

ANALYSE COMPLEXE, PARCOURS SPÉCIAL L3

NOTES DE COURS

PASCAL J. THOMAS

Pré-requis : analyse élémentaire dans \mathbb{R} , convergence uniforme, séries entières, séries de Fourier, calcul différentiel dans le plan (matrice jacobienne, arcs paramétrés, intégrales de fonctions de deux variables réelles). Dérivation des intégrales dépendant d'un paramètre.

On écrira en général $z = x + iy$ où x et y sont réels. On assimilera le nombre complexe $x + iy$ avec le point (x, y) du plan \mathbb{R}^2 . Par exemple, quand on parle du nombre réel x , qui est en particulier complexe, cela peut vouloir dire le point $(x, 0)$ de l'axe des abscisses, ou une coordonnée réelle. En général, ces ambiguïtés ne sont pas gênantes.

1. QUELQUES RAPPELS

Une série (numérique) est une suite définie par $U_n := \sum_{k=0}^n u_k$, où $(u_n)_n$ est une suite à valeurs réelles ou complexes. On la note $\sum u_n$. Le nombre (U_n) est appelé somme partielle. On dit que la série est convergente si $\lim_n U_n \in \mathbb{C}$, et dans ce cas on note $\lim_n U_n = \sum_{k=0}^{\infty} u_k$ (appelée somme de la série). On dit que la série est absolument convergente si $\sum |u_n|$ est convergente. Toute série absolument convergente est convergente, mais la réciproque est fautive.

Quand on étudie une série à termes positifs ou nuls, i.e. $u_k \geq 0$ pour tout k , alors la suite (U_n) est croissante et la série converge si et seulement si la suite $(U_n)_n$ est majorée. On écrit parfois $\sum_{k=0}^{\infty} u_k < \infty$. **Cette notation est interdite dans le cas où les termes ne sont pas positifs.**

Théorème 1. (Théorème de Fubini) Soit $(u_{j,k})_{j \geq 0, k \geq 0}$ une suite double à valeurs complexes. Si on a

$$\sum_{j=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{\infty} |u_{j,k}| \right) \text{ convergente,}$$

alors toutes les séries ci-dessous convergent et on a l'égalité :

$$\sum_{j=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{\infty} u_{j,k} \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{\infty} u_{j,k} \right).$$

Nous admettrons ce théorème, qui peut être démontré directement, ou à partir de la théorie de l'intégration de Lebesgue.

Définition 2. Etant données deux séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$, le Produit de Cauchy des deux séries est la série $\sum w_n$ dont le terme général est défini par

$$w_n := \sum_{k=0}^n u_k v_{n-k}.$$

Cette définition peut surprendre, mais elle est motivée par le cas où on a des séries entières (cf. section suivante) avec $u_n = a_n z^n$, $v_n = b_n z^n$: le terme w_n est ce qui sort quand on regroupe les termes de même degré dans le produit (formel) de $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ et $\sum_{n=0}^{\infty} v_n$.

Théorème 3. (*Théorème de Mertens*) *Si la série $\sum u_n$ est convergente et la série $\sum v_n$ est absolument convergente, alors la série produit est convergente et on a*

$$\sum_{n=0}^{\infty} w_n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} v_n \right).$$

Soient U_n, V_n, W_n les sommes partielles des trois séries considérées. Nous savons que $(\sum_{n=0}^{\infty} u_n)(\sum_{n=0}^{\infty} v_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} U_n V_n$ (produit de deux suites convergentes). Nous allons montrer que, étant donné un nombre $\delta > 0$ (petit), on peut trouver un indice N tel que pour $n \geq N$, $|W_{2n} - U_n V_n| < \delta$.

Puisqu'une suite convergente est bornée, il existe une constante $M > 0$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|u_n| \leq M, \quad |U_n| \leq M, \quad \sum_{k=0}^n |v_k| \leq M.$$

D'autre part, le critère de Cauchy implique que si on se donne $\varepsilon > 0$, alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, et pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$|U_{n+p} - U_n| \leq \varepsilon, \quad \sum_{k=n}^{n+p} |v_k| \leq \varepsilon.$$

Alors

$$\begin{aligned} W_{2n} - U_n V_n &= \sum_{0 \leq k \leq n-1, n+1 \leq j \leq 2n-k} u_j v_k + \sum_{n+1 \leq k \leq 2n, 0 \leq j \leq 2n-k} u_j v_k \\ &= \sum_{0 \leq k \leq n-1} v_k (U_{2n-k} - U_n) + \sum_{n+1 \leq k \leq 2n} v_k U_{2n-k}. \end{aligned}$$

Donc

$$|W_{2n} - U_n V_n| \leq \varepsilon \sum_{0 \leq k \leq n-1} |v_k| + M \sum_{n+1 \leq k \leq 2n} |v_k| \leq \varepsilon M + M \varepsilon,$$

que l'on peut majorer par δ en choisissant ε assez petit.

