(u_n)_n$ dans $[-\infty, +\infty]$.

La démonstration est laissée en exercice.

2.4. Usage des suites. Dans le cas d'un espace métrique, toutes les notions topologiques peuvent s'exprimer à l'aide de suites. C'est une conséquence du fait que chaque point admet une base dénombrable de voisinages (mais nous ne nous servons pas de cette notion plus abstraite). Il est souvent plus facile de fabriquer des démonstrations qui utilisent des suites — cela dépend évidemment de comment votre esprit est fait. Ces démonstrations ne sont pas toujours les plus simples ni les plus élégantes !

Dans tout ce qui suit, (X, d) est un espace métrique.

Proposition 2.11. L'adhérence d'un ensemble $A \subset X$ est l'ensemble des limites des suites convergentes contenues dans A .

Par conséquent, A est fermé si et seulement si pour toute suite convergente $(x_n)_n$ telle que $x_n \in A, \forall n$, alors $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \in A$. (Un ensemble est fermé ssi il contient les limites de toutes ses suites convergentes).

Démonstration. Nous allons utiliser la Proposition 1.23 pour démontrer ce fait. On pourrait le faire directement, mais cela nous forcerait à démontrer le fait que toute limite de limites de suites de A est elle-même une limite de suite de A (ce qui n'est pas évident, et pourrait ne pas se produire si la topologie n'était pas définie par une distance : cf. l'Exemple 11.2, ou l'exercice 2.12, qui suit).

Supposons que $x \notin \overline{A}$. Alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(x, \varepsilon) \cap A = \emptyset$. Si $(x_n)_n \subset A$, en utilisant cet ε dans la définition de la limite de la suite, on voit que x ne peut pas en être la limite (ni même une valeur d'adhérence).

Supposons que $x \in \overline{A}$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $x_n \in A \cap B(x, \frac{1}{n})$. La suite $(x_n)_n$ converge vers x . \square

Exercice 2.12. Montrer que $\lim_{n \rightarrow \infty} (\lim_{k \rightarrow \infty} (\cos n! \pi x)^{2k})$ est la fonction caractéristique de \mathbb{Q} dans \mathbb{R} . (Peut-on intervertir les deux limites ?)

L'exercice 7.14 montre qu'on ne peut pas trouver une seule suite de fonctions continues qui tende vers la limite en question.

En passant au complémentaire dans la Proposition 2.11, on voit qu'un point x est dans l'intérieur d'une partie A si et seulement si il n'est limite d'aucune suite incluse dans le complémentaire de A . Ce n'est pas un critère très utile, alors que le suivant est à la fois plus facile à démontrer (laissé au lecteur; exploiter la Proposition 1.20) et à utiliser.

Proposition 2.13. $x \in A^\circ$ si et seulement si quelle que soit la suite $(x_n)_n$ qui converge vers x , alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N, x_n \in A$.

De tout ce qui précède on déduit facilement :

Proposition 2.14. $x \in \partial A$ si et seulement si il existe des suites $(x_n)_n \subset A$ et $(y_n)_n \subset X \setminus A$ telles que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = x$.

3. APPLICATIONS CONTINUES

3.1. Continuité globale.

Définition 3.1. Soient X et Y deux espaces topologiques et f une application de X dans Y . On dit que f est *continue* si pour tout ouvert $U \subset Y$, $f^{-1}(U)$ est un ouvert de X .

En passant aux complémentaires, on voit immédiatement que :

Proposition 3.2. L'application f est continue si et seulement si pour tout fermé $F \subset Y$, $f^{-1}(F)$ est un fermé de X .

Exemple 3.3. (1) Si X est muni de la topologie discrète, toute application est continue.

(2) Si X est muni de la topologie grossière (les seuls ouverts sont \emptyset et X), et que Y est séparé, alors seules les applications constantes sont continues.

(3) Les espaces X et Y peuvent être le même ensemble muni de deux topologies différentes, et f l'application *id* (identité). On voit que *id* est continue de (X, \mathcal{T}_1) dans (X, \mathcal{T}_2) si et seulement si tout ouvert de \mathcal{T}_2 est un ouvert de \mathcal{T}_1 . Donc \mathcal{T}_1 a plus d'ouverts que \mathcal{T}_2 . On dit que \mathcal{T}_1 est *plus fine* que \mathcal{T}_2 . Cela signifie en particulier que la convergence d'une suite au sens de \mathcal{T}_1 implique la convergence au sens de \mathcal{T}_2 .

(4) Un exemple de la situation ci-dessus est fournie par la topologie de la convergence simple sur \mathbb{R}^I et celle de la convergence uniforme.

(5) D'autres exemples sont fournis par la comparaison entre les trois distances suivantes sur $\mathcal{C}^0([a, b])$ (l'ensemble des fonctions continues sur un intervalle fermé borné de \mathbb{R}):

- $d_\infty(f, g) := \max_{[a, b]} |f(x) - g(x)|;$
- $d_1(f, g) := \int_a^b |f(x) - g(x)| dx;$
- $d_2(f, g) := \left(\int_a^b |f(x) - g(x)|^2 dx \right)^{1/2}.$

La définition de la continuité globale peut surprendre. Les reformulations suivantes sont un peu plus parlantes.

Proposition 3.4. Chacune des propriétés suivantes est équivalente à la continuité de f :

- (1) Pour tout $x \in X$, si V est un voisinage de $f(x)$, alors $f^{-1}(V)$ est un voisinage de x .
- (2) Pour tout $A \subset X$, $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$.

Intuitivement, le premier énoncé dit que parmi les points “proches” de $f(x)$, on doit avoir les images de tous les points suffisamment “proches” de x ; le deuxième dit que les points qui sont “infiniment proches” d’un ensemble A doivent être envoyés par f vers des points “infiniment proches” de l’image de A .

Démonstration. La continuité de f implique (1) : si V est un voisinage de $f(x)$, il existe un ouvert U tel que $f(x) \in U \subset V$. Donc $x \in f^{-1}(U) \subset f^{-1}(V)$. Supposons que f est continue, alors $f^{-1}(U)$ est ouvert, il en résulte que $f^{-1}(V)$ est un voisinage de x .

(1) implique (2) : soit $x \in \overline{A}$. Prenons un voisinage quelconque V de $f(x)$. Alors $f^{-1}(V)$ est un voisinage de x , donc $f^{-1}(V) \cap A \neq \emptyset$. Soit $a \in f^{-1}(V) \cap A$, alors $f(a) \in V \cap f(A)$. Donc $V \cap f(A) \neq \emptyset$: ceci est vrai pour tout voisinage de $f(x)$, donc $f(x) \in \overline{f(A)}$, cqfd.

(2) implique la continuité de f : soit U un ouvert de Y . On veut montrer que $A := X \setminus f^{-1}(U)$ est fermé. Or $f(A) \subset Y \setminus U$, qui est fermé, donc d’après (2),

$$f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)} \subset Y \setminus U,$$

ce qui veut dire que $\overline{A} \subset X \setminus f^{-1}(U) = A$, cqfd. □

Un grand avantage des espaces métriques est que l’existence d’une distance (dont on vérifie immédiatement grâce à l’inégalité triangulaire qu’elle est continue de X dans $[0, +\infty[$ muni de la topologie euclidienne) fournit de nombreuses fonctions continues.

Par exemple, tout ouvert $U \subset X$ peut s’écrire comme image réciproque d’un ouvert de \mathbb{R} par une fonction continue : il suffit de prendre $f_U(x) := d(x, X \setminus U)$ et alors $U = f^{-1}(]0, +\infty[)$.

Si on définit une *boule fermée* comme l’ensemble $BF(x, r) := \{y \in X : d(x, y) \leq r\}$, alors $BF(x, r)$ est toujours un fermé de X : si on pose $f_x(y) := d(x, y)$, alors $BF(x, r) = f^{-1}([0, r])$. En particulier, dans un espace métrique, tout singleton $\{x\} = BF(x, 0)$ est fermé (et donc tout sous-ensemble fini).

Attention ! La boule fermée est souvent notée $\overline{B}(x, r)$, mais cette notation est trompeuse, car si on a toujours $\overline{B}(x, r) \subset BF(x, r)$, les deux ensembles peuvent être différents. Par exemple, si $X = \mathbb{Z}$ muni de la distance usuelle (euclidienne), $BF(0, 1) = \{-1, 0, 1\}$, mais $B(0, 1) = \overline{B}(0, 1) = \{0\}$.

On appelle *espace vectoriel topologique* tout espace vectoriel muni d’une topologie telle que les opérations de l’espace (addition, multiplication par un scalaire) soient continues par rapport à l’ensemble de leurs variables. Nous verrons en détail le cas particulier important des espaces normés (Section 8).

Exercice 3.5. Si X est un espace vectoriel topologique, pour tout $x \in X$ et $r > 0$, $BF(x, r) = \overline{B}(x, r)$.

3.2. Continuité en un point.

Définition 3.6. Soient X et Y deux espaces topologiques et f une application de X dans Y . On dit que f est continue au point x si $\lim_{x' \rightarrow x, x' \in X \setminus \{x\}} f(x') = f(x)$.

Proposition 3.7. (1) f est continue au point x si et seulement si pour tout V voisinage de $f(x)$, alors $f^{-1}(V)$ est un voisinage de x .

(2) Dans le cas où X et Y sont des espaces métriques, f est continue au point x si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que $f(B(x, \delta)) \subset B(f(x), \varepsilon)$.

Démonstration. Si f est continue au point x , d'après la définition de la limite, pour tout voisinage V de $f(x)$, il existe un voisinage U de x tel que $f(U \setminus \{x\}) \subset V$. Mais comme $f(x) \in V$ par choix de V , on a $f(U) \subset V$. Donc $U \subset f^{-1}(V)$ et par conséquent $f^{-1}(V)$ est un voisinage de x .

On peut retracer les pas dans le sens réciproque : soit V voisinage de $f(x)$, alors $U := f^{-1}(V)$ est un voisinage de x , donc $f(U \setminus \{x\}) \subset f(f^{-1}(V)) \subset V$ (attention, la dernière inclusion peut ne pas être une égalité). Ce qui démontre que $f(x) = \lim_{x' \rightarrow x} f(x')$.

Le point (2) est un corollaire facile, étant donnée la définition des voisinages dans un espace métrique. \square

Les Propositions 3.4 (1) et 3.7 impliquent facilement :

Théorème 3.8. f est continue (de X dans Y) si et seulement si f est continue au point x pour tout $x \in X$.

On dit que la continuité est une propriété locale.

Proposition 3.9. Si f est une application de X dans Y , $A \subset X$ et $\lim_{x' \rightarrow x, x' \in A} f(x') = y$; si g est une application de Y dans Z , continue au point y , alors $\lim_{x' \rightarrow x, x' \in A} g \circ f(x') = g(y)$.

En particulier, si f et g sont des applications continues, $g \circ f$ est continue.

Démonstration. Soit W un voisinage de $g(y)$. Alors $g^{-1}(W)$ est un voisinage de y , donc il existe un voisinage U de x tel que $f(U \cap A) \subset g^{-1}(W)$, et par conséquent $g \circ f(U \cap A) \subset W$. \square

Dans le cas d'un espace métrique, la continuité, comme les autres notions topologiques, peut être caractérisée par les suites.

Théorème 3.10. f est continue au point x si et seulement si pour toute suite $(x_n)_n$ telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$, alors $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x)$.

Démonstration. Le sens direct est une conséquence de la Proposition 3.9.

Réciproquement, supposons qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel qu'on ait $f(B(x, \delta)) \not\subset B(f(x), \varepsilon)$ pour tout $\delta > 0$. En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on trouve $x_n \in B(x, \frac{1}{n})$ tel que $d(f(x_n), f(x)) \geq \varepsilon$. Alors la suite $(x_n)_n$ vérifie $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$, mais $(f(x_n))_n$ ne peut pas converger vers $f(x)$. \square

3.3. Homéomorphismes, topologies définies par des familles d'applications.

Définition 3.11. On appelle *homéomorphisme* une bijection f de X dans Y telle que f et f^{-1} soient des applications continues.

Un homéomorphisme fait correspondre exactement les topologies des deux espaces X et Y .

On dit aussi qu'une application f est *ouverte* si pour tout ouvert $U \subset X$, alors $f(U)$ est ouvert. Une application continue f n'a aucune raison d'être ouverte : par exemple, si $Y = \mathbb{R}$ et f est constante, elle est continue, mais pas ouverte. (Exercice : parmi les fonction $f \in \mathcal{C}(]a, b[)$ déterminer toutes celles qui sont ouvertes). Il découle de la définition ci-dessus qu'une bijection continue de X dans Y est un homéomorphisme si et seulement si elle est ouverte.

Exemple 3.12. Si $X = [0, 1] \cup]2, 3]$, $Y = [0, 2]$, tous deux munis de la topologie donnée par la distance euclidienne, et que $f(x) = x$ pour $x \in [0, 1]$, $f(x) = x - 1$ pour $x \in]2, 3]$, alors f est une bijection continue de X dans Y qui n'est pas un homéomorphisme.

Nous verrons plus tard que les applications linéaires surjectives entre des espaces vectoriels normés complets sont ouvertes. C'est aussi un théorème qu'une application holomorphe non constante est ouverte.

Il est parfois utile de définir une topologie à partir d'une application, ou d'une famille d'applications. Nous nous bornerons à trois exemples.

Si $(f_i, i \in \mathcal{I})$ sont des applications continues de X dans Y , on peut vouloir définir une topologie moins fine sur X en considérant la topologie la moins fine qui rend continues toutes les f_i . Plus précisément, on peut donner des voisinages élémentaires d'un point $x \in X$ en considérant les intersections finies $\bigcap_{1 \leq k \leq N} f_{i_k}^{-1}(V_k)$, où chaque V_k est un voisinage de $f_{i_k}(x)$ dans Y . Le seul exemple que nous utiliserons sera celui de la topologie faible d'un espace vectoriel normé, où la famille d'applications sera celle des formes linéaires continues.

Si X est un espace produit, $X = \prod_{i \in \mathcal{I}} X_i$, on définit la topologie produit en demandant que chaque projection soit continue, où la projection π_i associée à $x = (x_k, k \in \mathcal{I})$ sa i -ième composante x_i . Dans le cas où $\mathcal{I} = I$ un intervalle de \mathbb{R} et $X_i = \mathbb{R}$ pour tout i , on retrouve l'espace \mathbb{R}^I avec la topologie de la convergence simple.

Dans le cas d'un produit fini, les ouverts sont simplement des unions quelconques de produits des ouverts de chaque composante. Dans le cas particulier où les espaces X_1, \dots, X_n sont métriques, on peut munir le produit fini d'une distance : si $x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n)$, alors $d(x, y) := \max_{1 \leq i \leq n} d_i(x_i, y_i)$. Une suite convergera si et seulement si chacune des suites coordonnées converge.

Si X est un espace topologique muni d'une relation d'équivalence \mathcal{R} , on peut considérer l'ensemble quotient (ensemble des classes d'équivalence) $Y := X/\mathcal{R}$. Il y a une projection naturelle $\pi : x \mapsto [x]$ (la classe de x). Cette fois-ci, on définit la topologie sur Y en la prenant la plus fine possible (avec le plus d'ouverts possible) pour que π soit continue. Plus concrètement, $U \subset Y$ est ouvert si et seulement si $\pi^{-1}(U)$ est un ouvert de X .

Exemple : on prend $X = [0, 1]$ et $x\mathcal{R}x'$ si et seulement si $x = x'$ ou $x = 0, x' = 1$, ou vice versa $x' = 0, x = 1$. L'espace quotient correspond au "recollement" des deux extrémités de l'intervalle. L'application exponentielle $[x] \mapsto e^{2\pi i x}$ est bien définie sur Y et définit un homéomorphisme entre Y et le cercle unité dans \mathbb{C} .

3.4. Propriétés particulières aux espaces métriques.

Définition 3.13. On dit que f est *uniformément continue* de (X, d_X) dans (Y, d_Y) si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que si $d_X(x_1, x_2) < \delta$, alors $d_Y(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon$.

De façon équivalente, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in X$, $f(B(x, \delta)) \subset B(f(x), \varepsilon)$ (attention, pour un ε donné, on n'obtient pas exactement le même δ pour chacun des deux énoncés). La différence avec la caractérisation obtenue par la Proposition 3.7 (2) est que δ dépend du ε choisi, mais pas du point $x \in X$. Il est donc clair que l'uniforme continuité implique la continuité, et que la notion dépend étroitement de l'ensemble X sur lequel on la teste. C'est une notion globale, et non locale.

De plus, c'est une notion qui dépend de la distance qu'on utilise : si on utilise deux distances qui définissent la même topologie, on peut avoir des réponses différentes quant à l'uniforme continuité d'une fonction donnée.

Exemple 3.14. Pour $x, y \in \mathbb{R}$, considérons les distances $d_b(x, y) := |\arctan x - \arctan y|$ (cf. après la Définition 2.1) et la distance euclidienne usuelle $d_e(x, y) := |x - y|$. L'application identité $(\mathbb{R}, d_b) \rightarrow (\mathbb{R}, d_e)$ est un homéomorphisme, mais n'est pas uniformément continue.

On peut définir des notions plus fortes que la continuité uniforme où δ dépend explicitement du ε choisi.

Définition 3.15. (1) f est *lipschitzienne* de (X, d_X) dans (Y, d_Y) si il existe $C > 0$ tel que pour tous $x_1, x_2 \in X$, $d_Y(f(x_1), f(x_2)) \leq C d_X(x_1, x_2)$.
 (2) Soit $\alpha \in]0, 1[$. f est *höldérienne* d'exposant α de (X, d_X) dans (Y, d_Y) si il existe $C > 0$ tel que pour tous $x_1, x_2 \in X$, $d_Y(f(x_1), f(x_2)) \leq C d_X(x_1, x_2)^\alpha$.

Exemple 3.16. (1) Une fonction de classe \mathcal{C}^1 sur un intervalle fermé borné sera toujours lipschitzienne (grâce à l'inégalité des accroissements finis).
 (2) La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est höldérienne d'exposant $\frac{1}{2}$ sur $[0, 1]$, et donc uniformément continue sur cet intervalle, mais pas lipschitzienne.
 (3) La fonction $x \mapsto x^2$ est uniformément continue sur tout intervalle fermé borné de \mathbb{R} , mais n'est pas uniformément continue sur \mathbb{R} .

4. CONNEXITÉ

4.1. Topologie induite.

Si $Y \subset X$ et que X est un espace topologie, la *topologie induite* sur Y est celle telle que les ouverts de Y soient tous les ensembles de la forme $Y \cap U$, où U est un ouvert de X (on vérifie immédiatement que c'est bien une topologie).

Si (X, d) est un espace métrique, il revient au même de munir Y de la topologie définie par $d|_Y$, la distance d restreinte à Y .

Cette définition peut sembler superflue (on peut se contenter de considérer des parties de l'espace), mais elle sera utile dans ce qui suit, où nous allons souvent considérer des parties d'un espace topologique comme un espace en soi. Voici un exemple simple d'usage de la notion.

Définition 4.1. Un sous-ensemble $A \subset X$ est dite *discret* si la topologie induite par X sur A est la topologie discrète.

Un espace topologique est discret si et seulement si tout singleton est ouvert, donc d'après la Définition 1.13, un sous-ensemble est discret si et seulement si tous ses points sont isolés dans lui-même.

Si X est un espace métrique, une définition équivalente est : pour tout $a \in A$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(a, \varepsilon) \cap A = \{a\}$.

Exemple 4.2. (1) \mathbb{Z} et $\{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*\}$ sont des sous-ensembles discrets de \mathbb{R} . Tout sous-ensemble discret de \mathbb{R} (ou \mathbb{R}^n) est dénombrable (pourquoi ?).

(2) Considérons l'espace $[0, 1]^{\mathbb{N}}$ des suites à valeurs dans $[0, 1]$, muni de la distance $d_{\infty}(u, v) := \sup_n |u_n - v_n|$. Alors $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ est un sous-ensemble discret non dénombrable.

4.2. Connexité en général.

Définition 4.3. Un espace topologie X est dit *connexe* si et seulement si les seules parties de X qui sont à la fois ouvertes et fermées sont \emptyset et X . Une partie $A \subset X$ est dite connexe si elle est connexe comme espace muni de la topologie induite.

Détaillons ce que veut dire qu'une partie A est connexe : si $B \subset A$, et si il existe U ouvert de X et F fermé de X tels que $B = A \cap U = A \cap F$, alors $B = \emptyset$ ou $B = A$.

Une autre caractérisation est que A est non-connexe si et seulement si il existe deux ouverts U_1 et U_2 de X tels que $A \subset U_1 \cup U_2$ avec $A \cap U_1 \neq \emptyset$, $A \cap U_2 \neq \emptyset$ et $A \cap U_1 \cap U_2 = \emptyset$ (les traces des ouverts U_1 et U_2 sur A en donnent une partition non-triviale).

Autrement dit, A est connexe si et seulement si : si U_1 et U_2 sont des ouverts tels que $A \cap U_1 \cap U_2 = \emptyset$ et que $A \subset U_1 \cup U_2$, on a soit $A \subset U_1$, soit $A \subset U_2$.

Intuitivement, une partie connexe est "d'un seul tenant". Par exemple, $A := \{0, 1\} \subset \mathbb{R}$ n'est pas connexe parce que $\{0\} = A \cap]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$ et $\{1\} = A \cap]\frac{1}{2}, \frac{3}{2}[$. Plus généralement :

Proposition 4.4. Les seules parties connexes non-vides de \mathbb{R} sont les intervalles.

Pour la première fois (et pas la dernière), nous allons utiliser la propriété la borne supérieure dans \mathbb{R} (et même $\overline{\mathbb{R}}$); voir Section 6 pour une justification rigoureuse.