Il reste à voir que $w_{2n+1} = W_{2n+1} - W_{2n}$ tend vers zéro. Or

$$|w_{2n+1}| \leq \left| \sum_{k=0}^n v_k u_{2n+1-k} \right| + \left| \sum_{k=0}^n u_k v_{2n+1-k} \right| \leq \varepsilon \sum_{k=0}^n |v_k| + M \sum_{k=0}^n |v_{2n+1-k}| \leq 2M\varepsilon.$$

□

Définition 4. *Etant donnée une suite réelle $(u_n)_n$, on appelle limite supérieure de la suite :*

$$\limsup u_n := \lim_n (\sup \{u_k : k \geq n\})$$

Quand la suite admet une limite, finie ou infinie, elle est heureusement égale à la limite supérieure.

Mais une suite peut n'avoir aucune limite — exemple : $(-1)^n$ — alors que la limite supérieure existe toujours, éventuellement avec une valeur infinie, car la nouvelle

suite dont on prend la limite, $(\sup_{k \geq n} u_k)_n$, est monotone décroissante. On pose aussi $\liminf_n u_n := -\limsup_n(-u_n)$. Si la suite converge, alors $\lim_n u_n = \limsup_n u_n = \liminf_n u_n$.

C'est un fait (que nous admettrons — exercice !) que la limite supérieure est la plus grande des valeurs d'adhérence de $(u_n)_n$, tandis que la limite inférieure est la plus petite des valeurs d'adhérence de $(u_n)_n$ (toujours en prenant en compte les valeurs $+\infty$ et $-\infty$).

On peut écrire (exercice) une autre caractérisation avec des “ ε ”, qui est utile dans de nombreuses applications :

On a $s = \limsup_n u_n$ si et seulement si les deux propriétés suivantes sont vérifiées :

- (1) Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geq N$, alors $u_n \leq s + \varepsilon$.
- (2) Pour tout $\varepsilon > 0$ et pour tout $N \in \mathbb{N}$, il existe $n \geq N$ tel que $u_n \geq s - \varepsilon$.

Quand $s = +\infty$, vous devez remplacer $s + \varepsilon$ par $+\infty$ (et la première clause devient vide) et remplacer $s - \varepsilon$ par n'importe quel nombre fini. En d'autres termes, $\limsup_n u_n = +\infty$ si et seulement si la suite n'est pas majorée. L'analogie pour $s = -\infty$ est laissé au lecteur.

2. SÉRIES ENTIÈRES ET ANALYTICITÉ

2.1. Séries entières.

Définition 5. Une série entière est une série de fonctions de la forme $\sum_k a_k z^k$, avec $a_k, z \in \mathbb{C}$.

Théorème 6. Il existe $R \in [0, +\infty]$, appelé rayon de convergence, tel que pour tout $r < R$, la série est normalement convergente sur $\overline{D}(0, r)$, et pour tout z tel que $|z| > R$, $(a_k z^k)$ est non bornée.

De plus, R est donné par la formule d'Hadamard :

$$R = \frac{1}{\limsup_{k \rightarrow \infty} |a_k|^{1/k}}.$$

(Cette formule s'entend avec la convention $1/+\infty = 0$ et $1/0 = +\infty$).

Le disque ouvert $D(0, R)$ est appelé disque de convergence de la série entière.

2.2. Fonctions analytiques.

Définition 7. Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert. Une fonction $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ est dite analytique si pour tout $a \in \Omega$, il existe une série entière $\sum_k a_k z^k$ de rayon de convergence $R > 0$ et $r \leq R$ tel que $D(a, r) \subset \Omega$, et pour tout $z \in D(a, r)$,

$$(1) \quad f(z) = \sum_k a_k (z - a)^k.$$

Remarque : on pourrait dire simplement “localement développable en série entière”. Cette notion n'est pas limitée aux nombres complexes ; on peut la définir pour des fonctions de variable réelle, voire de variable matricielle.

Exemple : tout polynôme complexe est analytique, car

$$\sum_{k=0}^n a_k z^k = \sum_{k=0}^n a_k (a + (z - a))^k,$$

et il suffit de développer pour obtenir une série entière autour de a , qui n'a bien entendu qu'un nombre fini de termes non-nuls.

Exemple : toute fraction rationnelle est analytique en dehors de ses pôles, i.e. des racines de son dénominateur (une fois qu'elle est simplifiée).

Démonstration. Nous allons utiliser le fait bien connu que $\frac{1}{1-z} = \sum_{k=0}^{\infty} z^k$ quand $|z| < 1$, et la décomposition en éléments simples. Une fraction rationnelle s'écrit $R(z) = N(z)/D(z)$, où N et D sont des polynômes (complexes) qu'on peut supposer premiers entre eux après simplification des facteurs communs. On peut aussi supposer que le coefficient du terme de plus haut degré de D est 1. Rappelons que, grâce au Théorème Fondamental de l'Algèbre, on peut écrire

$$D(z) = (z - a_1)^{m_1} (z - a_2)^{m_2} \cdots (z - a_k)^{m_k},$$

où a_1, \dots, a_k sont les racines distinctes de D , $m_j \in \mathbb{N}^*$ est la multiplicité de a_j , et $m_1 + \cdots + m_k =: n$ est le degré de D . En faisant d'abord une division euclidienne, on peut écrire

$$R(z) = Q(z) + \frac{S(z)}{D(z)},$$

où Q, S sont des polynômes et $\deg S < n$, puis faire la décomposition en éléments simples

$$\frac{S(z)}{D(z)} = \sum_{j=1}^{m_1} \frac{c_{1,j}}{(z - a_1)^j} + \cdots + \sum_{j=1}^{m_k} \frac{c_{k,j}}{(z - a_k)^j}.$$

Finalement, en utilisant le fait (que nous allons voir) que les sommes et produits de fonctions analytiques sont analytiques, il suffit de trouver un développement en série entière de $\frac{1}{z-a_1}$ au voisinage d'un point $a \neq a_1$. Clairement, si un disque centré en a contient le pôle a_1 , notre fraction n'étant pas définie en a_1 , elle ne pourra pas être somme d'une série convergente. Donc nous considérons un disque $D(a, r)$ avec $r < |a - a_1|$. Nous recentrons nos coordonnées en a :

$$z - a_1 = (z - a) - (a_1 - a) = -(a_1 - a) \left(1 - \frac{z - a}{a_1 - a} \right).$$

Si on pose $w := \frac{z-a}{a_1-a}$, on a $|w| < 1$ et

$$\frac{1}{z - a_1} = (a - a_1)^{-1} \frac{1}{1 - w} = (a - a_1)^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} w^k = - \sum_{k=0}^{\infty} (a - a_1)^{-1-k} (z - a)^k.$$

□

Propriétés : les sommes et produits de fonctions analytiques sont analytiques (pour les sommes, c'est facile, pour les produits, c'est une conséquence du théorème de Mertens — dans le cas facile où les deux séries facteurs sont absolument convergentes).

Les compositions, et applications réciproques, le sont aussi (admis pour le moment). Les quotients aussi, sur la partie du domaine de f où le dénominateur ne s'annule pas ; c'est une conséquence de la propriété sur les compositions et du fait que

$$f(z)^{-1} = [f(a) + (f(z) - f(a))]^{-1} = f(a)^{-1} \left(1 - \frac{f(a) - f(z)}{f(a)} \right)^{-1},$$

$$\text{et } \frac{1}{1-z} = \sum_{k=0}^{\infty} z^k.$$

Ceci redémontre que les fraction rationnelles sont analytiques, mais il n'est pas mauvais d'avoir vu une méthode qui permette le calcul.

Proposition 8. *La somme d'une série entière $f(z) = \sum_k a_k z^k$ est analytique sur son disque de convergence $D(0, R)$.*

Démonstration. Soit $a \in D(0, R)$. Prenons $r < R - |a|$. Posons $h = z - a$ pour simplifier la notation, donc $z = z - a + a = a + h$. Alors, par convergence normale sur $\overline{D}(0, |a| + r)$,

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^k |a_k| C_k^j |a|^j |h|^{k-j} = \sum_{k=0}^{\infty} (|a| + |h|)^k < \infty,$$

donc on peut appliquer le théorème de Fubini et

$$\begin{aligned} (2) \quad \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k (a+h)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^k a_k C_k^j h^j a^{k-j} \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=j}^{\infty} a_k C_k^j h^j a^{k-j} = \sum_{j=0}^{\infty} \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_{j+n} C_{j+n}^j a^n \right) h^j. \end{aligned}$$

Notez bien qu'une conséquence du Théorème de Fubini est que chaque coefficient de la dernière série, est donné lui-même par une série convergente. On pourrait redémontrer directement que cette série est convergente (exercice). \square

2.3. Fonctions holomorphes (\mathbb{C} -différentiables).

Définition 9. *Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert. Une fonction $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ est \mathbb{C} -dérivable en $a \in \Omega$ si et seulement si la limite suivante existe :*

$$\lim_{h \rightarrow 0, h \in \mathbb{C}} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} =: f'(a) \in \mathbb{C},$$

où h est un nombre complexe et tend vers 0 au sens de la topologie de $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$.