Démonstration. Soit $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$. Alors si A n'est pas un intervalle, il existe $a, b \in A$ et $c \in \mathbb{R} \setminus A$ tels que $a < c < b$. Mais alors $B :=]-\infty, c[\cap A =]-\infty, c[\cap A$ est un ensemble ouvert et fermé (dans A) qui n'est ni vide, ni égal à A .

Réciproquement, soit I un intervalle et $\emptyset \neq A \subset I$ un ensemble ouvert et fermé. Nous allons travailler dans $\overline{\mathbb{R}}$ pour éviter d'avoir à distinguer différents cas selon que I est borné ou non. Soit $a \in A$, et s la borne supérieure de I . Posons $m := \sup\{x : [a, x[\subset A\}$. L'ensemble considéré n'est pas vide car $a \in A$ et A est ouvert. On ne peut pas avoir $m < s$: si c'était le cas, alors $[a, m[= \cup_x [a, x[\subset A$. Comme A est fermé, $m \in A$. Mais alors comme A est ouvert, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $]m - \varepsilon, m + \varepsilon[\subset A$, donc $[a, m + \varepsilon[\subset A$ et ceci contredit la définition de m . De plus, si I est fermé en s , le fait que A soit fermé implique que $m = s \in A$. De la même manière, on voit que $A \supset]-\infty, a] \cap I$. □

Dans un espace métrique, un ensemble à la fois ouvert et fermé A vérifie que si $a \in A$, alors une petite boule autour de a est encore dans A , et si $(a_n)_n \subset A$ converge, alors $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \in A$. La connexité est souvent utilisée en analyse pour montrer

qu'une propriété qui reste vraie au voisinage d'un point où elle est vraie, et qui est stable par passage à la limite, se propage à tout l'ensemble. Par exemple, le fait qu'une fonction de dérivée nulle soit constante, l'existence d'une solution maximale d'une équation différentielle, le principe du maximum pour les fonctions holomorphes (ou même harmoniques).

4.3. Application continues.

Théorème 4.5. *Si $A \subset X$ est connexe et f est une application continue de X dans Y , alors $f(A)$ est connexe.*

Un corollaire immédiat de ceci et de la Proposition 4.4 est le Théorème des Valeurs Intermédiaires.

Démonstration. Soient U_1 et U_2 deux ouverts disjoints de Y tels que $f(A) \subset U_1 \cup U_2$. Alors $A \subset f^{-1}(U_1) \cup f^{-1}(U_2)$, qui est la réunion de deux ouverts disjoints de X , donc comme A est connexe, l'intersection avec l'un des deux est vide, disons $A \cap f^{-1}(U_1) = \emptyset$. Mais ceci signifie exactement que $f(A) \cap U_1 = \emptyset$. \square

Ceci permet de fabriquer beaucoup d'ensembles connexes, mais aussi de donner des contraintes sur les applications continues ou les homéomorphismes. En voici quelques exemples.

Proposition 4.6. Le cercle unité $S^1 := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ n'est pas homéomorphe à l'intervalle $[0, 1]$.

Démonstration. Soit φ un homéomorphisme. Alors la restriction de φ à $[0, \frac{1}{2} \cup]\frac{1}{2}, 1]$ donne un homéomorphisme avec $S^1 \setminus \varphi(\frac{1}{2})$. Mais le deuxième ensemble est connexe et le premier ne l'est pas. \square

Proposition 4.7. Toute application continue d'un ensemble connexe dans \mathbb{Z} est constante.

Démonstration. Tout sous-ensemble de \mathbb{Z} étant ouvert, les seules parties connexes non-vides de \mathbb{Z} sont les singletons. \square

Bien entendu, ce qui précède s'applique avec n'importe quel ensemble discret à la place de \mathbb{Z} .

4.4. Composantes connexes. Nous allons commencer par donner d'autres moyens de produire des parties connexes.

Proposition 4.8. Si $(A_i, i \in \mathcal{I})$ est une famille de parties connexes d'intersection non vide, alors leur union est connexe.

Démonstration. Soit $A := \cup_{i \in \mathcal{I}} A_i$. Soient U_1, U_2 deux ouverts tels que $U_1 \cap U_2 \cap A = \emptyset$ et $U_1 \cup U_2 \supset A$.

Soit $a \in \cap_{i \in \mathcal{I}} A_i$. Supposons (quitte à renuméroter) que $a \in U_1$. Alors pour tout $i \in \mathcal{I}$, $A_i \cap U_1 \neq \emptyset$ et donc $A_i \subset U_1$. \square

Si on dispose d'une suite $(A_n)_n$ de parties de X telle que $A_i \cap A_{i+1} \neq \emptyset$ pour tout $i \in \mathbb{N}$, on peut démontrer que $\cup_n A_n$ est connexe.

Dans un espace vectoriel X , on appelle *étoilé* tout sous-ensemble A possédant la propriété suivante : il existe $a \in A$ tel que pour tout $x \in A$, le segment $[a, x] := \{(1-t)a + tx, 0 \leq t \leq 1\}$ soit contenu dans A .

Si l'espace vectoriel X est muni d'une structure d'espace vectoriel normé (par exemple, $X = \mathbb{R}^n$ avec la distance euclidienne), tout segment est connexe comme image par une application continue de l'intervalle $[0, 1]$. D'après la proposition qui précède, toute partie étoilée est donc connexe. Cas particulier : une partie convexe est étoilée par rapport à n'importe quel de ses points, et est donc a fortiori connexe.

Remarquons que l'intersection de deux ensembles connexes n'est pas en général connexe ; considérez par exemple S^1 et \mathbb{R} dans \mathbb{C} . Dans le cas de $X = \mathbb{R}$, toutes les parties convexes sont des ensembles connexes, et comme l'intersection de deux convexes est convexe, leur intersection sera donc connexe.

Proposition 4.9. Si A est une partie connexe de X , alors son adhérence \bar{A} est connexe.

Démonstration. Soient U_1, U_2 deux ouverts de X tels que $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ et $\bar{A} \subset U_1 \cup U_2$. Supposons que $\bar{A} \cap U_1 \neq \emptyset$. Si il existe $a \in A \cap U_1$, alors comme A est connexe, $A \subset U_1$. Donc $A \subset X \setminus U_2$, qui est fermé, donc $\bar{A} \subset X \setminus U_2$, cqfd.

Si on a seulement $a \in \bar{A} \cap U_1$, alors comme U_1 est un voisinage de a , il existe $b \in A \cap U_1$, et on applique le raisonnement précédent. \square

La réciproque est évidemment fausse. Par exemple, dans \mathbb{R} , considérer \mathbb{Q} ou $[0, 1[\cup]1, 2]$.

De même que les terres émergées se répartissent en îles (et continents...), quand on se donne un point $a \in X$, on peut se demander s'il y a une plus grande partie connexe qui le contient. La Proposition 4.8 permet de répondre à la question : l'ensemble

$$\bigcup \{A \subset X : A \ni a, A \text{ est connexe} \}$$

est en effet connexe, et contient par construction toutes les parties connexes qui contiennent a . De plus, deux ensembles de ce type doivent être disjoints, car sinon leur union serait connexe et strictement plus grande que chacun d'entre eux.

Définition 4.10. On appelle *composante connexe* de X une partie connexe maximale pour l'inclusion.

Si X est connexe, il est sa seule composante connexe. Ce qui précède prouve le premier énoncé de la proposition suivante.

Proposition 4.11. Les composantes connexes forment une partition de X . Ce sont des fermés de X .

Démonstration. Soit A une composante connexe. D'après la Proposition 4.9, \bar{A} est connexe. Or $A \subset \bar{A}$, donc par maximalité, $A = \bar{A}$. \square

Les composantes connexes ne sont pas en général des ouverts de X : si on prend $X = \mathbb{Q}$, par exemple, ses composantes connexes sont réduites aux singletons (parce qu'il existe toujours un irrationnel entre deux rationnels distincts), mais ce ne sont pas des ouverts de \mathbb{Q} (tout voisinage d'un rationnel contient d'autres rationnels). Nous laissons la propriété suivante en exercice.

Proposition 4.12. On dit qu'un espace est *localement connexe* si tout voisinage d'un point $x \in X$ contient un voisinage connexe de x .

Les composantes connexes d'un espace localement connexe sont ouvertes (et fermées).

La réciproque est fautive : toutes les composantes connexes peuvent être ouvertes sans que l'espace soit localement connexe. En fait, même un espace connexe (qui n'a qu'une composante, nécessairement ouverte puisque égale à l'espace entier) n'est pas toujours localement connexe.

Exemple 4.13. Soit $X := ([0, 1] \times \{0\}) \cup ((\mathbb{Q} \cap [0, 1]) \times [0, 1])$. (On peut se le représenter comme un peigne inscrit dans le carré $[0, 1] \times [0, 1]$, qui se tient par le côté inférieur, et dont les dents verticales, infiniment serrées, pointent vers le haut).

X est connexe (car connexe par arcs, voir ci-dessous), mais aucun des points de $X \cap ([0, 1] \times]0, 1])$ ne possède de voisinage connexe.

Définition 4.14. On dit qu'un espace est *totalelement discontinu* si ses composantes connexes se réduisent toutes à des singletons.

Un corollaire immédiat est que toute application continue d'un connexe dans un espace totalement discontinu est constante, ce qui généralise la Proposition 4.7. En effet, un espace discret est totalement discontinu. La réciproque est fautive, exemple : \mathbb{Q} .

4.5. Ensemble de Cantor. L'ensemble de Cantor ternaire donne un exemple d'espace totalement discontinu, sans point isolé, qui est aussi un fermé borné de \mathbb{R} (et donc compact, comme on le verra plus bas). C'est un théorème que tout compact métrique, totalement discontinu, sans point isolé, est homéomorphe à l'ensemble de Cantor.

Nous allons donner une construction de l'ensemble de Cantor.

Considérons un multi-indice $\theta \in \{-1, +1\}^n$, $\theta := (\theta_1, \dots, \theta_n)$. La *longueur* du multi-indice est notée $|\theta| = n$. On notera \emptyset le multi-indice vide ($n = 0$) et on note $(\theta, 1) = (\theta_1, \dots, \theta_n, 1) \in \{-1, +1\}^{n+1}$ le multi-indice obtenu par concaténation (resp. $(\theta, -1) = (\theta_1, \dots, \theta_n, -1)$). Notons que l'ensemble \mathcal{M} de tous les multi-indices (de longueur finie) est dénombrable.

A chaque multi-indice on associe un intervalle fermé borné I_θ , défini récursivement par $I_\emptyset := [0, 1]$, et si $I_\theta = [a, b]$, alors $I_{(\theta, 1)} = [a + \frac{2}{3}(b - a), b]$ (le dernier tiers de I_θ), et $I_{(\theta, -1)} = [a, a + \frac{1}{3}(b - a)]$ (le premier tiers de I_θ). Une conséquence immédiate de ceci est que $\lambda_1(I_\theta) = 3^{-|\theta|}$ (où λ_1 représente la longueur usuelle sur \mathbb{R}).

Etant donnés deux intervalles I, J , nous dirons que $I < J$ si pour tout $x \in I$, $y \in J$, on a $x < y$. Il est clair que $I_{(\theta, -1)} < I_{(\theta, 1)}$, et que si $\theta = (\alpha, \beta)$ (obtenu par concaténation de deux multi-indices), alors $I_\theta \subset I_\alpha$. Donc, étant donnés deux intervalles I_α, I_β , soit l'un est inclus dans l'autre, soit ils sont disjoints et ordonnés suivant l'ordre lexicographique sur leurs multi-indices.

On pose $J_n = \bigcup_{\theta \in \mathcal{M}, |\theta|=n} I_\theta$. C'est un ensemble fermé, qui a 2^n composantes connexes. L'*ensemble de Cantor* est défini par $\mathcal{C} := \bigcap_n J_n$; il est clairement fermé.

Pour toute suite (infinie) $x := (x_j)_{j \in \mathbb{N}^*} \in \{-1, +1\}^{\mathbb{N}^*}$, on pose $(x)_n := (x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{M}$. On associe à x le nombre réel $\hat{x} \in \mathcal{C}$ qui est l'unique élément de $\bigcap_n I_{(x)_n}$. (Ceci demande une démonstration : il y a un élément dans l'intersection, et seulement un, parce que les suites $(\min I_{(x)_n})_n$ et $(\max I_{(x)_n})_n$ sont adjacentes). Si $x < x'$ dans

l'ordre lexicographique, il existe n tel que $(x)_n < (x')_n$ dans le même sens, et donc $I_{(x)_n} < I_{(x')_n}$, ce qui implique $\hat{x} < \hat{x}'$. On a ainsi obtenu une injection de $\{-1, +1\}^{\mathbb{N}^*}$, qui n'est pas dénombrable (par l'argument diagonal de Cantor), dans \mathcal{C} . De plus, on voit qu'un intervalle ouvert inclus dans le complémentaire de \mathcal{C} est situé entre x et x' : ils n'appartiennent donc pas à la même composante connexe.

L'application $x \mapsto \hat{x}$ est en fait une bijection : étant donné $t \in \mathcal{C}$, pour tout n , $t \in J_n$ et on définit x en prenant l'unique multi-indice $(x)_n$ tel que $t \in I_{(x)_n}$. On vérifie que ces choix sont compatibles et donnent un $x \in \{-1, +1\}^{\mathbb{N}^*}$, et que $\hat{x} = t$. Par conséquent, deux points différents de \mathcal{C} ne sont jamais dans une même composante connexe.

Du point de vue du développements des réels en base 3, on a $\hat{x} = \sum_n \frac{1+x_n}{3^n}$. Quand tous les x_n sont égaux à 1 à partir d'un certain rang, ce développement est impropre.

Enfinement, aucun point de \mathcal{C} n'est isolé. En effet, si deux suites x et x' vérifient $(x)_n = (x')_n$, alors $|\hat{x} - \hat{x}'| \leq \lambda_1(I_{(x)_n}) = 3^{-n}$. Étant donné $\hat{x} \in \mathcal{C}$, si on pose $x^{(n)}$ la suite telle que $x_j^{(n)} = x_j$, $j \neq n$, et $x_n^{(n)} \neq x_n$ (il n'y a que deux valeurs possibles !). Alors $\hat{x}^{(n)}$ fournit une suite de points de \mathcal{C} , différents de t , qui tendent vers t .

Du point de vue de la théorie de la mesure, comme $\lambda_1(J_n) = (2/3)^n$, on voit que $\lambda_1(\mathcal{C}) = 0$. Si on construit une suite de mesures de probabilité μ_n , uniformes sur J_n , leur limite est une mesure de probabilité singulière par rapport à la mesure de Lebesgue, dont le support est \mathcal{C} , et qui n'a aucun atome. Sa fonction de répartition est une fonction continue, non absolument continue.

On peut obtenir des exemples d'ensembles homéomorphes en reprenant la construction avec $I_{(\theta,1)} = [\frac{a+b}{2} + \varepsilon_n \frac{b-a}{2}, b]$, et $I_{(\theta,-1)} = [a, \frac{a+b}{2} - \varepsilon_n \frac{b-a}{2}]$. L'intersection sera de mesure positive si et seulement si $\sum_n \varepsilon_n < \infty$ (dans l'exemple standard de l'ensemble ternaire, $\varepsilon_n = \frac{1}{6}$ pour tout n). Bref, "ça dépend de la grosseur des tiers".

4.6. Connexité par arcs.

Définition 4.15. On appelle *arc* d'un espace X une application continue de $[0, 1]$ (muni de la topologie usuelle) dans X . Le point $f(0)$ est parfois appelé *origine* de l'arc, et $f(1)$ son *extrémité*. Si $f(0) = f(1)$, on parle parfois de *lacet*.

L'ensemble $f([0, 1])$ est appelé *image* ou *support* de l'arc, et ne doit pas être confondu avec lui (même si on a tendance à le faire).

Il est très souvent utile de changer la paramétrisation de l'arc, c'est-à-dire de remplacer f par $f \circ \varphi$, où φ est une bijection continue (donc monotone) d'un intervalle dans $[0, 1]$. C'est ainsi qu'on prouve les propriétés suivantes (laissé au lecteur).

Proposition 4.16. S'il existe un arc f tel que $f(0) = a$ et $f(1) = b$, alors il existe un arc g de même support tel que $g(0) = b$ et $g(1) = a$.

S'il existe un arc f tel que $f(0) = a$ et $f(1) = b$, et un arc g tel que $g(0) = b$ et $g(1) = c$, il existe un arc h tel que $h(0) = a$ et $h(1) = c$ et le support de h est l'union des supports de f et g .

Dans un espace vectoriel topologique, un segment est un cas particulier d'arc. Un exemple un peu plus compliqué est un chemin polygonal. Dans ce cas, il existe une subdivision de $[0, 1]$, $0 = a_0 < a_1 < \dots < a_N = 1$, tel que f soit continue et $f|_{[a_i, a_{i+1}]}$ soit une application affine pour $0 \leq i \leq N - 1$, autrement dit $t \mapsto f|_{[a_i, a_{i+1}]}(a_i + (a_{i+1} - a_i)t)$ définit un segment.

Définition 4.17. Un sous-ensemble $A \subset X$ est dit *connexe par arcs* si, étant donnés $a, b \in A$, il existe un arc f tel que $f(0) = a$, $f(1) = b$, et $f([0, 1]) \subset A$.

Proposition 4.18. Toute partie connexe par arcs est connexe.

Démonstration. Fixons $a \in A$, et notons f_b un arc comme dans la définition 4.17. Alors $f_b([0, 1])$ est connexe par le Théorème 4.5. La définition 4.17 implique que $A = \cup_{b \in A} f_b([0, 1])$, qui est connexe par la Proposition 4.8 puisque $a \in \cap_{b \in A} f_b([0, 1])$. \square

Proposition 4.19. Tout ouvert connexe d'un espace vectoriel est connexe par arc (et les arcs peuvent être définis par des chemins polygonaux).

Démonstration laissée au lecteur.

Il existe des connexes qui ne sont pas connexes par arcs.

Exemple 4.20. Dans \mathbb{R}^2 , on considère le graphe de la fonction $\sin(1/x)$, plus précisément

$$A := \{(t, \sin \frac{1}{t}) : t > 0\}.$$

Alors A est connexe par arcs, donc $\bar{A} = A \cup (\{0\} \times [-1, 1])$ est connexe. Mais \bar{A} n'est pas connexe par arcs.

On peut étudier les composantes connexes par arcs de certains espaces de lacets (on parle d'*homotopie*), ce qui conduit à la notion de groupe fondamental d'un espace. C'est le début de la topologie algébrique, et nous n'aborderons pas ce sujet (dont vous aurez un aperçu dans votre cours sur les fonctions holomorphes).

5. COMPACTITÉ

Les espaces compacts ont de nombreuses propriétés agréables : quand ils sont des sous-espaces d'espaces séparés, ils sont toujours fermés (en général, le fait qu'un sous-ensemble soit fermé ne dépend pas seulement de sa propre topologie, mais de l'espace ambiant), et ils se comportent à plusieurs points de vue comme des ensembles finis.

5.1. Propriété de Borel-Lebesgue.

Définition 5.1. Un sous-ensemble $A \subset X$ est dit *compact* si la topologie induite sur A par celle de X est séparée, et si de tout recouvrement de A par des ouverts, on peut extraire un recouvrement fini, c'est-à-dire que si il existe une famille d'ouverts de X , $(U_i, i \in \mathcal{I})$ telle que $A \subset \cup_{i \in \mathcal{I}} U_i$, alors il existe un sous-ensemble fini d'indices $\{i_1, \dots, i_N\} \subset \mathcal{I}$ tel que $A \subset \cup_{1 \leq k \leq N} U_{i_k}$.

Une conséquence immédiate de la définition, en passant aux complémentaires, est que si $(F_i, i \in \mathcal{I})$ est une famille de fermés de X telle que $A \cap \bigcap_{i \in \mathcal{I}} F_i = \emptyset$, alors il existe une sous-famille finie telle que $A \cap \bigcap_{1 \leq k \leq N} F_{i_k} = \emptyset$. Dans le cas particulier où l'ensemble d'indices est \mathbb{N} et où la famille correspondante de fermés de A est décroissante ($A \cap F_i \supset A \cap F_{i+1}$), on a un corollaire souvent utile : si une suite décroissante de fermés d'un compact est d'intersection vide, alors ces fermés doivent être vides à partir d'un certain rang.

Un sous-ensemble fini est compact si et seulement si il est séparé. En particulier, tout sous-ensemble fini d'un espace métrique est compact. Bien entendu, la définition

s'applique aussi au cas où $A = X$ l'espace entier, et on dit alors qu'on a affaire à un espace compact.

Théorème 5.2. *Si f est continue de X dans Y , que Y est séparé, et que $A \subset X$ est compact, alors $f(A)$ est compact.*

Démonstration. L'hypothèse implique immédiatement que $f(A)$ est séparé. Soit $(U_i, i \in \mathcal{I})$ une famille d'ouverts de Y qui recouvrent A . Alors $(f^{-1}(U_i), i \in \mathcal{I})$ est un recouvrement ouvert de A . Soit $(f^{-1}(U_{i_k}), 1 \leq k \leq N)$ un sous-recouvrement fini ; alors $f(A) \subset \cup_{1 \leq k \leq N} U_{i_k}$. \square

Proposition 5.3. Si $A \subset X$, A compact et X est séparé, alors A est fermé dans X .