Le nombre $f'(a)$ est parfois aussi noté $\frac{df}{dz}(a)$.

Une fonction f qui est \mathbb{C} -dérivable en tout point $a \in \Omega$ est dite *holomorphe* sur Ω .

Remarque : en général nous écrirons seulement $\lim_{h \rightarrow 0}$ sans préciser que h est complexe. Nous avons insisté ici sur le fait qu'il s'agit d'une limite en deux variables réelles, donc beaucoup plus compliquée à obtenir qu'une limite sur des variables réelles. Souvenez-vous de fonctions comme $g(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ qui ont des limites le long de chaque droite passant par $(0, 0)$, mais pas de limite au sens de \mathbb{R}^2 , puisque par exemple $\lim_{x \rightarrow 0} g(x, 0) = 1 \neq -1 = \lim_{y \rightarrow 0} g(0, y)$.

En revanche, si la limite au sens complexe existe, toutes les limites le long de droites réelles passant par $(0, 0)$ existent et lui sont égales. Par conséquent, en prenant $h = x \in \mathbb{R}$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a) = \lim_{x \rightarrow 0, x \in \mathbb{R}} \frac{f(a+x) - f(a)}{x} =: f'(a);$$

et en prenant $h = iy$, $y \in \mathbb{R}$,

$$f'(a) = \lim_{y \rightarrow 0, y \in \mathbb{R}} \frac{f(a + iy) - f(a)}{iy} = -i \frac{\partial f}{\partial y}(a).$$

Nous venons de démontrer que si f est \mathbb{C} -dérivable en a ,

$$(3) \quad \frac{\partial f}{\partial y}(a) = i \frac{\partial f}{\partial x}(a).$$

Propriétés : les sommes, produits et compositions de fonctions \mathbb{C} -dérivables le sont aussi, avec les mêmes démonstrations et les mêmes formules que dans le cas réel (la seule différence est que la limite est prise sur des voisinages dans le plan complexe, de petits disques, qui sont plus grands que les petits intervalles utilisés sur \mathbb{R}).

La \mathbb{C} -dérivabilité en a est équivalente, puisque nous n'avons qu'une variable, au fait que f soit \mathbb{C} -différentiable au point a : il existe une fonction $\varepsilon(h)$ telle que $\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0$ et une application \mathbb{C} -linéaire $L : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ telles que

$$f(a + h) = f(a) + L(h) + h\varepsilon(h).$$

En effet, il suffit de prendre $L(h) = f'(a)h$ et $\varepsilon(h) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h} - f'(a)$.

Il est important de bien distinguer le fait d'être \mathbb{C} -dérivable et \mathbb{R} -différentiable par rapport aux variables x et y , à savoir qu'il existe une fonction $\varepsilon(h)$ telle que $\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0$ et une application \mathbb{R} -linéaire $L : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ telles que

$$f(a + h) = f(a) + L(h) + h\varepsilon(h).$$

Une application \mathbb{R} -linéaire de \mathbb{C} dans \mathbb{C} sera de la forme $L(x + iy) = bx + cy$, avec b et $c \in \mathbb{C}$. Une application \mathbb{C} -linéaire de \mathbb{C} dans \mathbb{C} sera de la forme $L(x + iy) = b(x + iy)$, avec $b \in \mathbb{C}$. Autrement dit, il y a une restriction supplémentaire : $c = ib$.

Exemple : la fonction $z \mapsto \bar{z}$ est \mathbb{R} -différentiable (elle est même \mathbb{R} -linéaire), alors qu'elle n'est nulle part \mathbb{C} -dérivable : on voit facilement que le rapport \bar{h}/h n'admet pas de limite en 0.

Comme nous l'avons vu ci-dessus, une fonction f est \mathbb{R} -différentiable en a , ses dérivées partielles existent en a et si $h = h_1 + ih_2$, $h_1, h_2 \in \mathbb{R}$,

$$L(h) = \frac{\partial f}{\partial x}(a)h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(a)h_2$$

(attention, ici les valeurs de f et ses dérivées partielles sont en général complexes ; si cela vous gêne, vous pouvez considérer les parties réelle et imaginaire de f et dériver séparément — cela revient au même).