Démonstration. Soit $x \in X \setminus A$. Comme X est séparé, pour tout $a \in A$, il existe des ouverts $U_a \ni a$ et $V_a \ni x$ tels que $U_a \cap V_a = \emptyset$. La famille U_a recouvre A , donc il existe $a_i, 1 \leq i \leq N$ tels que $A \subset \bigcup_{i=1}^N U_{a_i}$. Alors $V := \bigcap_{i=1}^N V_{a_i}$ est un voisinage de x qui ne rencontre pas A .

Nous donnons une autre démonstration dans le cas d'un espace métrique à titre de gymnastique mentale.

Supposons que $x \in X$. Considérons les ensembles $U_n := X \setminus BF(x, \frac{1}{n}) = \{y \in X : d(x, y) > \frac{1}{n}\}$. Ce sont des ouverts. Si $x \notin A$, alors $A \subset X \setminus \{x\} = \cup_{n \in \mathbb{N}^*} U_n$. On peut extraire un sous-recouvrement fini $(U_{n_k}, 1 \leq k \leq N)$, dont l'union est égale à U_M avec $M := \max_{1 \leq k \leq N} n_k$. Donc $B(x, \frac{1}{N}) \cap A = \emptyset$ et $x \notin \bar{A}$. Donc A est fermé. \square

On peut fabriquer de nouveaux compacts en prenant des sous-ensembles fermés.

Proposition 5.4. Si X est compact et $A \subset X$ est fermé dans X , alors A est compact.

Démonstration. Si $(U_i, i \in \mathcal{I})$ une famille d'ouverts de X qui recouvrent A , alors on obtient un recouvrement de X tout entier en y ajoutant l'unique ouvert $X \setminus A$. On a donc un sous-recouvrement fini de X , qui fournit un sous-recouvrement fini de A . \square

Il est aussi facile de voir que l'union d'une famille finie de compacts est compacte. Un produit (quelconque) de compacts est compact. C'est le Théorème de Tychonoff, que nous ne démontrerons que dans un cas particulier, la Proposition 5.14.

Les Propositions 5.3 et 5.4 ont une conséquence importante.

Proposition 5.5. Soient X un espace compact et φ une bijection continue de X dans Y un espace séparé. Alors φ est un homéomorphisme.

Démonstration. Comme φ est une bijection continue, elle sera un homéomorphisme si et seulement si elle est ouverte. Comme c'est une bijection, $Y \setminus \varphi(U) = \varphi(X \setminus U)$, il suffit donc de voir que l'image de tout fermé est fermée.

Or d'après la Proposition 5.4, si $A \subset X$ est fermé, il est compact, donc $\varphi(A)$ est compact, donc fermé d'après la Proposition 5.3. \square

5.2. Propriété de Bolzano-Weierstrass.

Théorème 5.6. *Toute suite contenue dans un compact A admet au moins une valeur d'adhérence dans A .*

Cette propriété, dite de Bolzano-Weierstrass, ou compacité séquentielle, est à mettre en parallèle avec les propriétés des fermés : si on a une suite convergente dans un fermé, la limite appartient au fermé. Ce qui est nouveau ici, c'est que la compacité permet d'affirmer l'existence d'une limite, pour une suite extraite.

Démonstration. D'après la Proposition 2.7, il faut démontrer que $\bigcap_{p \in \mathbb{N}} \overline{\{x_n, n > p\}} \neq \emptyset$. Or $(\overline{\{x_n, n > p\}})_p$ est une suite décroissante de fermés, qui ne sont jamais vides, donc leur intersection n'est pas vide (d'après le corollaire de la Définition 5.1). \square

Dans le cas des espaces métriques, la réciproque est vraie :

Théorème 5.7. *Si X est un espace métrique qui vérifie la propriété de Bolzano-Weierstrass, alors X est compact.*

Démonstration. Nous allons donner une conséquence de l'hypothèse qui est aussi une propriété importante des compacts.

Lemme 5.8. Si X est un espace métrique qui vérifie la propriété de Bolzano-Weierstrass, et si $(U_i, i \in \mathcal{I})$ est un recouvrement ouvert de X , alors il existe un nombre $r > 0$ tel que pour tout $x \in X$, il existe $i \in \mathcal{I}$ tel que $B(x, r) \subset U_i$.

Le nombre r est appelé *nombre de Lebesgue* du recouvrement.

Démonstration. Raisonnons par l'absurde. Si la conclusion est fautive, alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ il existe x_n tel que $B(x_n, \frac{1}{n}) \not\subset U_i$, pour tout $i \in \mathcal{I}$. Soit x une valeur d'adhérence de cette suite, et i_0 tel que $x \in U_{i_0}$. Alors il existe $r_0 > 0$ tel que $B(x, r_0) \subset U_{i_0}$. Mais comme x est une valeur d'adhérence, il existe $n > 2/r_0$ tel que $d(x, x_n) < r_0/2$. Alors

$$B(x_n, \frac{1}{n}) \subset B(x_n, r_0/2) \subset B(x, r_0) \subset U_{i_0},$$

ce qui contredit la construction de $(x_n)_n$. \square

La propriété suivante est un cas particulier de la propriété de Borel Lebesgue, que nous cherchons à démontrer : celui où le recouvrement ouvert est donné par toutes les boules $B(x, r)$, $x \in X$.

Lemme 5.9. Si X est un espace métrique qui vérifie la propriété de Bolzano-Weierstrass, pour tout $r > 0$, il existe un sous-ensemble fini $\{x_k, 1 \leq k \leq N\}$ de X tel que $X \subset \bigcup_{1 \leq k \leq N} B(x_k, r)$.

Démonstration. On choisit $x_1 \in X$, et on construit récursivement une suite (finie ou infinie) $(x_n)_n$ de la façon suivante : si $X \subset \bigcup_{1 \leq k \leq n} B(x_k, r)$, on s'arrête ; sinon, on choisit $x_{n+1} \in X \setminus \bigcup_{1 \leq k \leq n} B(x_k, r)$. On a toujours $d(x_n, x_m) \geq r > 0$ pour $n \neq m$, donc si la suite était infinie elle ne pourrait avoir aucune sous-suite convergente. Donc le processus s'arrête à un certain rang. \square

Pour finir la démonstration du théorème, prenons un recouvrement ouvert (U_i) de X . Soit r_0 son nombre de Lebesgue. Alors X est recouvert par $(B(x_k, r_0), 1 \leq k \leq N)$ d'après le lemme 5.9. Pour chaque k , il existe i_k tel que $B(x_k, r_0) \subset U_{i_k}$, donc $X \subset \bigcup_{1 \leq k \leq N} U_{i_k}$. \square

5.3. Fermés bornés dans \mathbb{R}^n . Nous allons donner une famille très importante d'exemples de compacts. Une propriété facile pour commencer.

Définition 5.10. Un sous-ensemble A d'un espace métrique X est dit *borné* si il existe $x \in X$ et $r > 0$ tels que $A \subset B(x, r)$.

Proposition 5.11. Si A est compact, A est borné.

Démonstration. Pour un x donné, considérons le recouvrement ouvert $(B(x, n), n \in \mathbb{N}^*)$. En prenant un sous-recouvrement fini de A , on voit que $A \subset B(x, M)$, où M est le plus grand des indices intervenant dans le sous-recouvrement fini. \square

Tout compact d'un espace métrique est donc fermé et borné. Nous admettons que nous avons construit les nombres réels (par exemple à l'aide des coupures de Dedekind, cf. section suivante) d'une façon qui permette d'affirmer que tout sous-ensemble non-vide majoré de \mathbb{R} admet une borne supérieure. On a alors :

Proposition 5.12. Une application continue f d'un compact A (dans un espace topologique quelconque) dans \mathbb{R} est bornée et atteint ses bornes.

Démonstration. $f(A)$ est un compact de \mathbb{R} . Il est borné donc il admet une borne supérieure S et une borne inférieure s . Il est fermé donc $S, s \in A$ (on peut aussi arguer directement que si $S \notin A$, alors $(] - \infty, S - \frac{1}{n}[, n \in \mathbb{N}^*)$ fournirait un recouvrement ouvert dont on ne pourrait extraire aucun sous-recouvrement fini). \square

Proposition 5.13. Si A est fermé et borné dans \mathbb{R} , alors A est compact.

Démonstration. Comme un sous-ensemble fermé d'un compact est compact, il suffit de montrer que tout intervalle fermé borné $[a, b]$ est compact. Étant donné un intervalle $I := [x, y]$, on définit $I_- := [x, \frac{x+y}{2}]$, $I_+ := [\frac{x+y}{2}, y]$.

Soit $(x_n)_n \subset [a, b]$. On va définir une suite d'intervalles $(I_n)_n$ et une fonction strictement croissante φ de \mathbb{N} dans \mathbb{N} de la façon suivante : $I_0 := [a, b]$, $\varphi(0) = 0$; I_n étant défini, si l'ensemble $(I_n)_- \cap \{x_k, k > \varphi(n)\}$ est fini, on pose $I_{n+1} := (I_n)_+$, sinon on pose $I_{n+1} := (I_n)_-$. Dans les deux cas, l'ensemble $I_{n+1} \cap \{x_k, k > \varphi(n)\}$ est infini, et on pose $\varphi(n+1) := \min\{k > \varphi(n) : x_k \in I_{n+1}\}$.

On obtient ainsi des intervalles I_n de longueur égale à $2^{-n}(b-a)$, tels que $I_{n+1} \subset I_n$, et une sous-suite $(x_{\varphi(n)})_n$ telle que $x_{\varphi(k)} \in I_n$, pour tout $k \geq n$. Si on pose $I_n := [a_n, b_n]$, les suites $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ sont adjacentes, et $(x_{\varphi(n)})_n$ converge vers leur limite commune (qui existe d'après la propriété de la borne supérieure). \square

Remarque : on aurait pu aussi démontrer que toute suite réelle admet une sous-suite monotone (indication : considérer l'ensemble $A := \{n : \forall k \geq n, u_k \leq u_n\}$; si A est infini, $(u_n, n \in A)$ forme une sous-suite décroissante, sinon on peut extraire une sous-suite croissante de $(u_n, n > \max A)$) ; et appliquer le théorème sur les suites croissantes majorées (ou décroissantes minorées).

Proposition 5.14. Si X et Y sont des espaces métriques compacts, alors $X \times Y$ est compact.

Par récurrence, le résultat s'étend à un nombre fini quelconque de facteurs.

Démonstration. Nous allons vérifier la propriété de Bolzano-Weierstrass. Considérons une suite $(x_n, y_n)_n \subset X \times Y$. On sait qu'il y a une sous-suite $(x_{\varphi(n)})_n$ qui converge dans X . Or la suite $(y_{\varphi(n)})_n$ aura une sous-suite $(y_{\varphi \circ \psi(n)})_n$ qui convergera dans Y . Finalement, la suite $(x_{\varphi \circ \psi(n)}, y_{\varphi \circ \psi(n)})_n$ converge dans $X \times Y$. \square

Un corollaire immédiat est que dans \mathbb{R}^n , les fermés bornés sont compacts (car fermés et contenus dans des pavés fermés, qui sont compacts par le résultat ci-dessus). Nous verrons plus bas que parmi les espaces vectoriels normés sur \mathbb{R} , seuls ceux de dimension finie ont cette propriété.

5.4. Théorème de Heine.

Théorème 5.15. *Soient X et Y deux espaces métriques et f une application continue de X dans Y . Si X est compact, f est uniformément continue.*

Cette propriété permet de produire beaucoup de fonctions uniformément continues, ce qui simplifie de nombreuses démonstrations (définition de l'intégrale de Riemann, résultats d'approximation...)

Démonstration. Supposons que f ne soit pas uniformément continue : il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que, pour aucun $\delta > 0$, $d_X(x, t) < \delta$ n'entraîne $d_Y(f(x), f(t)) < \varepsilon_0$. Autrement dit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $x_n, t_n \in X$ tels que $d_X(x_n, t_n) < \frac{1}{n}$ et $d_Y(f(x_n), f(t_n)) \geq \varepsilon_0$. Remplaçons $(x_n)_n$ par une sous-suite convergente $(x_{\varphi(n)})_n$, soit x sa limite. La distance entre les deux suites tend vers 0, donc on aura aussi $\lim_{n \rightarrow \infty} t_{\varphi(n)} = x$.

L'application f est continue en x , donc il existe δ_0 tel que si $d_X(x, x') \leq \delta_0$ et $d_X(x, x'') \leq \delta_0$, alors $d_Y(f(x'), f(x'')) < \varepsilon_0$. Pour n suffisamment grand, on peut appliquer ceci à $x' = x_{\varphi(n)}$ et $x'' = t_{\varphi(n)}$, ce qui donne une contradiction. \square

6. UNE CONSTRUCTION DE \mathbb{R}

Vous trouverez peut-être étrange qu'après avoir abondamment utilisé les nombres réels (par exemple dans la définition même d'une distance), nous ne les définissons que maintenant. Mais quiconque a vu un film de Tarantino saura que la meilleure façon de raconter une histoire n'est pas toujours de commencer par le début, et nous ne voudrions pas, par souci de logique, nous trouver contraints de définir le nombre 1 à la fin du tome 2 (selon une moquerie célèbre adressée, dit-on, à Bertrand Russell).

Il est bon d'avoir vu, une fois dans sa vie, une construction rigoureuse des nombres réels à partir des propriétés connues des ensembles de nombres plus "élémentaires" (entiers, nombres relatifs). On pourrait construire \mathbb{R} comme le complété des rationnels (en considérant une relation d'équivalence sur l'ensemble des suites de Cauchy à termes rationnels, cf. section suivante) mais il faudrait pour cela s'imaginer avoir bâti la théorie des espaces métriques en ne faisant appel qu'aux rationnels. Je préfère m'appuyer seulement sur la notion de corps ordonné (c'est-à-dire un corps muni d'une relation d'ordre compatible avec les opérations), et montrer qu'on peut plonger \mathbb{Q} dans un corps ordonné qui vérifie la propriété de la borne supérieure : tout sous-ensemble non vide, majoré admet une borne supérieure.

Définition 6.1. Un corps K est dit *ordonné* s'il est muni d'une relation d'ordre total " \leq " (et de la relation associée $x < y$, qui signifie $x \leq y$ et $x \neq y$) telle que :

- (1) Si $x, y, z \in K$ et $x \leq y$, alors $x + z \leq y + z$;

(2) Si $x, y, z \in K$, $0 < z$ et $x \leq y$, alors $zx \leq zy$.

Une conséquence est que si $x \leq y$, alors $x - (x + y) \leq y - (x + y)$, et donc $-y \leq -x$: on retrouve l'inversion des inégalités quand on multiplie par un nombre négatif, et en particulier, pour tout $x \in K$, $0 \leq x^2$.

On voit facilement que \mathbb{Q} est un corps ordonné.

La présentation qui suit de la construction de \mathbb{R} est tirée du livre de Walter Rudin, *Principes d'Analyse Mathématique*.

Définition 6.2. Une partie $\alpha \subset \mathbb{Q}$ est une *coupure* si et seulement si :

- (1) $\alpha \neq \emptyset, \mathbb{Q}$;
- (2) $\forall x \in \alpha, \forall y \in \mathbb{Q}$ t.q. $y < x$, alors $y \in \alpha$;
- (3) $\forall x \in \alpha, \exists y \in \alpha$ t.q. $x < y$.

L'exemple fondamental est, pour $q \in \mathbb{Q}$, l'ensemble $q^* := \mathbb{Q} \cap]-\infty, q[$. Mais l'ensemble $\{x \in \mathbb{Q} : x \leq 0 \text{ ou } x^2 \leq 2\}$ est aussi une coupure, ce qu'on vérifie en utilisant le fait que $x^2 \neq 2$, pour tout x rationnel. Intuitivement, les coupures sont les ensembles $\mathbb{Q} \cap]-\infty, x[$ pour $x \in \mathbb{R}$ (mais nous sommes en train de construire \mathbb{R}).

L'ensemble de toutes les coupures est appelé \mathbb{R} . On le munit de la relation d'ordre donnée par l'inclusion ($\alpha \leq \beta$ signifie $\alpha \subset \beta$). La propriété (2) permet de voir que l'ordre est total. On vérifie que $q \mapsto q^*$ est une injection strictement croissante de \mathbb{Q} dans \mathbb{R} .

Si \mathcal{F} est un sous-ensemble non vide de \mathbb{R} , tel qu'il existe une coupure β vérifiant $\alpha \subset \beta$, pour tout $\alpha \in \mathcal{F}$, alors on a $\sup \mathcal{F} = \sigma := \bigcup_{\alpha \in \mathcal{F}} \alpha$. C'est bien la borne supérieure au sens de l'inclusion des parties de \mathbb{Q} , donc ce sera la borne supérieure au sens de la relation d'ordre sur \mathbb{R} , à condition que ce soit une coupure.

Or $\sigma \subset \beta \neq \mathbb{Q}$, donc $\sigma \neq \mathbb{Q}$, et il existe $\alpha \in \mathcal{F}$, donc $\emptyset \neq \alpha \subset \sigma$. Pour la condition (2), si $x \in \sigma$, il existe α tel que $x \in \alpha$, donc si $y < x$, alors $y \in \alpha \subset \sigma$. Enfin pour (3), de la même façon il existe $y \in \alpha \subset \sigma$ tel que $x < y$.

Il faut maintenant munir \mathbb{R} d'opérations de corps (c'est plus fastidieux).

Étant données deux coupures α, β , on définit

$$\alpha + \beta := \{x + y : x \in \alpha, y \in \beta\}.$$

Il faut vérifier que c'est encore une coupure : par exemple, si $r < x + y$ avec $x \in \alpha, y \in \beta$, alors $r = (r - y) + y$ et $r - y < x$ implique que $r - y \in \alpha$, donc $r \in \alpha + \beta$. Les autres propriétés d'une coupure se vérifient sans plus de difficulté.

La commutativité et l'associativité de l'addition se déduisent des propriétés correspondantes pour l'addition des rationnels. L'addition admet 0^* pour élément neutre. En effet si $z \in \alpha + 0^* z = x + y$ avec $x \in \alpha$ et $y < 0$, donc $z < x$ donc $z \in \alpha : \alpha + 0^* \leq \alpha$. Réciproquement, si $x \in \alpha$, il existe $y \in \alpha, y > x$, donc $x = y + (x - y) \in \alpha + 0^*$, d'où $\alpha \leq \alpha + 0^*$, et on a $\alpha = \alpha + 0^*$.

L'inverse pour l'addition est plus délicat à définir. On pose

$$-\alpha := \{x \in \mathbb{Q} : \exists y \notin \alpha, x < -y\}.$$

C'est une coupure (laissé au lecteur). Si $x' \in \alpha$ et $x \in -\alpha$, alors $x' + x < x' - y < 0$ car $x' \in \alpha, y \notin \alpha$, donc $\alpha + (-\alpha) \leq 0^*$. Réciproquement si $u < 0$, on pose

$$n + 1 := \min \left\{ m : -m \frac{u}{2} \notin \alpha \right\}.$$

Alors $u = -n\frac{u}{2} + (n+2)\frac{u}{2}$, $-n\frac{u}{2} \in \alpha$ et comme $(n+2)\frac{u}{2} < -(-(n+1)\frac{u}{2})$, $(n+2)\frac{u}{2} \in -\alpha$ et $u \in \alpha + (-\alpha)$, donc $0^* \leq \alpha + (-\alpha)$.

Si $0^* \leq \alpha$, tous les $y \notin \alpha$ sont positifs, et donc $x \in -\alpha$ implique que $x < 0$ et donc $-\alpha \leq 0^*$.

Plus généralement, si $\beta \leq \gamma$, et α est une autre coupure, alors l'inclusion $\alpha + \beta \subset \alpha + \gamma$ est immédiate, donc on a bien $\alpha + \beta \leq \alpha + \gamma$.

La multiplication se définit de façon analogue dans le cas des coupures (strictement) positives. Si $\alpha, \beta > 0^*$, on pose

$$\alpha\beta := \{xy : x \in \alpha, y \in \beta\} \cup (\mathbb{Q} \cap]-\infty, 0[).$$

On montre facilement l'associativité et la distributivité.

On peut montrer, comme avant, que 1^* est l'élément neutre et que

$$\alpha^{-1} := \left\{ x : \exists y \notin \alpha, x < \frac{1}{y} \right\} \cup (\mathbb{Q} \cap]-\infty, 0[)$$

est un inverse pour la multiplication (toujours pour les coupures positives).

Il faut étendre cette définition aux coupures de signe quelconque en appliquant la règle des signes : si $\alpha \geq 0^*$ et $\beta \leq 0^*$, $\alpha\beta := -(\alpha(-\beta))$, et ainsi de suite. Il faut vérifier les propriétés de corps dans ces cas-là (long mais pas difficile). Par exemple, si on veut vérifier que $\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$ dans le cas où $\alpha \geq 0^*$, $\beta \leq 0^*$, $\beta + \gamma \geq 0^*$, et donc $\gamma \geq 0^*$, (ce qui est un des cas les plus compliqués), comme $-\beta \geq 0^*$ et $\beta + \gamma \geq 0^*$,

$$\alpha\gamma = \alpha((-\beta) + (\beta + \gamma)) = \alpha(-\beta) + \alpha(\beta + \gamma)$$

et donc $\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\gamma - (\alpha(-\beta)) = \alpha\gamma + \alpha\beta$ par la définition du produit.

Par conséquent, si $\beta \leq \gamma$ et $\alpha \geq 0^*$, on aura que $\alpha(\gamma - \beta) \geq 0^*$ et par distributivité, $\alpha\gamma \geq \alpha\beta$: la relation d'ordre est compatible avec la multiplication.

Enfin, il faut vérifier que le plongement de \mathbb{Q} dans \mathbb{R} respecte les opérations d'addition et de multiplication, ce qui ne pose pas de problème.