On déduit de (3) et de la relation entre \mathbb{R} -linéarité et \mathbb{C} -linéarité que :

Proposition 10. *Une fonction f est \mathbb{C} -dérivable en a si et seulement si f est \mathbb{R} -différentiable en a et ses dérivées partielles y vérifient les équations de Cauchy-Riemann :*

$$\begin{aligned} \frac{\partial \operatorname{Im} f}{\partial x}(a) &= -\frac{\partial \operatorname{Re} f}{\partial y}(a), \\ \frac{\partial \operatorname{Im} f}{\partial y}(a) &= \frac{\partial \operatorname{Re} f}{\partial x}(a). \end{aligned}$$

Pour voir le sens direct, il suffit d'utiliser que $\operatorname{Re}(iz) = -\operatorname{Im} z$ et $\operatorname{Im}(iz) = \operatorname{Re} z$. Pour la réciproque, le fait qu'une application L qui est \mathbb{R} -linéaire sera \mathbb{C} -linéaire dès que $L(iv) = iL(v)$ pour tout v .

2.4. Relation entre analyticité et holomorphicité. C'est une conséquence des théorèmes sur les suites de fonctions dérivables qu'une fonction analytique doit être indéfiniment différentiable (\mathcal{C}^∞) sur son domaine, en tant que fonction des deux variables réelles x et y .

Mais on a beaucoup mieux.

Théorème 11. *Une fonction analytique sur un ouvert Ω est \mathbb{C} -dérivable à tous les ordres, et les coefficients dans (1) sont donnés par $a_k = \frac{1}{k!} f^{(k)}(a)$.*

Démonstration. Dans un disque autour de a , on sait que

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-a)^k = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k (z-a)^k = a_0 + (z-a) \sum_{k=1}^{\infty} a_k (z-a)^{k-1} \\ &= a_0 + a_1(z-a) + (z-a) \sum_{k=2}^{\infty} a_k (z-a)^{k-1}, \end{aligned}$$

ce qui donne la forme requise car $a_0 = f(a)$ et la somme qui reste tend vers 0 quand z tend vers a (par convergence uniforme). On voit aussi que $a_1 = f'(a)$.

Mais nous voulons connaître la valeur de f' dans tout un disque autour de a . Soit $z_0 \in D(a, r)$. On tire de (2), en la réécrivant centrée en a plutôt qu'en 0, que

$$f(z_0+h) - f(z_0) = \sum_{j=1}^{\infty} \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_{j+n} C_{j+n}^j (z_0-a)^n \right) h^j = h \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} (n+1) (z_0-a)^n + O(h^2),$$

donc en changeant d'indice $f'(z_0) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n (z_0-a)^{n-1}$, comme on s'y attendait. En itérant cette formule, on trouve $f''(z) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n (z-a)^{n-2}$, $f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1) \cdots (n-k+1) a_n (z-a)^{n-k}$, et en particulier pour $z = a$, $f^{(k)}(a) = k! a_k$, on a donc la deuxième partie du théorème. \square

Remarque : les coefficients du développement en série entière de f sont les mêmes que ceux qui apparaissent dans la formule de Taylor ; on pouvait le déduire du fait qu'on peut restreindre le développement de f à une droite horizontale et appliquer l'unicité des coefficients dans la formule de Taylor. Le théorème ci-dessus montre aussi que le développement en série entière autour d'un point donné est unique.

C'est un fait important, et non-trivial, que la réciproque de la première phrase du théorème 11 est vraie. Elle est nettement plus difficile. Nous la démontrerons dans un chapitre ultérieur.

2.5. Exemple : l'exponentielle complexe. Nous savons déjà que les polynômes (en z) sont analytiques sur \mathbb{C} tout entier, et les fractions rationnelles sont analytiques en dehors des racines de leur dénominateur. Il est intéressant de connaître quelques autres fonctions analytiques explicites. La plus importante est l'exponentielle (et ses cousines, les fonctions trigonométriques et hyperboliques).

Définition 12. *On définit l'exponentielle complexe par $\exp(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$.*

Proposition 13. *L'exponentielle est complexe est analytique sur tout le plan complexe.*

De plus, $\exp(z+w) = \exp(z) \exp(w)$, $\exp(\bar{z}) = \overline{\exp(z)}$, pour $y \in \mathbb{R}$, $|\exp(iy)| = 1$, $|\exp(z)| = \exp(\operatorname{Re} z)$, $\frac{d}{dz} \exp(z) = \exp(z)$.

Démonstration. Le rayon de convergence est clairement infini.

D'après le théorème de Mertens,

$$\begin{aligned} \exp(z+w) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^k \frac{k!}{j!(k-j)!} z^j w^{k-j} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^k \frac{1}{j!(k-j)!} z^j w^{k-j} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \right) \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{w^j}{j!} \right) = \exp z \exp w. \end{aligned}$$

On calcule $\exp(\bar{z})$ en constatant que $(\bar{z})^k = \overline{(z^k)}$ et en passant à la limite. Donc $|\exp(iy)|^2 = \exp(iy)\exp(-iy) = \exp(iy - iy) = \exp 0 = 1$. La propriété suivante est une conséquence immédiate de $|ab| = |a||b|$, pour tous nombres complexes a, b .