7. ESPACES COMPLETS

7.1. Suites de Cauchy. La définition de la limite présente un inconvénient : pour l'appliquer, il faut connaître la valeur de la limite. Or on a souvent des suites qui doivent être convergentes (par exemple, dans \mathbb{R} , croissantes et majorées) et dont on ne connaît pas la limite. Voici une façon de formaliser cette situation.

Définition 7.1. Une suite $(x_n)_n$ d'un espace métrique X est dite *suite de Cauchy* si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que si $p, q \geq N$, alors $d(x_p, x_q) < \varepsilon$.

Une application facile de l'inégalité triangulaire montre que toute suite convergente est de Cauchy. Il est aussi immédiat que toute suite de Cauchy est bornée.

Exemple 7.2. Si on prend $X = \mathbb{Q}$, la suite $u_n := \sum_1^n \frac{1}{k!}$ est de Cauchy, mais n'est pas convergente.

Lemme 7.3. Toute suite de Cauchy qui possède une valeur d'adhérence est convergente.

Définition 7.4. Un espace métrique X est dit *complet* si toute suite de Cauchy est convergente.

Cette définition dépend de la distance choisie ; ce n'est pas un invariant topologique. Par exemple, nous allons voir que \mathbb{R} muni de sa distance usuelle est complet. Par contre, \mathbb{R} muni de la distance d_b définie dans l'Exemple 3.14 n'est pas complet : la suite $x_n = n$ est de Cauchy (pour la distance d_b !) mais pas convergente.

Proposition 7.5. (1) Tout espace métrique compact est complet.
 (2) Les espaces \mathbb{R}^n sont complets, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
 (3) Tout fermé d'un espace complet est complet.

Démonstration. Le point (1) est une conséquence immédiate de la propriété de Bolzano-Weierstrass et du Lemme 7.3. Pour le point (2), on se ramène à (1) en remarquant qu'une suite de Cauchy est bornée, donc contenue dans un compact de \mathbb{R}^n . Pour le point (3), une suite de Cauchy de $F \subset X$ est de Cauchy dans X , donc a une limite dans X , qui doit appartenir à l'adhérence de F , donc à F puisque F est fermé. \square

De nombreux espaces "héritent" leur complétude de celle de \mathbb{R} .

Exemple 7.6. (1) Soit $X = \mathcal{C}^0([0, 1])$. On reprend les notations et définitions de l'Exemple 3.3 (5). Alors (X, d_∞) est complet, mais ni (X, d_1) ni (X, d_2) ne sont complets. Un exemple de suite de Cauchy non-convergente (pour les deux distances) est donnée par $f_n(t) := \ln n$ pour $0 \leq t \leq \frac{1}{n}$, $f_n(t) := \ln \frac{1}{t}$ pour $\frac{1}{n} \leq t \leq 1$.
 (2) Soit $X := L^1(0, 1)$ (l'espace de Lebesgue des (classes de) fonctions absolument intégrables sur $(0, 1)$, voir votre cours de théorie de l'intégration). Alors (X, d_1) est complet. $\mathcal{C}^0([0, 1])$ est un sous-ensemble dense de (X, d_1) .

7.2. Prolongement d'applications continues.

Lemme 7.7. Soient X et Y des espaces métriques. Soit $(x_n)_n$ une suite de Cauchy dans X et f une application uniformément continue de X dans Y . Alors $(f(x_n))_n$ est une suite de Cauchy de Y .

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $\delta > 0$ tel que si $d_X(x', x'') < \delta$, alors $d_Y(f(x'), f(x'')) < \varepsilon$. Prenons $N \in \mathbb{N}$ tel que si $p, q \geq N$, alors $d_X(x_p, x_q) < \delta$. Alors $d_Y(f(x_p), f(x_q)) < \varepsilon$. \square

Soit $A \subset X$. On appelle *prolongement* à X d'une application $f : A \rightarrow Y$ une application $\tilde{f} : X \rightarrow Y$ telle que $\tilde{f}|_A = f$.

Proposition 7.8. Soient X et Y des espaces métriques et $A \subset X$ une partie dense.

Soit f une application continue de A dans Y . Si \tilde{f} et \tilde{g} sont deux prolongements continus de f , alors $\tilde{f} = \tilde{g}$.

Si de plus Y est complet et f est uniformément continue, alors il existe un unique prolongement continu de f à X , qui est uniformément continu.

Démonstration. Pour tout $x \in X$, il existe une suite $(a_n)_n \subset A$ telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = x$, donc $\tilde{f}(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{f}(a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{g}(a_n) = \tilde{g}(x)$.

Pour construire un prolongement, pour $x \in X$, on prend une suite $(a_n)_n \subset A$ telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = x$. Alors d'après le Lemme 7.7, $(f(a_n))_n$ est une suite de Cauchy,

convergente puisque Y est complet. On pose $\tilde{f}(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n)$. Si $x \in A$, la continuité de f sur A et le Théorème 3.10 impliquent que $\tilde{f}(x) = f(x)$, on a donc un prolongement.

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $\delta > 0$ tel que si $x', x'' \in A$, $d_X(x', x'') < 2\delta$, alors $d_Y(f(x'), f(x'')) < \varepsilon/2$. Supposons que $z', z'' \in X$ avec $d_X(z', z'') < \delta$. D'après la définition de \tilde{f} , si on prend les suites $(a'_n)_n, (a''_n)_n$ utilisées pour définir $\tilde{f}(z')$ et $\tilde{f}(z'')$ respectivement, il existe N', N'' tels que pour $n \geq N'$, $d_Y(f(a'_n), \tilde{f}(z')) < \varepsilon/4$, et pour $n \geq N''$, $d_Y(f(a''_n), \tilde{f}(z'')) < \varepsilon/4$. Or le choix de δ implique que (en prenant $x' = a'_n, x'' = a''_n, n \geq \max(N', N'')$)

$$d_Y(\tilde{f}(z'), \tilde{f}(z'')) \leq d_Y(\tilde{f}(z'), f(a'_n)) + d_Y(f(a'_n), f(a''_n)) + d_Y(f(a''_n), \tilde{f}(z'')) < \varepsilon.$$

□

Un usage non-trivial de ce théorème est la définition de la transformée de Fourier sur l'ensemble des fonctions de carré intégrable à partir de sa définition par une intégrale au sens habituel sur l'ensemble des fonctions de la classe de Schwartz, par exemple.

7.3. Théorème du point fixe.

Théorème 7.9. (Picard)

Soit f une application de X (espace complet) dans lui-même. On suppose qu'il existe $k < 1$ tel que pour tous $x \neq y \in X$, $d(f(x), f(y)) < kd(x, y)$ (on dit que f est k -contractante). Alors il existe un unique $a \in X$ tel que $f(a) = a$ (appelé point fixe de f).

Démonstration. Prenons $x_0 \in X$, et définissons récursivement $x_{n+1} := f(x_n)$, $n \in \mathbb{N}$. Alors $d(x_{n+2}, x_{n+1}) < kd(x_{n+1}, x_n)$ et on déduit d'une récurrence immédiate que $d(x_{n+1}, x_n) < k^n d(x_1, x_0)$ et donc par l'inégalité triangulaire et la somme d'une progression géométrique finie, $d(x_{n+m}, x_n) < k^n \frac{1-k^m}{1-k} d(x_1, x_0)$. Donc la suite est de Cauchy et converge vers $a \in X$. En passant à la limite dans la relation $x_{n+1} := f(x_n)$ (et en utilisant la continuité de f), on voit que $a = f(a)$.

Si on avait $a, b \in X$ tels que $a = f(a)$ et $b = f(b)$, alors $d(a, b) = d(f(a), f(b)) < kd(a, b)$ si jamais on avait $a \neq b$, ce qui est une contradiction. □

Corollaire 7.10. La même conclusion est valide si il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que f^p soit k -contractante.

Ce corollaire a été démontré dans le cours sur les équations différentielles, et utilisé pour démontrer le théorème de Cauchy-Lipschitz sur l'existence de solutions des équations différentielles.

Démonstration. Soit $g = f^p$. Alors il existe un unique $a \in X$ tel que $g(a) = a$. Comme g et f commutent, $g(f(a)) = f(g(a)) = f(a)$, donc $f(a) = a$ puisqu'il n'y a qu'un point fixe de g . D'autre part, si $f(b) = b$, en itérant, on obtient $g(b) = b$, donc $b = a$. □

Exemple 7.11. Soit $\varphi \in \mathcal{C}([0, 1])$ telle que $0 \leq \varphi(x) \leq 1$ et il existe x tel que $\varphi(x) < 1$. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Montrer qu'il existe une unique $f \in \mathcal{C}^1([0, 1])$ telle que $f(0) = \alpha$ et $f'(x) = f(\varphi(x))$.

Méthode : on considère $X := \mathcal{C}([0, 1])$ et $T : X \rightarrow X$ définie par $T(f)(x) := \alpha + \int_0^x f(\varphi(t))dt$. Alors f est solution si et seulement si $T(f) = f$, et T^2 est k -contractante.

Il existe une version “à paramètre” du Théorème du point fixe.

Théorème 7.12. *Soit X métrique complet, Y espace topologique, $f : X \times Y \rightarrow X$ telle qu'il existe $k < 1$ avec $d(f(x, y), f(x', y)) < kd(x, x')$ pour tous $x \neq x' \in X$, $y \in Y$. Alors pour tout y il existe un unique $\psi(y) \in X$ tel que $f(\psi(y)) = \psi(y)$ et $\psi : Y \rightarrow X$ est continue.*

Démonstration. L'existence provient du théorème précédent appliqué à $f(\cdot, y)$. Il faut montrer la continuité en y . Soient $y_0 \in Y$ et $\varepsilon > 0$, alors il existe un voisinage V de y_0 tel que $y \in V$ implique $d(f(\psi(y_0), y), f(\psi(y_0), y_0)) < \varepsilon$. Alors

$$\begin{aligned} d(\psi(y), \psi(y_0)) &= d(f(\psi(y), y), f(\psi(y_0), y_0)) \\ &\leq d(f(\psi(y), y), f(\psi(y_0), y)) + d(f(\psi(y_0), y), f(\psi(y_0), y_0)) \leq kd(\psi(y), \psi(y_0)) + \varepsilon, \end{aligned}$$

donc $d(\psi(y), \psi(y_0)) < \varepsilon/(1 - k)$, ce qui permet de conclure. \square

Ceci s'applique au théorème d'inversion locale. Soit F définie sur un espace de Banach X . Quitte à composer par l'inverse de la différentielle et à faire des translations, on peut supposer qu'on veut inverser $F(x) = x + h(x)$ où h est k -contractante (h peut être le terme en $o(x)$ qui reste dans le développement de F si sa différentielle est l'identité, par exemple). On pose alors, pour $y \in Y := X$, $f(x, y) := x - F(x) + y$. Alors $f(x, y) = x$ équivaut à $F(x) = y$ et on vérifie facilement que f vérifie les hypothèses du théorème.

Vous remarquerez qu'on donne ainsi un théorème d'inversion locale en dimension infinie (et on peut en déduire un théorème des fonctions implicites).

7.4. Théorème de Baire. Cette propriété remarquable des espaces métriques complets est à la base de propriétés importantes des espaces de Banach (c'est-à-dire normés et complets).

Théorème 7.13. *Soit X un espace métrique complet et $(U_n)_n$ une famille dénombrable d'ouverts denses de X . Alors $\bigcap_n U_n$ est dense dans X .*

Démonstration. On veut montrer que pour tout ouvert non vide $V \subset X$, alors $V \cap \bigcap_n U_n$ est non vide. On va définir par récurrence une suite de boules fermées $BF(x_n, r_n)$ telles que $BF(x_n, r_n) \subset V \cap \bigcap_{k=1}^n U_k$, $BF(x_{n+1}, r_{n+1}) \subset BF(x_n, r_n)$ et $r_n \leq \frac{1}{n}$. Alors la suite des centres $(x_n)_n$ est de Cauchy, donc convergente. Soit $x := \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$. Pour tout $k \geq n$, $x_k \in BF(x_n, r_n)$, donc comme on a des fermés, $x \in BF(x_n, r_n)$. En particulier, $x \in V \cap U_n$, pour tout n .

Construction de la suite de boules : comme U_1 est dense, $U_1 \cap V$ est un ouvert non-vide, donc il contient une boule ouverte de rayon positif, et donc toute boule fermée de rayon strictement inférieur. On en choisit une pour $BF(x_1, r_1)$, en réduisant r_1 si besoin est pour avoir $r_1 \leq 1$. Si la construction a été faite jusqu'au rang n , U_{n+1} étant dense, $B(x_n, r_n) \cap U_{n+1}$ est un ouvert non vide, donc il contient une boule fermée $BF(x_{n+1}, r_{n+1})$ avec $r_{n+1} \leq \frac{1}{n+1}$. De plus, $BF(x_{n+1}, r_{n+1}) \subset B(x_n, r_n) \cap U_{n+1} \subset (V \cap \bigcap_{k=1}^n U_k) \cap U_{n+1}$. \square

En passant aux complémentaires, un corollaire immédiat est qu'une union dénombrable de fermés d'intérieur vide est aussi d'intérieur vide. On utilise parfois la terminologie G_δ (d comme *Durchschnitt*) pour une intersection dénombrable d'ouverts et F_σ (s comme *Summe*) pour une union dénombrable de fermés.

Une conséquence facile de ce corollaire du théorème de Baire est qu'aucune métrique qui définit la topologie habituelle de \mathbb{Q} ne peut en faire un espace complet. Ou, plus généralement, un espace dénombrable, complet, doit comporter des points isolés (c'est-à-dire des singletons d'intérieur non vide).

Voici une autre application élémentaire du Théorème de Baire.

Exercice 7.14. Soit (f_n) une suite de fonctions continues qui converge simplement vers f sur un intervalle de longueur positive I . L'ensemble des points où f est continue est dense dans I . Les détails de la démonstration qui suit sont laissés à titre d'exercice.

(a) Pour $n, m \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$E_{m,n} := \left\{ x : |f_n(x) - f_k(x)| \leq \frac{1}{m} \forall k \geq n \right\}.$$

On pose $E'_{m,n} := E_{m,n} \setminus E_{m,n}^\circ$ la frontière de $E_{m,n}$, et $E := \bigcup_{m,n} E'_{m,n}$. D'après le Théorème de Baire, $I \setminus E$ est dense dans I .

(b) Soit $x \in I$. Pour tout m , montrer qu'il existe $n(m)$ tel que $x \in E_{m,n}$.

(c) Si de plus $x \notin E$, montrer qu'il existe un voisinage V de x tel que pour tout $y \in V$, $|f(x) - f(y)| \leq 3/m$.

En déduire que f est continue en tout point de $I \setminus E$.

8. ESPACES VECTORIELS NORMÉS

Nous écrirons \mathbb{K} pour \mathbb{R} ou \mathbb{C} (il y a quelques cas où il est vraiment plus commode de considérer des espaces vectoriels à coefficients complexes : fonctions holomorphes, transformée ou séries de Fourier...)

8.1. Premières définitions.

Définition 8.1. Étant donné X un \mathbb{K} -espace vectoriel, une *norme* sur X est une application $x \mapsto \|x\|$ telle que pour tous $x, y \in X$, $\lambda \in \mathbb{K}$,

- (1) $\|x\| \geq 0$ et $\|x\| = 0$ si et seulement si $x = 0$;
- (2) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$;
- (3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Exemple 8.2. (1) Sur \mathbb{R}^n , ou sur l'ensemble des suites réelles telle que la somme converge, si $x = (x_i)_i$, $\|x\|_p := (\sum |x_i|^p)^{1/p}$ définit une norme pour $p \geq 1$ (c'est une conséquence de l'inégalité de Minkowski). Sur \mathbb{R}^n , ou sur l'ensemble des suites réelles bornées, $\|x\|_\infty := \sup_i |x_i|$ définit aussi une norme. Ces espaces sont notés ℓ^p . On peut aussi considérer des valeurs complexes. On peut aussi adapter de telles normes aux espaces de matrices ou d'applications multilinéaires entre des espaces de dimension finie.

- (2) Sur l'ensemble $\mathcal{C}^0(A, \mathbb{K})$ des fonctions continues à valeurs dans \mathbb{K} , où A est un espace topologique compact, $\|f\|_\infty := \sup_{x \in A} |f(x)|$ définit une norme (de la convergence uniforme).

- (3) Si en particulier A est un compact de \mathbb{R}^n , l'ensemble des fonctions à valeurs réelles de classe \mathcal{C}^k sur A peut être défini comme l'ensemble des restrictions à A des fonctions de classe \mathcal{C}^k dans un voisinage de A . Alors $\|f\|_{k,\infty} := \sup_{x \in A} \sum_{j=0}^k \|D^j f(x)\|$, où $\|\cdot\|$ est une norme arbitraire sur l'espace des applications multilinéaires, est une norme sur $\mathcal{C}^k(A, \mathbb{R})$.
- (4) Les espaces L^p de la théorie de l'intégration de Lebesgue sont des espaces normés pour $1 \leq p \leq +\infty$. Nous ne détaillerons pas.
- (5) Si X, Y sont des espaces normés, alors on peut définir une norme produit sur $X \times Y$ par $\|(x, y)\| := \max(\|x\|_X, \|y\|_Y)$, mais ce n'est qu'une des façons de mettre une norme sur cet espace.
- (6) L'espace $\mathcal{C}^0(I, \mathbb{K})$ des fonctions continues à valeurs dans \mathbb{K} sur un intervalle $I :=]a, b[\subset \mathbb{R}$ n'a pas de norme qui définisse une topologie naturelle. Par contre on peut le munir de la distance donnée par

$$d(f, g) := \sum_n 2^{-n} \min \left(1, \sup_{x \in [a + \frac{1}{n}, b - \frac{1}{n}]} |f(x) - g(x)| \right).$$

C'est un exemple d'espace de Fréchet. Nous ne détaillerons pas.

Toute norme définit une distance par $d(x, y) := \|x - y\|$. On appelle *boule unité* (fermée) la boule $BF(0, 1)$. On travaille toujours avec la topologie donnée par cette distance, pour laquelle l'addition des vecteurs ou la multiplication par un scalaire sont des applications continues (c'est donc un cas particulier de ce qu'on appelle un espace vectoriel topologique). La norme elle-même est continue pour cette topologie. Il est facile de voir que l'adhérence de toute boule ouverte de rayon non nul est la boule fermée correspondante.

Définition 8.3. On dit que deux normes $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ sont *équivalentes* si il existe $C \geq 1$ telle que pour tout $x \in X$,

$$\frac{1}{C} \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq C \|x\|_1.$$

On peut montrer facilement que sur \mathbb{R}^2 , les normes $\|\cdot\|_p$ sont toutes deux à deux équivalentes (c'est un cas particulier d'un résultat plus général, voir plus bas).

8.2. Applications linéaires continues.

Proposition 8.4. Soit f une application linéaire de X dans Y , deux espaces vectoriels normés. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (1) f est lipschitzienne sur X .
- (2) f est uniformément continue sur X .
- (3) f est continue sur X .
- (4) f est continue en 0.
- (5) $\sup_{\|x\|_X \leq 1} \|f(x)\|_Y < \infty$.

Dans ce cas, on pose $\|f\| := \sup_{\|x\|_X \leq 1} \|f(x)\|_Y = \sup_{x \neq 0} (\|f(x)\|_Y / \|x\|_X)$.

Démonstration. Toutes les implications sont claires, sauf :

(4) \Rightarrow (5) : par continuité en 0, il existe $\delta > 0$ tel que si $\|x\|_X \leq \delta$, $\|f(x)\|_Y \leq 1$. Alors la linéarité implique que si $\|x\|_X \leq 1$, $\|f(x)\|_Y \leq 1/\delta < \infty$.

(5) \Rightarrow (1) : Pour tout $x, y \in X$, $\frac{x-y}{\|x-y\|}$ est un vecteur unité, donc

$$\|f(x) - f(y)\| = \|f(x - y)\| \leq \|x - y\| \left\| f\left(\frac{x - y}{\|x - y\|}\right) \right\| \leq \|f\| \|x - y\|.$$

□

Proposition 8.5. Sur un espace vectoriel X de dimension finie sur \mathbb{R} ou \mathbb{C} , toutes les normes sont équivalentes.

Démonstration. Soit (e_1, \dots, e_n) une base de X . Un vecteur x s'écrit donc $x = \sum_i x_i e_i$. On va montrer qu'une norme quelconque $\|\cdot\|$ est équivalente à la norme $N(x) := \sum_i |x_i|$.

Considérons l'application identité de (X, N) dans $(X, \|\cdot\|)$. Il faut montrer qu'elle est lipschitzienne (dans les deux directions). D'après la Proposition 8.4, il suffit de montrer que l'image de la boule unité est bornée.

Si $N(x) \leq 1$, alors $\|x\| \leq \sum_i |x_i| \|e_i\| \leq \max_i \|e_i\| < \infty$.

Réciproquement, comme (X, N) a la même topologie que \mathbb{K}^n muni de la norme $\|\cdot\|_1$, donc la topologie usuelle, sa sphère unité $S := \{x : N(x) = 1\}$ est compacte. Comme l'identité est une application continue vers l'espace séparé $(X, \|\cdot\|)$, S est compacte dans cet espace et $\|\cdot\|$, qui est une application continue sur $(X, \|\cdot\|)$ à valeurs réelles positives, doit atteindre son minimum $\delta > 0$ sur S . Donc, pour tout $x \in S$, $\|x\| \geq \delta = \delta N(x)$, et cette inégalité s'étend facilement à tout $y \in X$ en remplaçant y par $x := y/N(y)$. □

Proposition 8.6. Si X est un espace de dimension finie, toutes les applications linéaires sont continues.