D'après la formule pour la dérivée donnée dans la démonstration du théorème 11,

$$\frac{d}{dz} \exp(z) = \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{z^{k-1}}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^{k-1}}{(k-1)!} = \exp(z),$$

après un changement d'indice. □

On pose $\exp(z) = e^z$ où $e := \exp(1)$ et on définit $\cos z := \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz})$, et $\sin z := \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz})$.

On a donc

$$(4) \quad (\cos z)^2 + (\sin z)^2 = \frac{1}{4}(e^{2iz} + 2 + e^{-2iz}) - \frac{1}{4}(e^{2iz} - 2 + e^{-2iz}) = \frac{4}{4} = 1.$$

Les fonctions \cos et \sin sont analytiques et $\frac{d}{dz} \cos z = -\sin z$, $\frac{d}{dz} \sin z = \cos z$ (exercice facile!).

Proposition 14. *Il existe un plus petit nombre strictement positif T tel que $e^{iT} = 1$, et donc la fonction \exp est périodique de période iT , et \cos et \sin sont périodiques de période T . On définit $\pi := T/2$.*

Démonstration. Comme la dérivée pour $t = 0$ de $t \mapsto e^{it}$ est non-nulle, il existe $\delta > 0$ tel que $e^{it} \neq 1$ pour $0 < t < \delta$. Si l'ensemble des T ci-dessus est non-vidé, on sait qu'il est fermé par continuité de l'exponentielle, et donc il contient un plus petit élément non-nul.

Mais il faut voir qu'il est non-vidé. D'après (4), si on trouve T' tel que $\sin T' = 1$, alors $\exp(iT') = i$ et $\exp(4iT') = 1$. Il faut donc trouver T_0 , le plus petit T' avec cette propriété. Or un calcul immédiat montre que

$$\cos t = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{t^{2k}}{(2k)!},$$

donc les propriétés des séries alternées impliquent que pour $t \neq 0$,

$$1 - \frac{t^2}{2} < \cos t < 1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{24}.$$

Donc $\cos t > 0$ pour $0 \leq t \leq \sqrt{2}$ et $\cos \sqrt{3} < -\frac{1}{8} < 0$. Donc \sin est croissante entre 0 et T_0 et $\sqrt{2} < T_0 < \sqrt{3}$. On pose $T = 4T_0$. □

Proposition 15. *Si $\exp z_1 = \exp z_2$, alors $z_1 - z_2 \in 2\pi i\mathbb{Z}$.*

Pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, il existe un unique $\theta \in]-\pi, \pi]$ tel que $e^w = z$ avec $w = \text{Log } z := \log |z| + i\theta$. On appelle θ l'argument de z et Log la détermination principale du logarithme complexe.

Démonstration. D'après la Proposition 13, $|\exp z_1| = |\exp z_2|$ implique $\text{Re } z_1 = \text{Re } z_2$ (l'exponentielle est croissante donc bijective sur \mathbb{R}). Donc $z_1 - z_2 \in i\mathbb{R}$. L'étude des variations de \sin et \cos sur une période montre que $y \mapsto e^{iy}$ ne prend qu'une fois chaque valeur sur un intervalle du type $[a, a + 2\pi[$. \square

Remarque importante : la fonction Log n'est pas continue sur $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, et il n'existe pas de choix continu de l'argument sur ce domaine.

3. PROLONGEMENT ANALYTIQUE

3.1. Théorème des zéros isolés.

Théorème 16. *Soit f analytique au voisinage de z_0 , avec $f(z_0) = 0$. Alors soit il existe $r > 0$ tel que pour tout z tel que $0 < |z - z_0| < r$, $f(z) \neq 0$, soit il existe $r > 0$ tel que pour tout z tel que $|z - z_0| < r$, $f(z) = 0$.*

Démonstration. Il existe $r_0 > 0$ tel que pour $z \in D(z_0, r_0)$, $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$. L'hypothèse nous dit que $a_0 = 0$.

Considérons $A := \{k \in \mathbb{N} : a_k \neq 0\}$.

- Cas 1 : $A = \emptyset$. Alors le développement en série donne $f(z) = 0$ pour tout $z \in D(z_0, r_0)$, et on peut prendre $r = r_0$ et on a la première conclusion.
- Cas 2 : $A \neq \emptyset$. Soit $k_0 := \min A \geq 1$. On peut écrire, pour $z \in D(z_0, r_0)$,

$$f(z) = a_{k_0} (z - z_0)^{k_0} \left(1 + (z - z_0) \sum_{k=k_0+1}^{\infty} \frac{a_k}{a_{k_0}} (z - z_0)^{k-k_0-1} \right).$$

Le facteur hors parenthèse est non-nul quand $0 < |z - z_0|$. Le deuxième terme dans la parenthèse tend vers 0 quand z tend vers z_0 , donc il existe $r_1 \leq r_0$ tel que la parenthèse soit non-nulle pour $|z - z_0| < r_1$. On peut prendre $r = r_1$ pour avoir la deuxième conclusion. \square

On rappelle qu'étant donné un ensemble $A \subset \Omega$, un point $a \in \Omega$ est un *point d'accumulation* de A si pour tout $r > 0$, il existe $x \in A$ tel que $0 < |a - x| < r$; et que c'est un *point isolé* de A si $a \in A$ et qu'il existe $r > 0$ tel que $D(a, r) \cap A = \{a\}$. Le théorème 16 dit donc que les zéros de f sont soit isolés, soit dans l'intérieur de l'ensemble des zéros.

3.2. Théorème du Prolongement analytique.

Définition 17. *Soit Ω un sous ensemble d'un espace topologique. On dit que Ω est connexe si pour tout couple d'ouverts disjoints U_1, U_2 tels que $U_1 \cup U_2 \supset \Omega$ alors soit $U_1 \cap \Omega = \emptyset$, soit $U_2 \cap \Omega = \emptyset$.*

On dit que Ω est connexe par arcs si pour tous $x, y \in \Omega$, il existe une courbe continue $\gamma : [0, 1] \rightarrow \Omega$ telle que $\gamma(0) = x$, $\gamma(1) = y$.

Fait : la deuxième propriété implique toujours la première. Pour des ouverts de \mathbb{C} (ou même d'un espace vectoriel normé), elles sont équivalentes. Dans le cadre de ce cours, nous ne considérerons que la propriété de connexité par arcs.

Théorème 18. *Si Ω est un ouvert connexe de \mathbb{C} , que f et g sont analytiques sur Ω , et que l'ensemble $A := \{z \in \Omega : f(z) = g(z)\}$ possède un point d'accumulation dans Ω , alors $f = g$.*

Autrement dit, sur un ouvert "d'un seul morceau", deux fonctions analytiques doivent, soit coïncider partout, soit être égales seulement en des points isolés.

Corollaire : si f est analytique sur un ouvert Ω , non identiquement nulle, et K compact dans Ω , alors $f^{-1}\{0\} \cap K$ est un ensemble fini.

Autre application : si deux fonctions sont analytiques sur un ouvert connexe qui intersecte la droite réelle, toute relation algébrique entre ces fonctions valide pour cette portion de la droite réelle demeurera valide sur tout l'ouvert. On étend ainsi les identités trigonométriques habituelles, par exemple.

Démonstration. La fonction $f - g$ est analytique sur Ω , donc il suffit de démontrer le théorème dans le cas où $g = 0$.

Il suffit de montrer que si f n'est pas identiquement nulle, alors $A = f^{-1}\{0\}$ ne possède aucun point d'accumulation ; comme A est fermé, il contiendra tout éventuel point d'accumulation (une limite de zéros de f est un zéro de f , par continuité), donc il suffit de montrer que tous les points de A sont isolés. Soit $a \in \Omega$ tel que $f(a) \neq 0$. Supposons qu'il existe $b \in A$ qui ne soit pas isolé.

D'après le théorème 16, en tout point $z_0 \in A$, deux cas sont possibles : soit z_0 est un zéro isolé, soit f est nulle dans tout un disque autour de z_0 . Donc il existe $r_0 > 0$ tel que $f(z) = 0$ pour tout $z \in D(b, r_0)$.

Considérons une courbe γ telle que $\gamma(0) = a$ et $\gamma(1) = b$. On considère l'ensemble de tous les paramètres t telle que f soit nulle dans tout un disque autour du point $\gamma(t)$:

$$E := \{t \in [0, 1] : \exists r > 0 : \forall z \in D(\gamma(t), r), f(z) = 0\}.$$

Nous venons de voir que $0 \notin E$ et $1 \in E$. Donc $E \neq \emptyset$.

On pose $T := \inf E \in]0, 1[$. Si $T \notin E$, alors si $f(\gamma(T)) \neq 0$, par continuité, il existe $r_0 > 0$ tel que pour tout $z \in D(\gamma(T), r_0)$, $f(z) \neq 0$; et si $f(\gamma(T)) = 0$, d'après le théorème des zéros isolés, il existe $r_0 > 0$ tel que pour tout $z \in D(\gamma(T), r_0) \setminus \{\gamma(T)\}$, nous avons $f(z) \neq 0$. Par continuité de γ , il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour $T < t < T + \varepsilon$, $\gamma(t) \in D(\gamma(T), r_0)$, et donc $t \notin E$. Mais alors $\inf E \geq T + \varepsilon$, contradiction.