La continuité des applications linéaires ne sera donc intéressante qu'en dimension infinie.

Démonstration. D'après la Proposition 8.5, il suffit de le vérifier pour la norme N . Or $\sum_i |x_i| \leq 1$ implique que $\|f(x)\|_Y \leq \max_i \|f(e_i)\|_Y < \infty$. □

On remarquera enfin qu'un sous-espace F de dimension finie d'un espace vectoriel normé X est toujours fermé. En effet, F est homéomorphe à \mathbb{R}^n et sa norme est équivalente, donc il sera complet, donc la limite de toute suite de F qui converge dans X , donc est de Cauchy dans F , devra converger dans F .

Exemple 8.7. Considérons l'espace $C^0([0, 1], \mathbb{R})$, muni de la norme L^1 : $\|f\|_1 := \int_0^1 |f(t)| dt$. Alors l'application $f \mapsto f(0)$ n'est pas continue. Par contre elle est continue pour la norme $\|f\|_\infty := \max_{[0,1]} |f|$ (norme uniforme).

Exercice 8.8. Une forme linéaire non nulle est continue si et seulement si son noyau est un sous-espace fermé. Dans le cas contraire, il est dense.

Le noyau d'une forme linéaire non nulle s'appelle un *hyperplan*. Un hyperplan est donc soit fermé, soit dense.

8.3. Théorème de Riesz.

Théorème 8.9. Soit X un espace vectoriel normé. Alors la boule unité fermée de X est compacte si et seulement si X est de dimension finie.

Toutes les boules étant homéomorphes (par translation et dilatation), il suffit en fait qu'un seul point admette un voisinage relativement compact pour que la boule unité fermée de X soit compacte (et donc tout fermé borné).

Démonstration. D'après le corollaire de la Proposition 5.13, il suffit de démontrer la partie "seulement si". Supposons donc que $BF(0, 1)$ est compacte. Alors il en existe un sous-ensemble fini $\{a_1, \dots, a_N\}$ tel que $BF(0, 1) \subset \bigcup_i B(a_i, \frac{1}{2})$. Soit F l'espace vectoriel engendré par $\{a_1, \dots, a_N\}$ (donc de dimension finie).

Considérons maintenant $x \in BF(0, 2)$. Alors $x/2 \in BF(0, 1)$, donc on peut écrire $x = 2a_i + v$ avec $\|v\| < 1$. Mais alors $v = a_j + w$, avec $\|w\| < \frac{1}{2}$, donc finalement $x = 2a_i + a_j + w \in F + B(0, \frac{1}{2})$. Par récurrence on montre (en choisissant n tel que $\|x\| \leq 2^n$) que tout vecteur $x \in E$ s'écrit $x = f + w \in F + B(0, \frac{1}{2})$.

S'il existait un vecteur $x \in E \setminus F$, alors comme F est fermé, il existerait $r > 0$ tel que $B(x, r) \cap F = \emptyset$. Mais alors $B(\frac{1}{r}x, 1) \cap F = \emptyset$, ce qui contredit l'alinéa précédent. \square

8.4. Espaces de Banach.

Définition 8.10. Un espace vectoriel normé est dit *espace de Banach* s'il est complet (au sens de la distance définie par la norme).

La plupart des espaces les plus utiles de l'analyse sont des espaces de Banach.

Proposition 8.11. Un espace vectoriel normé X est de Banach si et seulement si pour toute suite de vecteurs $(x_n)_n$ telle que $\sum_n \|x_n\| < +\infty$, alors la série $\sum x_n$ est convergente.

En d'autres termes, une série normalement convergente doit être convergente.

Démonstration. L'implication directe vient du fait que les sommes partielles d'une série normalement convergente forment une suite de Cauchy, par l'inégalité triangulaire.

Réciproquement, si $(y_n)_n$ est une suite de Cauchy, on construit une suite croissante $(n_k)_k$ telle que pour tout $p, q \geq n_k$, $\|y_p - y_q\| \leq 2^{-k}$. Alors la série $\sum_k (y_{n_{k+1}} - y_{n_k})$ est normalement convergente, donc la suite des sommes partielles, $(y_{n_k} - y_{n_0})$ est convergente, donc $(y_n)_n$ admet une sous-suite convergente, ce qui pour une suite de Cauchy implique qu'elle est convergente. \square

Exemple 8.12. (1) Comme on l'a déjà fait remarquer, tout espace de dimension finie est un espace de Banach.

- (2) Quand A est un espace métrique compact, l'espace des fonctions continues à valeur dans un espace de Banach B , $\mathcal{C}^0(A, B)$, est un espace de Banach.
- (3) Les espaces ℓ^p de suites dont la p ème puissance du module est sommable (cf. Exemple 8.2) sont des espaces de Banach pour $1 \leq p \leq \infty$.
- (4) Plus généralement, quand X est un espace mesuré, les espaces $L^p(X)$ sont des espaces de Banach.
- (5) Si X est un espace vectoriel normé et Y un espace de Banach, l'espace $\mathcal{L}(X, Y)$ des applications linéaires continues de X dans Y , muni de la norme donnée après la Proposition 8.4, $\|f\| := \sup_{\|x\|_X \leq 1} \|f(x)\|_Y$, est un espace de Banach.

Démonstration. Nous nous limitons à l'idée de la démonstration dans trois cas relativement simples.

(2) : Si la suite $(f_n)_n$ est de Cauchy, alors il est immédiat que pour chaque x , $(f_n(x))_n$ est une suite de Cauchy de B , et plus précisément :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} : p, q \geq N \Rightarrow \forall x \in A, \|f_p(x) - f_q(x)\| < \varepsilon$$

(l'entier N ne dépend que de ε , pas de x). Comme B est complet, pour chaque x la suite $(f_n(x))_n$ admet une limite que nous noterons $f(x)$. En passant à la limite sur q dans l'expression ci-dessus, et en utilisant la continuité de la norme, nous voyons que pour $p \geq N$, $x \in A$, $\|f_p(x) - f(x)\| \leq \varepsilon$, et donc on a bien convergence uniforme de $(f_n)_n$ vers f .

(3) : nous notons $v = (v(k))_k$ un élément de ℓ^1 et $u_n = (u_n(k))_k$ le n ième terme d'une suite dans ℓ^1 . Supposons qu'elle soit de Cauchy. Comme ci-dessus, on voit que pour tout k fixé, $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n(k)$ existe et on la note $u(k)$. En particulier, pour tout $K \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^K |u(k)| = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^K |u_n(k)| \leq \limsup_n \|u_n\|_1 \leq \sup_n \|u_n\|_1 < \infty,$$

puisque la suite (de suites) $(u_n)_n$ est bornée en tant que suite de Cauchy. En passant à la borne supérieure par rapport à K , on déduit que la suite $(u(k))_k$ est bien dans ℓ^1 .

Pour démontrer la convergence, soit $\varepsilon > 0$ donné. Il existe N tel que pour $n \geq n_0 \geq N$, $\|u_n - u_{n_0}\|_1 \leq \varepsilon$. Si on refait le même raisonnement que ci-dessus pour la suite $u_n - u_{n_0}$, qui tend vers $u - u_{n_0}$, on trouve

$$\|u - u_{n_0}\|_1 = \sum_{k=0}^{\infty} |u(k) - u_{n_0}(k)| \leq \sup_{n \geq n_0} \|u_n - u_{n_0}\|_1 \leq \varepsilon.$$

(4) : ici aussi, nous donnons une idée de la démonstration pour $p = 1$ seulement. Supposons que $\sum_j \|f_j\|_1$ converge. Alors le Lemme de Fatou montre que $\int_X \sum_j |f_j| < +\infty$. Donc si on pose $g = \sum_j |f_j| \in L^1(X)$, on peut appliquer le théorème de convergence dominée avec g comme fonction dominante pour montrer que $f = \lim_n \sum_{j=0}^n f_j$ au sens de la convergence de $L^1(X)$. \square

Nous avons peu parlé de bases dans le contexte des espaces vectoriels de dimension infinie. De fait, les seules combinaisons linéaires qu'admettent les définitions d'un espace vectoriel sont des combinaisons linéaires *finies*, et donc un système de vecteurs $(x_i, i \in \mathcal{I})$ est générateur de E si et seulement si pour tout $x \in E$, il existe un sous-ensemble fini $\mathcal{I}_x \subset \mathcal{I}$ et des scalaires $(\lambda_i, i \in \mathcal{I}_x)$ tels que $x = \sum_{i \in \mathcal{I}_x} \lambda_i x_i$. De même, un système est libre si toute combinaison linéaire finie de ses éléments qui est nulle est une combinaison dont tous les coefficients sont nuls.

Exercice 8.13. Si X est un espace de Banach de dimension infinie, il n'admet pas de système générateur dénombrable.

Indication : procédons par l'absurde. Soit $(x_n, n \in \mathbb{N}^*)$ un système générateur. Montrer que si on pose $V_n := \text{Vect}\{x_1, \dots, x_n\}$, alors V_n est d'intérieur vide (en fait, le seul sous-espace vectoriel d'intérieur non-vide est l'espace tout entier), fermé (idée : montrer que c'est un espace complet), et que $\cup_n V_n = X$.

9. EXEMPLE : ESPACES DE FONCTIONS CONTINUES

Dans cette section, nous allons donner deux théorèmes importants sur l'espace $\mathcal{C}^0(K, B)$, où K est un espace métrique compact, et B est un espace de Banach.

9.1. Théorème d'Ascoli.

Définition 9.1. Soit A une famille de fonctions continues de X dans Y , X, Y espaces métriques, et $x \in X$. On dit que A est *équicontinue* au point x si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour toute $f \in A$, $f(B(x, \delta)) \subset B(f(x), \varepsilon)$.

Cette propriété signifie que la continuité est uniforme non pas par rapport au point en lequel on la vérifie, mais par rapport à la fonction f dans la famille A .

Exemple : si on prend $f_t(x) = x^2 + t$, on a une famille $\{f_t, t \in \mathbb{R}\}$ de fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{R} qui est équicontinue (vous noterez qu'aucune des fonctions dans la famille n'est uniformément continue sur tout \mathbb{R}).

Proposition 9.2. Soit A une famille équicontinue de fonctions sur un espace compact X , alors A est uniformément équicontinue, c'est-à-dire que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour toute $f \in A$ et pour tout $x \in X$, $f(B(x, \delta)) \subset B(f(x), \varepsilon)$.

Démonstration. Pour tout x , il existe δ_x tel que $f(B(x, \delta_x)) \subset B(f(x), \varepsilon/2)$. Les boules $B(x, \delta_x)$ forment un recouvrement ouvert. On choisit un nombre de Lebesgue $\delta > 0$ pour ce recouvrement. Alors si $d(x, x') < \delta$, les deux points sont dans une même boule $B(a, \delta_a)$ et $d(f(x), f(x')) \leq d(f(x), f(a)) + d(f(a), f(x')) < \varepsilon$. \square

Théorème 9.3. Soient K compact métrique et $A \subset \mathcal{C}^0(K, B)$. Alors A est relativement compact si et seulement si

- (1) Pour tout $x \in K$, $A(x) := \{f(x) : f \in A\}$ est relativement compact dans B et
- (2) A est équicontinue.

Démonstration. K étant compact, il admet une suite dense $(a_n)_n$ (par exemple, on prend l'union des centres des recouvrements finis de K par des boules de rayon $1/n$ qui existent pour tout n par compacité).

La suite $(f_n(a_1))_n$ admet une sous-suite convergente $(f_{\varphi_1(n)}(a_1))_n$. Supposons qu'il existe une injection croissante φ_m de \mathbb{N} dans \mathbb{N} telle que les suites $(f_{\varphi_m(n)}(a_k))_n$ soient convergentes, pour $1 \leq k \leq m$. Alors $(f_{\varphi_m(n)}(a_{m+1}))_n$ admet une sous-suite convergente, et donc on peut définir $\varphi_{m+1} = \varphi_m \circ \psi$, où ψ est une injection croissante, et la propriété est vérifiée au rang $m+1$. Finalement, la suite $(f_{\varphi_m(m)}(a_n))_n$ convergera pour tout n (dès que $m \geq n$, on a affaire à une sous-suite des suites précédemment considérées). Notons $(f_{\psi(m)})_m$ la suite $(f_{\varphi_m(m)})_m$. On va montrer qu'elle est de Cauchy au sens de la norme uniforme.

D'après la Proposition 9.2, étant donné $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout n , $d(x, x') < \delta$ implique $d(f_n(x), f_n(x')) < \varepsilon/3$. On choisit un sous-ensemble fini $\{a_{n_i}, 1 \leq i \leq N\}$ tel que $K \subset \bigcup_i B(a_{n_i}, \delta)$. On prend $N \in \mathbb{N}$ tel que pour i , pour tout $p, q \geq N$, $d(f_{\psi(p)}(a_{n_i}), f_{\psi(q)}(a_{n_i})) < \varepsilon/3$.

Alors pour tout x , il existe i tel que $d(x, a_{n_i}) < \delta$ et

$$d(f_{\psi(p)}(x), f_{\psi(q)}(x)) \leq d(f_{\psi(p)}(x), f_{\psi(p)}(a_{n_i})) + d(f_{\psi(p)}(a_{n_i}), f_{\psi(q)}(a_{n_i})) + d(f_{\psi(q)}(a_{n_i}), f_{\psi(q)}(x)) < \varepsilon.$$

\square

Une conséquence de ce théorème est, par exemple, que l'ensemble des fonctions \mathcal{C}^1 dont la dérivée est bornée par une constante est relativement compact dans l'espace $\mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$. Une autre application est le théorème de Montel, mais attention : on ne peut définir des fonctions holomorphes que sur un ouvert, et l'espace qu'on obtient n'est pas un espace normé, mais un espace de Fréchet dont la topologie est donnée par une famille de semi-normes. (En fait, des fonctions holomorphes dont la taille est bornée ont automatiquement des dérivées bornées ; donc on ne pourrait pas définir cette topologie grâce à une norme, car cela contredirait le théorème de Riesz).

9.2. Théorème de Stone-Weierstrass. Le théorème classique de Weierstrass affirme que les polynômes sont denses pour la convergence uniforme dans $\mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$. Une démonstration peut en être faite à partir du lemme suivant.

Proposition 9.4. La fonction $x \mapsto |x|$ est limite uniforme sur $[-1, +1]$ d'une suite de fonctions polynomiales.

Démonstration. On rappelle que pour $-1 < t < 1$: $\sqrt{1-t} = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} a_n t^n$ avec $a_1 = \frac{1}{2}$ et $a_n = \frac{1.3.5 \dots (2n-3)}{2.4 \dots (2n)}$.

Montrons que la série de terme général a_n converge. Si $0 \leq u < 1$, la série de terme général $a_n u^n$ est à termes positifs et convergente donc pour tout entier $N \geq 1$: $0 \leq \sum_{n=1}^N a_n u^n \leq \sum_{n=1}^{\infty} a_n u^n = 1 - \sqrt{1-u} < 1$.

Nous avons pour tout $N \geq 1$ et tout $u \in [0, 1[$: $0 \leq \sum_{n=1}^N a_n u^n < 1$; on obtient par passage à la limite lorsque $u \rightarrow 1^-$: pour tout $N \geq 1$, $0 \leq \sum_{n=1}^N a_n \leq 1$, d'où la convergence de la série à termes positifs $\sum a_n$.

On en déduit la convergence normale sur $[-1, 1]$ de la série $\sum_1^{\infty} a_n t^n$; cette série a pour somme, lorsque $0 \leq t \leq 1$: $1 - \sqrt{1-t}$ (valeur de la somme obtenue en prolongeant par continuité en $+1$ les deux membres de l'égalité $\sqrt{1-t} = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} a_n t^n$).

Posons $S_N(u) = \sum_1^N a_n u^n$; la suite $(S_N)_N$ converge donc uniformément sur $[0, 1]$ vers la fonction $1 - \sqrt{1-u}$.

Pour $|x| \leq 1$: $|x| = \sqrt{1 - (1-x^2)}$; puisqu'alors $1-x^2 \in [0, 1]$, la suite $(S_N(1-x^2))_N$ converge uniformément sur $[-1, 1]$ vers $1 - \sqrt{1 - (1-x^2)} = 1 - |x|$; d'où $P_N(x) = 1 - S_N(1-x^2)$ converge uniformément sur $[-1, 1]$ vers $|x|$ lorsque $N \rightarrow +\infty$. \square

Comme $\max(x, y) = \frac{x+y}{2} + \frac{|x-y|}{2}$, on en déduit qu'on peut approximer par des polynômes tout maximum de deux fonctions affines, et donc, en raisonnant par récurrence, toute fonction dont le graphe est une ligne brisée (affine par morceaux). En utilisant le théorème de Heine, il est facile de voir qu'on peut approcher n'importe quelle fonction continue sur $[a, b]$ par une fonction affine par morceaux (le nombre de morceaux dépend de ε).

Définition 9.5. On dit qu'un ensemble A de fonctions sur K sépare les points de K si pour tout $x \neq y \in K$, il existe $f_{x,y} \in A$ telle que $f(x) \neq f(y)$.

Une algèbre de fonctions (à valeurs réelles ou complexes) est un ensemble de fonctions stable par les opérations d'addition, de multiplication par un scalaire (resp. réel ou complexe), et de produit. Nous ne donnerons que la version réelle du théorème de Stone Weierstrass, qui généralise celui de Weierstrass.

Théorème 9.6. *Soit K un espace métrique compact, soit A une sous-algèbre de $\mathcal{C}^0(K, \mathbb{R})$ qui contient les fonctions constantes et sépare les points. Alors A est dense.*

Démonstration. D'après le Lemme 9.4 et les considérations qui suivent, si $f, g \in \overline{A}$, alors $|f|, |g|, \max(f, g)$ et $\min(f, g) \in \overline{A}$.

Soit $\varepsilon > 0$ et $f \in \mathcal{C}^0(K, \mathbb{R})$ donnés.

Montrons que pour tout $a \in K$, il existe $f_a \in \overline{A}$ telle que $f_a(a) = f(a)$ et $f_a(x) > f(x) - \varepsilon$, pour tout $x \in K$.

En effet, choisissons pour tout $b \in X \setminus \{a\}$ une fonction $f_{a,b} \in A$ telle que $f_{a,b}(a) = f(a)$ et $f_{a,b}(b) = f(b)$. Ceci existe car A sépare les points et contient les constantes (on applique une transformation affine à la fonction donnée par la définition 9.5). Posons aussi $f_{a,a} := f(a)$ (fonction constante, donc dans A).

Pour $b \in K$, soit $U_b := \{x : f_{a,b}(x) > f(x) - \varepsilon\}$. C'est un ouvert qui contient b , donc on peut extraire un sous-recouvrement fini de K par des $U_{b_i}, 1 \leq i \leq N$. Alors $f_a := \max_{1 \leq i \leq N} f_{a,b_i}$ convient.

Posons maintenant, pour tout $a \in K$, $V_a := \{x : f_a(x) < f(x) + \varepsilon\}$. C'est un ouvert qui contient a , donc on peut extraire un sous-recouvrement fini de K par des $V_{a_i}, 1 \leq i \leq M$. Alors $g := \min_{1 \leq i \leq M} f_{a_i}$ vérifie $|g(x) - f(x)| < \varepsilon$, pour tout $x \in K$. \square

10. DUALITÉ

10.1. Définitions.

Définition 10.1. L'ensemble des formes linéaires continues sur un espace vectoriel normé X est appelé (*espace*) *dual* de X et noté X^* .

On vérifie que c'est un espace vectoriel normé avec la norme $\|\psi\|_* := \sup_{\|x\| \leq 1} |\psi(x)|$.

Exemple 10.2. Soit c_0 l'espace des suites réelles qui convergent vers 0, muni de la norme $\|u\|_\infty := \sup |u_n|$ (une suite convergente est toujours bornée). On peut montrer que c_0^* est isomorphe à ℓ^1 , avec, si $x = (x_n)_{n \geq 0} \in \ell^1$, $\psi_x(u) := \sum_n x_n u_n$.

D'autre part, $(\ell^1)^*$ est isomorphe à ℓ^∞ , avec, si $y = (y_n)_{n \geq 0} \in \ell^\infty$, $\psi_y(x) := \sum_n y_n x_n$. On remarque que $(c_0^*)^*$ est isomorphe à un espace qui contient c_0 , mais beaucoup plus grand.

Définition 10.3. La *topologie faible* sur X est la topologie la moins fine qui rend continues toutes les formes de X^* .

En particulier, cette topologie est moins fine que la topologie de la norme, donc la convergence d'une suite est plus facile à obtenir pour cette topologie. Par exemple (ce n'est pas tout-à-fait évident) une suite de suites $(u^k)_k := ((u_n^k)_n)_k$ (fonctions de $n \in \mathbb{N}$, indexées par un paramètre $k \in \mathbb{N}$) converge faiblement vers 0 dans c_0 si et seulement si $\sup_k \|u^k\|_\infty < \infty$ et pour tout n fixé, $\lim_{k \rightarrow \infty} u_n^k = 0$.

Ainsi la suite formée des $u^k := \delta_k$. (qui valent 1 au k ème rang et 0 à tous les autres rangs) converge faiblement vers 0 alors que $\|u^k\|_\infty = 1$ pour tout k .

10.2. Théorème de Hahn-Banach.

Théorème 10.4. *Soit A un sous-espace vectoriel de X , espace vectoriel normé sur \mathbb{R} , et ψ une forme linéaire sur A telle que $|\psi(x)| \leq M\|x\|$, pour tout $x \in A$. Alors*

il existe une forme linéaire $\tilde{\psi} \in X^*$ telle que $\tilde{\psi}|_A = \psi$ et $|\psi(x)| \leq M\|x\|$, pour tout $x \in X$.

L'énoncé ci-dessus est appelé forme analytique du Théorème de Hahn-Banach. On peut en déduire des formes dites géométriques, qui portent sur des propriétés de séparation de convexes par des hyperplans. Nous ne le ferons pas. Pour simplifier les choses nous n'énonçons et ne démontrons le théorème que pour les scalaires réels, mais il est vrai aussi avec des scalaires complexes.

Démonstration. Si $\psi = 0$, il suffit de prendre $\tilde{\psi} = 0$. Sinon, on peut supposer en multipliant par une constante que $\sup_{\|x\| \leq 1, x \in A} |\psi(x)| = 1$. On commence par construire une extension à un sous-espace qui a une dimension de plus, $A_1 := \text{Vect}(A, x_0)$ où $x_0 \notin A$.

Pour $x \in A, \lambda \in \mathbb{R}$, on pose $\psi_1(x + \lambda x_0) := \psi(x) + t\lambda$, avec t un réel à choisir.

On veut choisir t tel que pour tous $x \in A, \lambda \in \mathbb{R}^*$,

$$|\psi(x) + t\lambda| \leq \|x + \lambda x_0\|,$$

ou encore

$$\left| \psi\left(\frac{x}{-\lambda}\right) - t \right| \leq \left\| \frac{x}{-\lambda} - x_0 \right\|,$$

donc pour tout $y \in A$,

$$-\|y - x_0\| \leq t - \psi(y) \leq \|y - x_0\|, \text{ i.e. } \psi(y) - \|y - x_0\| \leq t \leq \psi(y) + \|y - x_0\|.$$

Ces deux inégalités peuvent être satisfaites par un unique t indépendant de y si pour tout $y, y' \in A$,

$$\psi(y) - \|y - x_0\| \leq \psi(y') + \|y' - x_0\|.$$

Or la majoration de ψ sur A et l'inégalité triangulaire impliquent

$$\psi(y) - \psi(y') = \psi(y - y') \leq \|y - y'\| \leq \|y - x_0\| + \|-y' + x_0\|,$$

ce qui est l'inégalité recherchée.

On conclut la démonstration par une sorte de processus inductif (mais qui n'est pas dénombrable). Définissons une relation d'ordre sur les couples (A, f) où A est un sous-espace vectoriel de X et f une forme linéaire sur A telle que $\|f_A\| \leq 1$:

$$(A, f) \leq (A', f') \Leftrightarrow (A \subset A' \text{ et } f'|_A = f).$$

Il est facile de voir que tout sous-ensemble totalement ordonné $\{(A_i, f_i)\}$ admet un majorant, qui sera $(\bigcup_i A_i, F)$ avec $F|_{A_i} = f_i$. Donc le lemme de Zorn implique qu'il existe un élément maximal parmi tous les couples (B, g) tels que $(A, \psi) \leq (B, g)$. Appelons-le (B_∞, g_∞) . Si on avait $B_\infty \subsetneq X$, alors on pourrait construire une extension comme expliqué au début de la preuve, ce qui contredirait la maximalité. \square

Un corollaire de ce résultat est que tout espace vectoriel normé se plonge isométriquement dans son bidual, c'est-à-dire le dual de son dual.

Proposition 10.5. Soit X un espace vectoriel normé, $X^{**} := (X^*)^*$. L'application j définie par : pour tout $\psi \in X^*$, $j(x)(\psi) = \psi(x)$ est une isométrie linéaire.

Démonstration. On vérifie immédiatement que j est linéaire (par définition des opérations sur X^* , on n'a même pas besoin de savoir que les ψ sont linéaires).

Pour les normes, $|j(x)(\psi)| \leq \|\psi\|_* \|x\|$, donc $\|j(x)\|_{**} \leq \|x\|$. Dans l'autre direction, définissons la forme ψ_0 sur le sous-espace $\mathbb{R}x := \{\lambda x, \lambda \in \mathbb{R}\}$ par $\psi_0(\lambda x) = \lambda \|x\|$. Alors on peut trouver, d'après le Théorème 10.4, $\psi \in X^*$, avec $\|\psi\|_* = 1$, telle que $j(x)(\psi) = \psi(x) = \psi_0(x) = \|x\|$, donc $\|j(x)\|_{**} \geq \|x\|$. \square

L'exemple 10.2 montre que j n'est pas nécessairement surjective (elle l'est pour les espaces de Hilbert, mais aussi pour les espaces L^p quand $1 < p < \infty$). On va donner un autre exemple.

Exemple 10.6. Considérons le sous espace $A \subset \ell^\infty$ formé par les suites convergentes. Sur A , la forme linéaire $\psi(u) := \lim_{n \rightarrow \infty} u_n$ vérifie $|\psi(u)| \leq \|u\|_\infty$. Soit $\tilde{\psi}$ l'extension à ℓ^∞ donné par le Théorème 10.4. Montrer (exercice) qu'il n'existe aucune suite $(v_n)_n \in \ell^1$ telle que $\tilde{\psi}(u) = \sum_n u_n v_n$, pour tout $u \in \ell^\infty$.

11. CONSÉQUENCES DU THÉORÈME DE BAIRE

Désormais X désignera un espace de Banach, muni de sa topologie de la norme.

11.1. Théorème de Banach-Steinhaus.

Théorème 11.1. *Soit Y un espace vectoriel normé, et $\{f_i, i \in \mathcal{I}\}$ une famille d'applications linéaires continues de X dans Y . On considère l'ensemble*

$$S := \left\{ x \in X : \sup_i \|f_i(x)\|_Y = +\infty \right\}.$$

Alors, soit S contient un G_δ dense ; soit S est vide et on a $\sup_i \|f_i\| < +\infty$, c'est-à-dire qu'il existe une constante M telle que pour tout $i \in \mathcal{I}$, pour tout $x \in X$, $\|f_i(x)\|_Y \leq M \|x\|_X$.

Démonstration. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$V_n := \left\{ x \in X : \sup_i \|f_i(x)\|_Y > n \right\} = \bigcup_{i \in \mathcal{I}} \{x \in X : \|f_i(x)\|_Y > n\},$$

donc c'est un ouvert comme union d'ouverts (chaque f_i étant continue). Or $S = \bigcap_n V_n$. Donc si V_n est dense pour tout n , on a le premier terme de l'alternative.

Supposons donc qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ et $x_0 \in X$, $r > 0$ tels que $BF(x_0, r) \cap V_N = \emptyset$. Alors pour tout $i \in \mathcal{I}$, pour tout x tel que $\|x\|_X \leq r$,

$$\|f_i(x)\|_Y = \|f_i(x_0 + x) - f_i(x_0)\|_Y \leq 2N,$$

Donc on a la propriété désirée avec $M = 2N/r$. \square

Dans beaucoup d'applications, on utilise un cas particulier : celui où l'ensemble S est carrément vide.

Ce théorème est souvent appelé (en anglais) Uniform Boundedness Principle : si toutes les applications linéaires de la famille sont "bornées", c'est-à-dire continues, alors la borne est uniforme.

Il s'en suit que la famille est équicontinue. Comme une limite simple d'une suite équicontinue est continue (laissé au lecteur), on a le corollaire suivant : si une suite d'applications linéaires continues converge en tout point de X , alors la limite est linéaire et continue. En effet, la linéarité est une conséquence immédiate de la convergence ponctuelle ; l'ensemble $\{f_n(x), n \in \mathbb{N}\}$ sera borné (suite convergente), donc

on peut appliquer le théorème (et l'application limite aura M pour constante de Lipschitz).

Exemple 11.2. On va donner un exemple, dans une topologie bien entendu non métrisable, d'un ensemble A tel que si on prend $S_1(A)$, l'ensemble des limites de suites contenues dans A , alors il existe encore au moins une suite dans $S_1(A)$ dont la limite n'est pas dans $S_1(A)$.

On considère l'espace $L^2[0, 2\pi]$, qui est isomorphe à son dual (c'est un espace de Hilbert). Posons

$$A := \{f_{m,n}(t) := e^{imt} + me^{int}, 0 \leq m < n; m, n \in \mathbb{N}\}.$$

On le considère dans $L^2[0, 2\pi]$ muni de sa topologie faible : $f_n \rightarrow f$ si et seulement si pour tout $g \in L^2[0, 2\pi]$, $\int f_n \bar{g} \rightarrow \int f \bar{g}$.

Alors le théorème de Banach-Steinhaus (appliqué à la famille des formes linéaires) montre que si une suite $(f_{m_p, n_p})_p$ converge faiblement, la norme de la fonction doit rester bornée. Donc la suite $(m_p)_p$ doit se stabiliser, et les seules limites possibles, en-dehors des éléments de A eux-mêmes, seront les fonctions e^{imt} , obtenues quand m est fixe et $n \rightarrow \infty$.

Par contre, 0 est limite faible des fonctions e^{imt} , et ne figure pas dans $S_1(A)$.

11.2. Théorème de l'application ouverte.

Théorème 11.3. *Soit f une application linéaire continue surjective de X dans Y , où X et Y sont des espaces de Banach. Alors il existe $M > 0$ telle que $f(B_X(0, 1)) \supset B_Y(0, M)$.*

Donc, l'image de toute boule ouverte de centre x contient une boule ouverte de centre $f(x)$. Donc dès que U est ouvert, $f(U)$ est voisinage de chacun de ses points, donc ouvert (ce qui explique la terminologie).

Un corollaire est que si f est bijective et continue, alors f^{-1} est continue.

En effet, pour tout $M' < M$,

$$f\left(\frac{M'}{\|f(x)\|_Y}x\right) = \frac{M'}{\|f(x)\|_Y}f(x) \in B_Y(0, M),$$

donc il existe $x' \in B_X(0, 1)$ tel que $f(x') = f\left(\frac{M'}{\|f(x)\|_Y}x\right)$, et par injectivité, $\frac{M'}{\|f(x)\|_Y}x = x' \in B_X(0, 1)$, donc $M'\|x\| < \|f(x)\|_Y$. Ceci étant vrai pour tout $M' < M$, on a $\|f(x)\|_Y \geq M\|x\|_X$, pour tout x . C'est équivalent à la continuité de f^{-1} .

Démonstration. Comme $Y = f(X) = \bigcup_n f(B(0, n))$, le théorème de Baire implique que tous les fermés $\overline{f(B(0, n))}$ ne peuvent pas être d'intérieur vide. Donc il existe $N \in \mathbb{N}$, $y_0 \in Y$, $r > 0$ tels que $B(y_0, r) \subset \overline{f(B(0, N))}$. Donc, pour tout y tel que $\|y\| < r$, $y = (y_0 + y) - y_0 \in \overline{f(B(0, 2N))}$. Soit $M := 2N/r$. On a $B_Y(0, 1) \subset \overline{f(B(0, M))}$.

Soit $y \in B_Y(0, 1)$. Il existe $x_0 \in B(0, M)$ tel que $\|y - f(x_0)\|_Y < 1$. Par récurrence, on peut construire $x_n \in B(0, 2^{-n}M)$ tel que $\|y - f(x_0) - \dots - f(x_n)\| < 2^{-n-1}$. Comme X est complet, la série $\sum x_n$ est convergente, et l'inégalité ci-dessus et la continuité de f montrent que $y = f(\sum_n x_n)$. Comme $\|\sum_n x_n\| \leq 2M$, le théorème est démontré. \square

Le théorème suivant est connu sous le nom de théorème du graphe fermé.

Théorème 11.4. Soient X et Y des espaces de Banach. Soit f une application linéaire de X dans Y .

On suppose que pour toute suite convergente $(x_n)_n$ de X , si il existe une limite $y = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n)$, alors $y = f(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n)$. Alors f est continue.

L'hypothèse est plus faible que la continuité, parce que pour une f continue, l'existence de $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n)$ provient du fait que $(x_n)_n$ converge.

Démonstration. On considère l'espace $X \times Y$ muni de sa norme $\|(x, y)\| := \|x\|_X + \|y\|_Y$, et le sous-espace vectoriel $G := \{(x, f(x)) : x \in X\}$ (graphe de f). L'hypothèse dit que G est un fermé de $X \times Y$. Donc c'est un espace de Banach.

L'application $(x, f(x)) \mapsto x$ est bijective et continue, donc son application inverse aussi, et donc f est continue. \square

Application : Soit $X = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ muni de la norme uniforme. Soit F un sous-espace vectoriel fermé, $F \subset \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$. Alors F est de dimension finie.

En effet, F est un espace de Banach (car fermé). L'application $f \mapsto f'$ de F dans X a un graphe fermé (car la convergence des dérivées implique celle des fonctions), donc est continue. Donc pour tout $f \in F$ telle que $\max_{[0,1]} |f| \leq 1$, alors $\max_{[0,1]} |f'| \leq M$. Cela implique que la boule unité fermée de F est compacte, par le théorème d'Ascoli. Donc F est de dimension finie par le théorème de Riesz.

12. ESPACES DE HILBERT

Les espaces de Hilbert sont des espaces de Banach qui généralisent les espaces euclidiens : la norme est donnée par un produit hermitien.

12.1. Produit hermitien. On se place dans un espace vectoriel E sur \mathbb{C} (le cas réel peut être considéré, mais la plupart des exemples intéressants sont à coefficients complexes).

Définition 12.1. Une application $E \times E \rightarrow \mathbb{C}$, $(x, y) \mapsto \langle x, y \rangle$ est dite *produit hermitien* si et seulement si

- (1) Pour tout $y \in E$, $x \mapsto \langle x, y \rangle$ est linéaire ;
- (2) $\langle y, x \rangle = \overline{\langle x, y \rangle}$;
- (3) $\langle x, x \rangle \geq 0$ et $\langle x, x \rangle = 0$ si et seulement si $x = 0$.

Si $A \subset E$, on note $A^\perp := \{x \in E : \forall y \in A, \langle y, x \rangle = 0\}$, appelé *orthogonal de A*. C'est toujours un sous-espace vectoriel fermé de E .

Exemple 12.2. (1) $E = \mathcal{C}([a, b])$, $\langle f, g \rangle := \int_a^b f(x)\overline{g(x)}dx$.
 (2) $E = \mathbb{C}[X]_{\mathbb{R}}$ (les polynômes à coefficients complexes, de variable réelle),
 $\langle P, Q \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} P(x)Q(x)e^{-x^2} dx$.
 (3) $E = L^2(\mathbb{R})$, $\langle f, g \rangle := \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\overline{g(x)}dx$.

On pose $\|x\| := \langle x, x \rangle^{\frac{1}{2}}$; la proposition suivante permet de vérifier que c'est bien une norme.

Proposition 12.3. (Inégalité de Cauchy-Schwarz) Pour tous $x, y \in E$, $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\|\|y\|$, et l'égalité n'est réalisée que si x et y sont colinéaires.

On peut déduire la valeur du produit hermitien de deux vecteurs à partir de la donnée des normes des vecteurs de l'espace.

Proposition 12.4. (Identité de polarisation) $\langle x, y \rangle = \frac{1}{4} \sum_{n=0}^3 i^n \|x + i^n y\|^2$.

Proposition 12.5. (Identité du parallélogramme)

La norme $\|\cdot\|$ provient d'un produit hermitien si et seulement si pour tous $x, y \in E$,

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2.$$

Démonstration laissée au lecteur (la partie "si" est un peu subtile).

12.2. Définition, propriété de projection.

Définition 12.6. Un espace vectoriel H est dit *hilbertien* ou *de Hilbert* s'il est muni d'un produit hermitien, et s'il est complet au sens de la norme issue de ce produit hermitien.

Exemple 12.7. (1) L'espace ℓ^2 est de Hilbert.

(2) Plus généralement, $L^2(X)$, où (X, μ) est un espace mesuré, muni du produit hermitien $\langle f, g \rangle := \int_X f \bar{g} d\mu$, est de Hilbert. (La démonstration de complétude utilise le Lemme de Fatou, comme celle faite dans l'exemple 8.12 (4) pour le cas $p = 1$, et l'inégalité de Minkowski).

(3) Sur un intervalle $[a, b] \subset \mathbb{R}$, si $c \in]a, b[$, on définit l'espace de Sobolev d'ordre 1, $H^1(a, b)$, comme étant celui de toutes les fonctions f telles qu'il existe $g \in L^2(a, b)$ avec $f(x) = \alpha + \int_c^x g(t) dt$. On montre que si deux fonctions g_1 et g_2 donnent la même fonction f , alors $g_1 = g_2$ dans L^2 (c'est-à-dire presque partout ; c'est une conséquence du fait que les fonctions en escalier sont denses dans L^2). On peut donc poser $f' := g$ (alors même que f n'est pas dérivable partout au sens habituel).

On munit $H^1(a, b)$ du produit hermitien $\langle f, h \rangle := \int_a^b f \bar{h} + f' \bar{h}'$, et $\|f\|_{H^1}^2 := \langle f, f \rangle$.

On peut montrer que si $f \in H^1(a, b)$, alors f est continue et admet des limites aux bords de $]a, b[$. On peut aussi montrer que H^1 est le complété de l'ensemble des fonctions continues (ou même polynomiales) sur $]a, b[$ pour la norme $\|\cdot\|_{H^1}$.

Théorème 12.8. Soit $A \subset H$ un fermé convexe non vide d'un espace de Hilbert. Alors pour tout $x \in H$, il existe un unique $y \in A$ tel que $\|x - y\| = \min_{z \in A} \|x - z\|$.

De plus, y est caractérisé par la propriété : pour tout $z \in A$, $\operatorname{Re}\langle z - y, x - y \rangle \leq 0$.

Le point y est appelé *projection* de x sur l'ensemble A .

Démonstration. On peut, par une translation, se ramener au cas où $x = 0$. Soit $d := \inf_{z \in A} \|z\|$. Prenons n'importe quelle suite (y_n) telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} \|y_n\| = d$. On va montrer que c'est une suite de Cauchy, donc convergente, ce qui montre l'existence et aussi l'unicité (s'il y avait plus d'un minimum, considérer une suite oscillant entre les deux valeurs). Soit $\varepsilon > 0$. Il existe n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$, $\|y_n\|^2 \leq d^2 + \varepsilon^2/4$. Alors pour $n, m \geq n_0$,

$$\|y_n - y_m\|^2 = 2\|y_n\|^2 + 2\|y_m\|^2 - 4\left\|\frac{1}{2}(y_n + y_m)\right\|^2 \leq 2\|y_n\|^2 + 2\|y_m\|^2 - 4d^2 \leq \varepsilon^2.$$

Pour démontrer la caractérisation, si y réalise le minimum, et $z \in A$, on dérive au point 0 la fonction $[0, 1] \ni t \mapsto \|y + t(z - y) - x\|^2$. Réciproquement, si y ne réalise pas le minimum, on prend $z \in A$ tel que $\|z - x\| < \|y - x\|$, et

$$2 \operatorname{Re}\langle z - y, x - y \rangle = \|z - y\|^2 + \|y - x\|^2 - \|z - x\|^2 > 0.$$

□

Corollaire 12.9. Soit V un sous-espace vectoriel fermé de H , $x \in H$. Il existe un unique $y \in V$ qui réalise la plus courte distance de x à V , et c'est l'unique vecteur $y \in V$ tel que $x - y \in V^\perp$.

L'application qui à x associe y est linéaire, continue, de norme 1.

Démonstration laissée au lecteur. Dans ce cas, on parle de projection orthogonale de x sur V .

Si V n'est pas fermé, il se pourrait très bien qu'aucune projection n'existe. Par exemple, prenons $H := L^2(-1, 1)$, et V le sous-espace des fonctions continues sur $[-1, 1]$. Si on prend $f_0 = \chi_{[0,1]}$, elle n'a pas de projection sur V (pourquoi ?)

Exercice 12.10. Soit V un sous-espace vectoriel de H . Alors $(V^\perp)^\perp$ est l'adhérence de V . En particulier, V est dense dans H si et seulement si $V^\perp = \{0\}$.

Dans un espace de Banach, aussi bien l'unicité que l'existence de la projection peuvent ne pas être réalisés. Par exemple, dans \mathbb{R}^2 muni de la norme ℓ^∞ , le point $(0, 1)$ a une infinité de projections sur la droite $\{y = 0\}$.

Exercice 12.11. Voici un exemple où le minimum n'est pas du tout réalisé.

On considère $E := \{f \in \mathcal{C}([0, 1]) : f(0) = 0\}$ muni de la norme uniforme. L'ensemble $C := \{g \in E : \int_0^1 g(t)dt = 0\}$ est un convexe fermé. On considère la fonction $f(t) = t$. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver $g \in C$ telle que $\|f - g\|_\infty \leq \frac{1}{2} + \varepsilon$, mais que pour tout $g \in C$, $\|f - g\|_\infty > \frac{1}{2}$ (indication : on peut raisonner par contradiction et considérer $\int_0^1 (f - g)$.)

Une autre conséquence du théorème de projection est qu'un sous-espace vectoriel fermé de H admet toujours un espace supplémentaire fermé (ce n'est pas toujours vrai dans les espaces de Banach, vous trouverez un contre-exemple – compliqué – dans le sujet d'écrit d'analyse de 2013, partie VI).

Théorème 12.12. Soit V un sous-espace vectoriel fermé de H , alors $H = V \oplus V^\perp$, c'est-à-dire que pour tout $x \in H$ il existe un unique couple $(y, z) \in V \times V^\perp$ tel que $x = y + z$, et les applications qui à x associent y et z sont continues.

Démonstration. L'unicité résulte du fait que le seul vecteur orthogonal à lui-même est 0. Pour l'existence, on prend $y =$ projection orthogonale de x sur V , alors $z := x - y \in V^\perp$, et on vérifie que c'est la projection orthogonale de x sur V^\perp . □

12.3. Dual d'un espace de Hilbert. Le fait essentiel est qu'un espace de Hilbert s'identifie isométriquement à son dual (ce qui permet dans ce cadre d'éviter le théorème de Hahn-Banach).

Théorème 12.13. (de représentation de Riesz) Soit F une forme linéaire continue sur H , alors il existe un unique $y \in H$ tel que $F(x) = \langle x, y \rangle$.

L'application Φ qui à F associe y est une isométrie anti-linéaire (pour $\lambda \in \mathbb{C}$, on aura $\Phi(\lambda F) = \bar{\lambda}\Phi(F)$).

Démonstration. Unicité : s'il y avait deux solutions y et y' , alors $y - y' \in H^\perp$, donc $y - y' = 0$.

Existence : soit $V := \ker F$. C'est sous-espace vectoriel fermé. Si $x, x' \in V^\perp$ et $F(x) = F(x')$, alors $x - x' \in V \cap V^\perp = \{0\}$. Si $F \neq 0$, il existe $z \in V^\perp \setminus \{0\}$, et donc $F(\mathbb{C}z) = \mathbb{C}$ et tout vecteur de V^\perp peut s'écrire sous la forme λz pour un certain $\lambda \in \mathbb{C}$.

Soit $y := \frac{\overline{F(z)}}{\|z\|^2} z$. Un calcul montre que $F(y) = \langle y, y \rangle$. Si $x \in H$, alors $x = x' + \lambda y$, avec $x' \in V$, donc $F(x) = \lambda F(y) = \langle \lambda y, y \rangle = \langle x, y \rangle$. \square

Ce théorème a une foule de conséquences. Par exemple, tout espace de Hilbert est réflexif, c'est-à-dire isomorphe à son bidual (le dual de son dual). D'autres espaces de Banach sont réflexifs : c'est le cas des espaces L^p , pour $1 < p < +\infty$ (vous pouvez le vérifier à la main dans le cas des espaces ℓ^p) ; mais pas de l'espace L^1 . Voir aussi l'exemple 10.2.

De façon plus concrète, si $H \subset L^2(E)$ vérifie que pour $a \in E$, l'application d'évaluation en a , $f \mapsto f(a)$, est continue (cela suppose tout d'abord qu'elle soit bien définie, et donc que H soit un sous-espace constitué de classes de fonctions pour l'égalité presque partout qui admettent un représentant dont la valeur en a ne soit pas ambiguë, par exemple que $H \subset \mathcal{C}(E)$). Alors il existe une fonction $k_a \in H$, appelée *noyau reproduisant*, telle que $f(a) = \langle f, k_a \rangle = \int_E f \overline{k_a}$.

Exemple 12.14. Prenons $E = \mathbb{D}$, $H := \text{Hol}(\mathbb{D}) \cap L^2(\mathbb{D})$ (l'espace de Bergman, espace des fonctions holomorphes qui sont de module carré intégrable pour la mesure de Lebesgue habituelle de $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$). Alors la formule de la moyenne (d'aire) sur un disque de rayon $1 - |a|$ montre que l'application d'évaluation en a est continue sur H . Le noyau de Bergman est donné par $k_a(z) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{(1 - z\bar{a})^2}$; on peut le calculer en utilisant le développement des fonctions holomorphes en série entière ou en calculant d'abord k_0 (c'est facile, pourquoi ?) et en utilisant les automorphismes de Möbius du disque unité.

12.4. Bases hilbertiennes. Un système de vecteurs $(e_i, i \in \mathcal{I})$ est dit *normé* si pour tout i , $\|x_i\| = 1$, *orthogonal* si pour tout $i \neq j$, $\langle x_i, x_j \rangle = 0$, et *orthonormé* s'il est à la fois orthogonal et normé.

Théorème 12.15. (*Inégalité de Bessel*)

Soit (e_1, \dots, e_n) un système orthonormé (fini). Alors pour tout $x \in H$,

$$\sum_{i=1}^n |\langle x, e_i \rangle|^2 \leq \|x\|^2.$$

Démonstration. Posons $V := \text{Vect}(e_1, \dots, e_n)$ et $y := \sum_{i=1}^n \langle x, e_i \rangle e_i \in V$. Alors $x - y \in V^\perp$ (calculer $\langle x - y, e_i \rangle$ pour chaque i), donc y est la projection orthogonale de x sur V et $\|x\|^2 = \|x - y\|^2 + \|y\|^2 \geq \|y\|^2 = \sum_{i=1}^n |\langle x, e_i \rangle|^2$. \square

Un système de vecteurs $(e_i, i \in \mathcal{I})$ est dit *complet* si $\text{Vect}(e_i, i \in \mathcal{I})$ est dense dans H .

Exercice 12.16. Le système $(e_i, i \in \mathcal{I})$ est complet si et seulement si : $\langle x, e_i \rangle = 0$ pour tout i implique que $x = 0$.

Définition 12.17. Un système de vecteurs $(e_i, i \in \mathcal{I})$ est une *base hilbertienne* de H s'il est orthonormé et complet.

Attention, dès que l'espace est de Hilbert et de dimension infinie, une base hilbertienne n'est pas une base (au sens algébrique). Par exemple, si on prend des coefficients complexes $(\alpha_i, i \in \mathcal{I})$, alors dès que $(|\alpha_i|^2, i \in \mathcal{I})$ est une famille sommable avec un nombre infini de termes non nuls, le vecteur $x := \sum_i \alpha_i e_i$ a un sens dans H (cela se démontre en voyant qu'une suite de sommes partielles est de Cauchy, grâce au théorème de Pythagore ; attention, ça ne suit pas de la Proposition 8.11), mais on ne peut jamais écrire x comme combinaison linéaire finie des e_i .

Pour simplifier les notations (et parce que cela couvre la plupart des cas intéressants), nous allons restreindre désormais notre attention aux bases hilbertiennes dénombrables.

Un espace de Banach est dit *séparable* s'il contient une suite dense de vecteurs. Par exemple, les espaces $\ell^p, 1 \leq p < +\infty$, sont séparables. L'espace ℓ^∞ ne l'est pas. Plus généralement, pour Ω un ouvert de \mathbb{R}^n , les espaces $L^p(\Omega)$ sont séparables, et $L^\infty(\Omega)$ ne l'est pas.

L'espace $\mathcal{C}([a, b])$ est séparable (pensez au théorème de Weierstrass). Le sujet d'écrit d'analyse de 2013, partie IV, question 4, vous donne une démonstration du fait que $\mathcal{C}([0, 1])^*$ n'est pas séparable.

Lemme 12.18. Pour un espace de Hilbert H , les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (1) H est séparable ;
- (2) H admet un système complet dénombrable ;
- (3) H admet une base hilbertienne dénombrable.

Démonstration laissée au lecteur. Pour montrer l'équivalence des deux dernières propriétés, il faut utiliser le procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt.

Théorème 12.19. Soit H un espace de Hilbert (séparable) et $(e_n, n \in \mathbb{N}^*)$ une base hilbertienne de H . Alors pour tout $x \in H$,

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle e_n \text{ et } \|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n \rangle|^2.$$

Démonstration. L'inégalité de Bessel implique que pour tout $N, \sum_{n=1}^N |\langle x, e_n \rangle|^2 \leq \|x\|^2$, donc la somme converge et $\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n \rangle|^2 \leq \|x\|^2$. En particulier, pour $N \leq M$ assez grands, $\|\sum_{n=N}^M \langle x, e_n \rangle e_n\|^2 = \sum_{n=N}^M |\langle x, e_n \rangle|^2 \leq \varepsilon$, donc la suite des sommes partielles (vectorielles) $\sum_{n=1}^N \langle x, e_n \rangle e_n$ est une suite de Cauchy, donc convergente. Notons provisoirement x' sa limite.

On voit par passage à la limite que pour tout $n \in \mathbb{N}^*, \langle x', e_n \rangle = \langle x, e_n \rangle$, donc $\langle x' - x, e_n \rangle = 0$ pour tout n , et comme le système $(e_n, n \in \mathbb{N}^*)$ est complet, on a $x = x'$.

La norme étant continue, $\|x\|^2 = \lim_{N \rightarrow \infty} \|\sum_{n=1}^N \langle x, e_n \rangle e_n\|^2 = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N |\langle x, e_n \rangle|^2$.
□

Un sous-produit de ce théorème est que tout espace de Hilbert séparable est isométrique à ℓ^2 . Ce fait n'est utile que quand on dispose d'une bonne base hilbertienne.

Exemple 12.20. Soit $H = L^2\left((-\pi, \pi), \frac{dx}{2\pi}\right)$. Soit $e_n(t) := e^{int}$. Alors $(e_n, n \in \mathbb{Z})$ est une base hilbertienne. La partie difficile est de montrer que c'est un système complet ; on le fait en général en montrant que les sommes de Féjer convergent uniformément vers f quand f est continue et périodique (c'est-à-dire $f(0) = f(2\pi)$), puis en utilisant la densité des fonctions continues périodiques dans L^2 .

Précisons les notations : pour $f \in H$, le n -ième coefficient de Fourier de f est $c_n(f) := \langle f, e_n \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt$. La n -ième somme partielle de la série de Fourier est $S_n(f)(t) := \sum_{k=-n}^n c_k(f) e^{ikt}$. La n -ième somme de Féjer est $K_n(f) := \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n S_k(f)$.

Exemple 12.21. Soit $A^2(\mathbb{D})$ l'espace de Bergman (exemple 12.14). Alors $(z^n, n \in \mathbb{N})$ est un système orthogonal et $(z^n \sqrt{n+1}, n \in \mathbb{N})$ est un système orthonormé (intégrer en coordonnées polaires).

C'est en fait une base hilbertienne de $A^2(\mathbb{D})$. Il suffit de voir que si $\langle f, z^k \rangle = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, alors $f = 0$. En remarquant que

$$\langle f, z^k \rangle = \lim_{r \rightarrow 1, r < 1} \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{D}} f(z) \bar{z}^k dx dy,$$

on voit que si $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, alors $\langle f, z^k \rangle = \frac{a_k}{k+1}$, et on conclut par le principe du prolongement analytique.

Exemple 12.22. (Espace de Hardy)

Ici nous partons de la base hilbertienne pour construire l'espace. On voudrait considérer les fonctions 2π -périodiques telles que $c_n(f) = 0$ pour $n < 0$. On prend $z = e^{it}$, et on appelle $H^2(\mathbb{D})$ le complété de l'espace des polynômes (holomorphes) en z pour la norme de $L^2(\partial\mathbb{D}, \frac{dt}{2\pi})$. Le système $(z^n, n \in \mathbb{N})$ est une base hilbertienne par construction, donc toute somme de la forme $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, où $(a_n) \in \ell^2$, a un sens dans l'espace, et $\|f\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2$.

Cela définit aussi une série entière dont le rayon de convergence est au moins 1, donc une fonction holomorphe sur \mathbb{D} . Les calculs ci-dessus montrent que, en tant qu'espaces de fonctions holomorphes, $H^2(\mathbb{D}) \subset A^2(\mathbb{D})$ (l'inclusion est stricte). Attention ! Les fonctions de $H^2(\mathbb{D})$ ne sont pas en général continues jusqu'à $\partial\mathbb{D}$; le théorème de Fatou montre que les limites non-tangentes de f existent pour presque tout $t \in (-\pi, \pi)$, et la fonction ainsi obtenue est bien dans $L^2(\partial\mathbb{D}, \frac{dt}{2\pi})$. C'est plus délicat et nous ne le démontrerons pas.

Dans tout espace de Hilbert de fonctions sur un sous-ensemble de \mathbb{R} (en général un sous-espace de L^2 pour une mesure idoine) dans lequel l'ensemble des fonctions polynômes est dense, autrement dit le système $(1, x, x^2, \dots)$ est complet, le procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt fournit une suite de polynômes indexée par leur degré, orthogonaux par rapport au produit hermitien considéré, qui forment une base hilbertienne de l'espace. On parle alors de *polynômes orthogonaux*. Ils ont beaucoup été utilisés dans des problèmes d'approximation de fonctions, par exemple.

Exemple 12.23. (Polynômes de Hermite)

On considère l'espace $H = L^2(\mathbb{R}, e^{-2\pi x^2}) := \{f \text{ mesurable} : \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 e^{-2\pi x^2} dx < +\infty\}$. On admet que les polynômes sont denses dans cet espace (c'est le point délicat). On pose

$$h_n(x) := e^{\pi x^2} \left(\frac{d}{dx}\right)^n \left(e^{-2\pi x^2}\right), \quad H_n(x) := e^{\pi x^2} h_n(x).$$

On montre en intégrant par parties que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^k H_n(x) e^{-2\pi x^2} dx = 0 \text{ pour } 0 \leq k < n,$$

et donc que les H_n forment un système orthogonal dans H .

Donc (h_n) est un système orthogonal dans $L^2(\mathbb{R})$. Si on définit la transformation de Fourier par $\mathcal{F}(f)(\xi) := \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-2\pi i \xi t} dt$ pour $f \in L^1 \cap L^2(\mathbb{R})$, et qu'on la prolonge par continuité à $L^2(\mathbb{R})$ (puisque $\|\mathcal{F}(f)\|_{L^2(\mathbb{R})} = \|f\|_{L^2(\mathbb{R})}$), alors (h_n) donne une base de diagonalisation de la transformée de Fourier. Cela s'obtient à partir de la relation de récurrence $h_n(x) = h'_{n-1}(x) - 2\pi x h_{n-1}(x)$.

13. OPÉRATEURS SUR LES ESPACES DE HILBERT

Un opérateur est simplement une application linéaire continue d'un espace de Hilbert (ou de Banach au demeurant) dans un autre (voire le même). Par exemple, toute projection orthogonale sur un sous-espace fermé (non réduit à $\{0\}$) est un opérateur de norme 1 de H dans lui-même.

13.1. Exemples ; spectre.

Exemple 13.1. (Décalage [à droite], ou "shift")

$S : \ell^2 \rightarrow \ell^2$ est défini par $S(u)_n := u_{n-1}$ pour $n \geq 1$, $S(u)_0 = 0$, autrement dit $(u_0, u_1, u_2, \dots) \mapsto (0, u_0, u_1, \dots)$. On a $\|Su\| = \|u\|$, et en particulier S est injectif, mais n'est pas surjectif.

Si on utilise l'isométrie de ℓ^2 avec l'espace de Hardy (exemple 12.22), on voit que $S(f)(z) = zf(z)$. Ce point de vue a permis de caractériser les sous-espaces vectoriels fermés $V \subset \ell^2$ tels que $S(V) \subset V$ (A. Beurling, années 1940 – et ce n'est pas un résultat facile).

Soit I_H l'identité sur H un espace de Hilbert. On dit qu'un opérateur $T : H_1 \rightarrow H_2$ admet un *inverse à droite* si il existe $T_1 : H_2 \rightarrow H_1$ tel que $TT_1 = I_{H_2}$. On dit que T admet un *inverse à gauche* si il existe $T_1 : H_2 \rightarrow H_1$ tel que $T_1T = I_{H_1}$. Si $H_1 = H_2 = H$, on dit que T est *inversible* si il existe T_1 tel que $TT_1 = T_1T = I_H$.

Le décalage S admet un inverse à gauche, mais pas à droite.

Exemple 13.2. (Opérateurs de multiplication)

Soit Ω un espace mesuré (si vous préférez, prenez un ouvert de \mathbb{R}^n avec la mesure de Lebesgue ou une variante). Soit $m \in L^\infty(\Omega)$, alors $f(x) \mapsto m(x)f(x)$ définit un opérateur sur $L^2(\Omega)$.

Exercice : montrez que cette application linéaire ne peut être bornée que si $m \in L^\infty(\Omega)$. Plus précisément, si m est une fonction mesurable sur Ω telle que pour tout $N > 0$, l'ensemble $\{x : |m(x)| \geq N\}$ est de mesure positive, alors on peut construire une suite de fonctions $f_N \in L^2(\Omega)$ telle que $\|f_N\| = 1$ mais $\|mf_N\| \rightarrow +\infty$. Montrer de la même manière que la norme de l'opérateur de multiplication vaut $\|m\|_\infty$.

Définition 13.3. Le spectre d'un opérateur $T : H \rightarrow H$ est $\sigma(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} : T - \lambda I_H \text{ n'est pas inversible}\}$.

Proposition 13.4. $\sigma(T)$ est non-vide, compact, contenu dans $D(0, \|T\|)$.

Les détails de la démonstration sont laissés au lecteur. Il faut d'abord vérifier que $(I - zT)^{-1}$ est bien défini, et donné par la série entière convergente à valeurs opérateurs $\sum_{k \geq 0} z^k T^k$ quand $|z| < 1/\|T\|$.

Pour le premier point, raisonner par contradiction en appliquant le théorème de Liouville à la fonction $z \mapsto \langle (zI - T)^{-1}(x), y \rangle$ pour tous $x, y \in H$.

Pour le troisième point, appliquer directement la remarque liminaire. Pour le deuxième, il suffit de montrer que le complémentaire du spectre est ouvert ; factoriser de façon appropriée pour se ramener à la remarque liminaire.

Il est facile de voir que si x est un vecteur propre pour T avec la valeur propre associée λ , alors $\lambda \in \sigma(T)$. La réciproque est fautive. Par exemple, $0 \in \sigma(S)$, mais 0 n'est pas valeur propre de S . En fait, $\sigma(S) = \overline{\mathbb{D}}$, mais S n'a aucune valeur propre (plus difficile).

13.2. Opérateur adjoint.

Définition 13.5. L'adjoint d'un opérateur $T : H_1 \rightarrow H_2$ est l'unique opérateur $T^* : H_2 \rightarrow H_1$ tel que pour tout $x \in H_1, y \in H_2$, $\langle Tx, y \rangle_2 = \langle x, T^*y \rangle_1$.

Remarque : on pourrait donner la définition dans le cadre plus général des espaces de Banach, on obtiendrait un opérateur entre les duaux respectifs.

En dimension finie, si on a une application linéaire T dont la matrice dans une base orthonormée est M , la matrice de T^* sera ${}^t \overline{M}$ (la conjuguée complexe de la transposée).

Démonstration. L'application $x \mapsto \langle Tx, y \rangle_2$ est une forme linéaire continue sur H_1 , donc il existe un unique vecteur $z \in H_1$ tel que $\langle Tx, y \rangle_2 = \langle x, z \rangle_1$.

On pose $T^*y = z$. Pour une fois, la démonstration de linéarité est intéressante : soient $\lambda \in \mathbb{C}, y_1, y_2 \in H_2$. Alors on vérifie que $\langle Tx, \lambda y_1 + y_2 \rangle_2 = \langle x, \lambda T^*y_1 + T^*y_2 \rangle_1$; par unicité dans le théorème de représentation de Riesz, $T^*(\lambda y_1 + y_2) = \lambda T^*y_1 + T^*y_2$.

Enfin, $|\langle Tx, y \rangle_2| \leq \|Tx\|_2 \|y\|_2 \leq \|T\| \|x\|_1 \|y\|_2$, donc la norme de la forme linéaire est $\leq \|T\| \|x\|_1$, donc $\|z\| \leq \|T\| \|x\|_1$, ce qui montre que $\|T^*\| \leq \|T\|$, en particulier T^* est continue. \square

Proposition 13.6. $\|T^*\| = \|T\|$.

Démonstration laissée au lecteur ; montrer et utiliser le fait que $(T^*)^* = T$.

Exemple 13.7. L'adjoint du décalage à droite est donné par $(S^*u)_n = u_{n+1}$ autrement dit $(u_0, u_1, u_2, \dots) \mapsto (u_1, u_2, u_3, \dots)$. C'est un opérateur contractant ($\|Su\| \leq \|u\|$), surjectif, non injectif.

Exemple 13.8. L'adjoint de l'opérateur de multiplication par m est donné par la multiplication par \overline{m} (la fonction conjuguée complexe).

On a vraiment envie de considérer l'adjoint de l'opération de dérivation dans L^2 en utilisant l'intégration par parties. Evidemment, il faut prendre des pincettes, car la dérivation n'est pas un opérateur borné dans L^2 ! Mais beaucoup des applications intéressantes (et trop avancées pour nous) utilisent cette idée.

Proposition 13.9. $T(H)^\perp = \text{Ker } T^*$, et donc en passant à l'orthogonal $\overline{T(H)} = (\text{Ker } T^*)^\perp$.

Démonstration laissée au lecteur.

Définition 13.10. Un opérateur $T : H \rightarrow H$ est *autoadjoint* si $T^* = T$.

On remarquera que si

Exercice 13.11. Si T est autoadjoint, alors $\|T\| = \sup_{\|x\|=1} |\langle Tx, x \rangle|$.

Lemme 13.12. Si pour tout $x \in H$, $\langle Tx, x \rangle \in \mathbb{R}$, alors T est autoadjoint.

Proof. Pour tous $x, y \in H$,

$$\langle Tx, y \rangle + \overline{\langle x, Ty \rangle} = \langle T(x+y), x+y \rangle - \langle Tx, x \rangle - \langle Ty, y \rangle \in \mathbb{R},$$

donc $\text{Im} \langle x, Ty \rangle = \text{Im} \langle Tx, y \rangle$.

De même,

$$-i \langle Tx, y \rangle + \overline{\langle x, iTy \rangle} = \langle T(x+iy), x+iy \rangle - \langle Tx, x \rangle - \langle iTy, iy \rangle \in \mathbb{R},$$

donc $\text{Re} \langle x, Ty \rangle = \text{Re} \langle Tx, y \rangle$. Finalement, $\langle x, Ty \rangle = \langle Tx, y \rangle$, i.e. $T^* = T$. □

13.3. Lax-Milgram ; un problème variationnel. On rappelle la notion de forme sesquilinéaire ; c'est une application $\varphi : H \times H \rightarrow \mathbb{C}$ telle que $x \mapsto \varphi(x, y)$ est linéaire pour tout y et $y \mapsto \overline{\varphi(x, y)}$ est linéaire pour tout x . Elle est continue si et seulement si il existe $C > 0$ telle que $|\varphi(x, y)| \leq C \|x\| \|y\|$.

Si φ est sesquilinéaire et continue, le théorème de représentation de Riesz montre qu'il existe une unique application linéaire continue $A : H \rightarrow H$ telle que $\varphi(x, y) = \langle Ax, y \rangle$.

Théorème 13.13. (*Lax-Milgram*)

Soit φ comme ci-dessus et $J(x) := \frac{1}{2} \varphi(x, x) - \text{Re} \langle b, x \rangle$. On suppose que φ est coercive, c'est-à-dire qu'il existe $k > 0$ tel que $\varphi(x, x) \geq k \|x\|^2$, pour tout $x \in H$.

Alors J atteint son minimum en unique point x_b qui est caractérisé par $Ax_b = b$ (donc A est inversible) ou de façon équivalente $\langle Ax, y \rangle = \varphi(x, y) = \overline{\langle b, y \rangle}$ pour tout $y \in H$.

Démonstration. Pour tout $x \in H$, $\|x\| \|Ax\| \geq \langle Ax, x \rangle \geq k \|x\|^2$, donc A est injectif, et continu parce φ est continue. L'image de A est fermée, parce que si $Ax_n \rightarrow y$, alors (Ax_n) est de Cauchy, donc d'après l'inégalité ci-dessus, (x_n) est de Cauchy, donc converge vers x , donc $y = Ax$ par continuité. Or $\overline{A(H)} = (\text{Ker } A^*)^\perp = (\text{Ker } A)^\perp = \{0\}^\perp = H$, donc A est bijectif, et bicontinu par l'inégalité.

On pose $x_b := A^{-1}b$. Alors pour tout $x \in H$, en utilisant le fait que d'après le Lemme 13.12, $\langle Ax, x_b \rangle = \overline{\langle Ax_b, x \rangle}$,

$$\begin{aligned} 2(J(x) - J(x_b)) &= \langle Ax, x \rangle - \langle Ax_b, x_b \rangle - 2 \text{Re} \langle Ax_b, x \rangle + 2 \text{Re} \langle Ax_b, x_b \rangle \\ &= \langle A(x - x_b), x - x_b \rangle \geq \|x - x_b\|^2 \geq 0, \end{aligned}$$

ce qui démontre que le minimum de J est atteint en x_b . □

Pour les applications, il est utile de considérer un corollaire dans une situation un peu plus compliquée. On suppose qu'on a trois espaces de Hilbert continûment et

densément plongés les uns dans les autres, $E \subset F \subset G$. On a un opérateur continu T de E dans G , telle qu'il existe une forme sesquilinéaire continue φ sur $F \times F$ telle que pour tout $x \in E$, $y \in F$,

$$\varphi(x, y) = \langle Tx, y \rangle_G.$$

On appellera *solution faible* de l'équation $Tx = z$ tout $s \in F$ tel que pour tout $y \in F$, $\varphi(s, y) = \langle z, y \rangle_G$.

Voici un exemple typique : $G = L^2(a, b)$, $F = H^1(a, b)$ (l'espace de Sobolev défini ci-dessus), $E = H^2(a, b)$ (l'ensemble des fonctions C^1 dont la dérivée est dans $H^1(a, b)$); on prend le produit scalaire usuel sur G , $\langle f, g \rangle_G := \int_a^b f \bar{g}$, sur F , $\langle f, g \rangle_G := \langle f, g \rangle_G + \langle f', g' \rangle_G$, sur E , $\langle f, g \rangle := \langle f, g \rangle_G + \langle f', g' \rangle_G + \langle f'', g'' \rangle_G$.

Ceci est fait pour considérer des opérateurs comme $T(f) = af + bf' + cf''$, où a, b, c sont des fonctions suffisamment régulières.

Théorème 13.14. *Soit φ comme ci-dessus et $z \in G$. On pose $J(y) := \frac{1}{2}\varphi(y, y) - \operatorname{Re}\langle y, z \rangle$. Si φ est coercive, alors*

- (1) *Pour tout $z \in G$, il existe une unique solution faible notée $S(z) \in F$;*
- (2) *S est continue, injective, et $\langle S(z), z \rangle \geq 0$ pour tout z ;*
- (3) *Pour tout $x \in E$, $S(Tx) = x$;*
- (4) *$S(z)$ minimise J sur F .*

Proof. L'application $y \mapsto \langle y, z \rangle_G$ est une forme linéaire sur F , continue par composition, donc par le Théorème de Riesz il existe $b_z \in F$ tel que $\langle y, z \rangle_G = \langle y, b_z \rangle_F$ pour tout $y \in F$. Le vecteur b_z dépend linéairement et continûment de z . Comme dans le théorème de Lax-Milgram, $\varphi(x, y) = \langle Ax, y \rangle_F$ avec $A \in \mathcal{L}(F, F)$, qui est inversible. On pose $S(z) := A^{-1}b_z$.

Alors $\varphi(S(z), y) = \langle A(A^{-1}b_z), y \rangle_F = \langle z, y \rangle_G$. L'unicité suite de la densité de F , et implique (3); la linéarité suit de l'unicité, la continuité du fait que $z \mapsto b_z$ est continue. (4) est conséquence du Théorème de Lax-Milgram.

Si $S(z) = 0$, alors $b_z = 0$, donc la forme linéaire $\langle \cdot, z \rangle_G$ s'annule pour tout $y \in F$ et $z = 0$ par densité de F , donc S est injective. Finalement, $\langle z, S(z) \rangle_G = \varphi(S(z), S(z)) \geq 0$ par coercivité. \square

Voici une application (à grands traits).

On prend $G = L^2(a, b)$, $F = H_0^1(a, b)$ (le complété des fonctions à support compact dans $]a, b[$ pour la norme de H^1), $E = H_0^2(a, b)$ (le complété des fonctions à support compact dans $]a, b[$ pour la norme de H^2).

On prend $m \in L^\infty(a, b)$ une fonction qui vérifie $m(x) \geq \delta > 0$, et on pose $\varphi(u, v) := \int_a^b u \bar{v} + mu' \bar{v}'$, où la dérivée est définie au sens général de l'espace de Sobolev. On voit que φ est continue et coercive : $\varphi(f, f) = \int_a^b |f|^2 + m|f'|^2 \geq \min(1, \delta) \|f\|_F^2$.

On pose $T(u) = u - (mu)'$. Une intégration par parties montre que $\varphi(u, v) = \langle Tu, v \rangle_G$ quand les fonctions sont assez régulières ; on passe au cas général par densité. Le théorème montre donc que $Tu = g$ admet des solutions faibles pour tout $g \in L^2$.

Dans les bons cas, on peut montrer qu'une solution faible doit être en fait une solution forte.

13.4. Opérateurs compacts.

Définition 13.15. Soient X_1, X_2 deux espaces de Banach, T une application linéaire de X_1 dans X_2 , alors on dit que T est *compact* si $T(B_{X_1}(0, 1))$ est relativement compact dans X_2 (c'est-à-dire que son adhérence est compacte) ; de façon équivalente, si pour toute suite bornée $(x_n)_n \subset X_1$, alors $(T(x_n))_n$ admet une sous-suite convergente.

Remarque : la propriété implique immédiatement que T est un opérateur borné.

En général, même s'ils peuvent avoir une norme aussi grande que l'on veut, on pensera aux opérateurs compacts comme des "perturbations" d'autres opérateurs. Un opérateur inversible entre des espaces de Banach de dimension infinie n'est jamais compact, par exemple.

Exemple 13.16. Tout opérateur de rang fini est compact.

Exemple 13.17. Soit $f \in \mathcal{C}([0, 1])$, et $Vf(x) := \int_0^x f(t)dt$. Alors $V : \mathcal{C}([0, 1]) \rightarrow \mathcal{C}([0, 1])$ est compact (c'est dû au théorème d'Ascoli).

V est appelé *opérateur de Volterra*. On peut définir par la même formule un opérateur de $L^2(0, 1)$ dans $L^2(0, 1)$ (pourquoi l'intégrale converge-t-elle ? Pourquoi le résultat est-il à nouveau dans L^2 , et en fait bien mieux ?)

Montrer que l'image par V de la boule unité de $L^2(0, 1)$ est une famille de fonctions qui sont de Hölder d'exposant $1/2$ avec une constante uniformément bornée. En conclure que V est aussi un opérateur compact de $L^2(0, 1)$ dans $L^2(0, 1)$.

Exercice 13.18. Soit $(d_n)_n \subset \mathbb{C}$ et $D : \ell^2 \rightarrow \ell^2$ l'opérateur donné par $(Du)_n := d_n u_n$. Montrer que D est compact si et seulement si $d_n \rightarrow 0$.

Théorème 13.19. *L'ensemble des opérateurs compacts est fermé (pour la topologie donnée par la norme d'opérateur).*

Démonstration. On commence par remarquer qu'un sous-ensemble A d'un espace X complet est relativement compact si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$, il peut être recouvert par un nombre fini de boules de rayon ε centrées en A . Si \bar{A} est compact, c'est une conséquence de la propriété de Borel-Lebesgue appliquée au recouvrement $\bar{A} \subset \cup_{a \in A} B(a, \varepsilon)$.

Réciproquement, soit $(x_n)_n \subset A$. Pour tout m , il existe un recouvrement fini de A par des boules $B(a_i, \frac{1}{m})$. Il existe donc $a_1 \in A$ telle que $B(a_1, \frac{1}{m})$ contienne une infinité de points de $(x_n)_n$. On forme une suite extraite $(x_{1,n}) = (x_n) \cap B(a_1, \frac{1}{m})$. Si on suppose $(x_{k,n})$ donnée, et contenue dans une boule $B(a_k, \frac{1}{k})$, alors il existe a_{k+1} telle que $B(a_{k+1}, \frac{1}{k+1})$ contienne une infinité de points de $(x_{k,n})$, et on définit $(x_{k+1,n})$ en prenant l'intersection avec $B(a_{k+1}, \frac{1}{k+1})$.

La suite $(x_{m,m})$ est (pour $m \geq N$) une suite extraite de $x_{N,m}$, donc la suite $(x_{m,m})$ est de Cauchy, donc convergente dans \bar{A} .

Soit $(K_n)_n$ une suite d'opérateurs compacts, et $K = \lim_n K_n$. Soit $\varepsilon > 0$, alors il existe N tel que $\|K - K_N\| \leq \varepsilon/2$. On peut trouver un recouvrement fini de $K_N(B(0, 1))$ par des boules de la forme $B(x_i, \varepsilon/2)$. Alors $K(B(0, 1)) \subset \cup_i B(x_i, \varepsilon)$. \square

Un corollaire immédiat est que toute limite d'une suite d'opérateurs de rang fini est compacte. La réciproque est vraie.

Proposition 13.20. Soit H un espace de Hilbert. Un opérateur $T : H \rightarrow H$ est compact si et seulement si il est limite d'une suite d'opérateurs de rang fini.

Démonstration. Soit T un opérateur compact. Soit $\varepsilon > 0$. On peut recouvrir l'ensemble $T(B(0, 1))$ par $\cup_{k=1}^N B(x_k, \varepsilon)$. On pose $F := \text{Vect}\{x_1, \dots, x_N\}$, qui est un espace fermé. Soit P la projection orthogonale sur F , alors PT est de rang fini. Mais pour tout $y \in T(B(0, 1))$, la distance de y à F est $\leq \varepsilon$, donc pour tout $x \in H$ tel que $\|x\| \leq 1$, $\|T(x) - P(T(x))\| \leq \varepsilon$, donc $\|T - PT\| \leq \varepsilon$, et il est facile de construire une suite en prenant $\varepsilon = 1/n$. \square

Exercice 13.21. Montrer que si T est de rang fini r , il existe des vecteurs $x_j, y_j, 1 \leq j \leq r$, tels que $T(x) = \sum_{j=1}^r \langle x, y_j \rangle x_j$. En déduire l'expression de l'adjoint d'un opérateur de rang fini, puis montrer que si T est compact, alors T^* est compact.

Théorème 13.22. (*Alternative de Fredholm*)

Soit K un opérateur compact de H dans H , H espace de Hilbert. On pose $T := I + K$, où I désigne l'identité de H . Alors

- (1) $\text{Ker } T$ est de dimension finie ;
- (2) $T(H)$ est fermée, et $\text{codim } T(H) = \dim \text{Ker } T$;
- (3) La restriction $T : (\text{Ker } T)^\perp \rightarrow T(H)$ est une bijection bicontinue.

L'alternative de Fredholm est en général énoncée ainsi : on cherche à résoudre une équation fonctionnelle (différentielle, aux dérivées partielles. . .) de la forme $T(f) = g$. Alors, soit $\text{codim } T(H) = \dim \text{Ker } T = 0$ et il existe une solution f unique, pour tout $g \in H$; soit $\text{codim } T(H) = \dim \text{Ker } T = n > 0$ et l'équation a une solution à condition que g vérifie n conditions linéaires indépendantes, et dans ce cas l'ensemble des solutions est de dimension n . La difficulté consiste souvent à trouver l'espace H convenable.

Remarquons aussi que le résultat s'étend immédiatement à tout opérateur de la forme $T = T_0 + K$, où T_0 est inversible et K compact, en posant $T = T_0(I + T_0^{-1}K)$, puisque $T_0^{-1}K$ est compact.

Démonstration. (i). Si $\text{Ker } T$ était de dimension infinie, on pourrait trouver un système orthonormé infini $(e_n)_n$ dans $\text{Ker } T$. Mais alors $Ke_n = e_n$ pour tout n , et aucune sous-suite convergente ne peut être extraite de $(e_n)_n$ puisque $\|e_n - e_m\| = \sqrt{2}$ pour $n \neq m$.

(ii) et (iii). Puisque $(\text{Ker } T)^\perp$ est un supplémentaire de $(\text{Ker } T)$, c'est un fait général d'algèbre linéaire que $S := T|_{(\text{Ker } T)^\perp}$ est une bijection sur $T(H)$, continue par continuité de T .

Remarquons (et ceci est propre aux espaces de Hilbert) que si $y \in T(H)$, $S^{-1}(y)$ est l'antécédent de y de norme minimale (exercice ; nous n'en aurons pas besoin dans la suite de cette démonstration).

On va montrer que $T(H) = S(H)$ est fermée (donc un espace complet) ; la continuité de S^{-1} en découle par le théorème de l'application ouverte (ou peut se montrer directement, exercice).

Soit $S(H) \ni y_n \rightarrow y_\infty$. On va montrer que la suite $x_n := S^{-1}(y_n)$ reste bornée. Admettons-le un instant ; alors en passant à une sous-suite on peut supposer que $(K(x_n))$ converge, et donc $x_n = y_n - K(x_n) \rightarrow x_\infty \in H$, donc $T(x_\infty) = y_\infty$ par continuité et $y_\infty \in T(H) = S(H)$, cqfd.

Supposons maintenant qu'il existe une sous-suite de $(x_n)_n$, encore notée $(x_n)_n$, telle que $\|x_n\| \rightarrow +\infty$. En repassant à une sous-suite on peut supposer $\lim_n K\left(\frac{x_n}{\|x_n\|}\right) =$

$z \in (\text{Ker } T)^\perp$, et $\|z\| = 1$. Alors

$$0 = \lim_n \frac{y_n}{\|x_n\|} = \lim_n \frac{x_n}{\|x_n\|} + z,$$

l'existence de la dernière limite étant démontrée par celle de la première ! Rappelons-nous que $T(x_n) = y_n$, donc $T(z) = \lim_n T\left(\frac{-x_n}{\|x_n\|}\right) = -\lim_n \frac{y_n}{\|x_n\|} = 0$. Finalement, $z \in \text{Ker } T \cap (\text{Ker } T)^\perp = \{0\}$, contradiction. Donc (iii) est démontrée.

Il reste à montrer les énoncés sur les dimensions.

Traisons d'abord le cas particulier où $\text{Ker } T = \{0\}$. Supposons pour obtenir une contradiction que $T(H) \subsetneq H$. Définissons $H_n := T^n(H)$. Nous allons montrer par récurrence que $H_{n+1} \subsetneq H_n$. C'est vrai pour $n = 0$ par hypothèse. Si c'est vrai jusqu'au rang $n - 1$, soit $x \in H_n \setminus H_{n-1}$. Alors $T(x) \in H_{n+1}$, et si on avait $T(x) = T^n(y)$, on aurait (puisque $\text{Ker } T = \{0\}$) $x = T^{n-1}(y)$, contredisant le choix de x .

On peut donc choisir pour tout $n \geq 1$ un vecteur unitaire $x_n \in H_n^\perp \cap H_{n-1}$. Alors $T(x_n) \in H_n^\perp$ et donc $0 = \langle T(x_n), x_n \rangle = 1 + \langle K(x_n), x_n \rangle$. D'autre part, si $m < n$, $T(x_n) \in H_{n+1} \subset H_m$, $x_m \in H_m^\perp$, donc $\langle x_m, K(x_n) \rangle = \langle x_m, T(x_n) - x_n \rangle = 0$, donc

$$\|K(x_n) - K(x_m)\| \geq |\langle x_m, K(x_n) - K(x_m) \rangle| = |\langle x_m, -K(x_m) \rangle| = 1,$$

et aucune suite convergente ne peut être extraite de $(K(x_n))_n$ alors que $(x_n)_n$ est bornée, contradiction.

En général, comme K^* est aussi compact (exercice 13.21), $T^* = I + K^*$ a un noyau de dimension finie, donc par la Proposition 13.9, $\dim(T(H))^\perp$ est finie. Reste à montrer que $\dim \text{Ker } T = \dim \text{Ker } T^*$. Supposons que $\dim \text{Ker } T \leq \dim \text{Ker } T^*$, alors on a une projection orthogonale P de H sur $\text{Ker } T$, et une injection isométrique V de $\text{Ker } T$ dans $\text{Ker } T^*$. VP est de rang fini, donc $T_1 := T + VP = I + (K + VP)$ est toujours la perturbation de l'identité par un opérateur compact.

On va montrer que $T_1(H) = H$. Alors $H \subset T(H) + VP(H) \subset T(H) + \text{Ker } T^* \subset T(H) + T(H)^\perp = H$, donc toutes ces inclusions sont des égalités, et en particulier $VP(H) = \text{Ker } T^*$, donc $\dim \text{Ker } T = \dim \text{Ker } T^*$.

Pour montrer que $T_1(H) = H$, d'après le cas qui précède, il suffit de montrer que $\text{Ker } T_1 = \{0\}$. Supposons que $0 = T_1(x) = T(x) + VP(x)$, alors $T^*T(x) = -T^*VP(x) = 0$ puisque $VP(H) \subset \text{Ker } T^*$. Mais alors $\|T(x)\|^2 = \langle T(x), T(x) \rangle = \langle x, T^*T(x) \rangle = 0$, donc $T(x) = 0$, donc $VP(x) = 0$, et comme V est une isométrie, $P(x) = 0$, autrement dit $x \in (\text{Ker } T)^\perp$; mais d'autre part $0 = T_1(x) = T(x) + VP(x) = T(x)$, donc $x \in \text{Ker } T$, donc $x = 0$, cqfd. \square

14. RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

On trouve les bases de la topologie dans pratiquement tous les traités d'analyse au niveau licence/maîtrise, comme un de ceux de **Laurent Schwartz** par exemple.

Parmi les références récentes et bien adaptées à la préparation au concours (que je ne connais pas toutes), la meilleure me semble le livre d'**Hervé Queffélec**, *Topologie* (Dunod). On y trouvera des choses intéressantes sur la locale connexité, le théorème du point fixe, les applications du théorème de Baire... Pour les espaces de Hilbert, j'ai utilisé **N. Young**, *An Introduction to Hilbert Space* (Cambridge) ; on consultera aussi avec profit **Alain Guichardet**, *Intégration analyse hilbertienne* (Ellipses).

Un autre livre utile est celui de **Claude Wagschal**, *Topologie et Analyse fonctionnelle* (Hermann). Il a tendance à être un peu encyclopédique et un peu au-delà du niveau des programmes actuels de l'agrégation. Le petit livre de **Tisseron**, *Topologie*, est bien fait aussi.

Enfin, pour l'analyse en général, il y a les livres de **Walter Rudin** : *Principes d'Analyse Mathématique* (Ediscience), le plus élémentaire, mais avec déjà beaucoup d'exemples astucieux ; *Analyse Réelle et Complexe* (Dunod), une référence incontournable sur les fonctions holomorphes mais avec des chapitres brefs et très utiles sur les espaces de Banach ; enfin, si vous voulez creuser à fond les espaces vectoriels topologiques, *Functional Analysis* (McGraw Hill), mais je pense que vous ne l'utiliserez que ponctuellement.

Parmi les autres références, on trouve **V. Kromonornik**, *Précis d'Analyse réelle* (en deux volumes, Ellipses), qui a de bonnes applications mais passe un peu vite sur la topologie ; je n'ai pas regardé **Gonnord & Tosel**, *Topologie et Analyse fonctionnelle* (Ellipses), mais il s'annonce comme conçu pour l'agrégation ; enfin le livre d'analyse de **Gourdon** pour les classes préparatoires contient un solide chapitre sur la topologie (mais comme je le disais il n'est pas le seul, les manuels de Lelong-Ferrand & Arnaudiès m'ont occasionnellement servi, je pense que la version moderne par Arnaudiès & Fraysse peut servir aussi, et la liste n'est pas close).