Mais si $T \in E$, alors f s'annule sur un disque $D(\gamma(T), r_1)$ et par continuité de γ , il existe $\varepsilon \in]0, T[$ tel que pour $T - \varepsilon < t < T$, $\gamma(t) \in D(\gamma(T), r_1)$. Alors f s'annule sur un disque de rayon $r_1 - |\gamma(t) - \gamma(T)|$ autour de $\gamma(t)$, et donc $t \in E$, $t < T$, ce qui contredit le fait que $T = \inf E$. Donc il ne peut pas exister de tel point b , et tous les (éventuels) zéros de f sont isolés. \square

3.3. Exemple d'application : un logarithme complexe.

Proposition 19. *La détermination principale du logarithme complexe admet le développement en série suivant sur le disque $D(1, 1)$: pour $|h| < 1$,*

$$\text{Log}(1 + h) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{h^k}{k}.$$

Démonstration. On pourrait le faire par un calcul explicite, assez laborieux. Nous allons le faire à l'aide du théorème du Prolongement Analytique, en admettant que notre inverse local est effectivement analytique (ce que nous avons admis en Section 1).

Les deux côtés de l'égalité définissent des fonctions analytiques sur $D(1, 1)$, qui est connexe. Pour $x \in]-1, +1[$, les théorèmes sur la dérivation des fonctions inverses et fonctions composées nous donnent

$$\frac{d}{dx} \log(1+x) = \frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k,$$

pour toute fonction \log qui vérifie $e^{\log x} = x$, $x > 0$.

Le théorème sur la primitive de la limite d'une suite de fonctions qui converge uniformément, et le choix qui a été fait de poser $\text{Log } 1 = 0$, montrent que

$$\text{Log}(1+x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1}.$$

Comme les points de $]0, 2[$ sont non-isolés, l'identité sera vraie sur tout $D(1, 1)$. \square

Exercice (facile) : trouver un développement en série entière autour de -1 d'un logarithme complexe. Quel sera son rayon de convergence ? Plus généralement, pouvez-vous le faire autour d'un $z_0 \neq 0$? Et quel rayon de convergence obtiendrez-vous ? Indication : $\exp(z_0 + \text{Log}(z/z_0)) = z$.

Plus difficile : quand ces développements coïncideront-ils sur l'intersection de leurs disques de convergence ?

4. FORMULE DE CAUCHY ET CONSÉQUENCES

4.1. Intégration sur les chemins.

Définition 20. Un chemin dans un ouvert Ω est une courbe continue, $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$, qui est \mathcal{C}^1 par morceaux, c'est-à-dire qu'il existe une partition de $[a, b]$ $a = a_0 < a_1 < \dots < a_{N-1} < a_N = b$ telle que $\gamma|_{[a_j, a_{j+1}]}$ soit une fonction \mathcal{C}^1 jusqu'au bord pour $0 \leq j \leq N-1$.

On note $\gamma(t) = \gamma_1(t) + i\gamma_2(t)$, où γ_1, γ_2 sont à valeurs réelles.

Nous rappelons qu'une *forme différentielle* est une expression de la forme $F(x, y) = f_1(x, y)dx + f_2(x, y)dy$, où f_1, f_2 sont des fonctions continues (à valeurs complexes) qu'on appelle ses coefficients.

Exemple : $dz = dx + idy$.

Définition 21. Étant donné un chemin γ dans Ω et une forme différentielle F à coefficients continus sur Ω , alors

$$\int_{\gamma} F := \int_a^b (f_1(\gamma(t))\gamma_1'(t) + f_2(\gamma(t))\gamma_2'(t)) dt$$

Les dérivées de γ ne sont pas forcément définies aux points a_j de la subdivision ; il faut comprendre cette intégrale comme une somme finie d'intégrales sur les intervalles $[a_j, a_{j+1}]$.

Si on se souvient que $\gamma'(t) = \gamma_1'(t) + i\gamma_2'(t)$, on voit que si $F = f(z)dz$, alors

$$\int_{\gamma} F = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t) dt.$$

C'est le plus souvent cette forme que nous utiliserons.

Exemple : $\gamma(t) = (1-t)z_1 + tz_2 = z_1 + t(z_2 - z_1)$, $t \in [0, 1]$. Alors

$$\int_{\gamma} F := \int_0^1 (f_1(\gamma(t)) \operatorname{Re}(z_2 - z_1) + f_2(\gamma(t)) \operatorname{Im}(z_2 - z_1)) dt.$$

En particulier, si $F = dz$, on trouve $\int_{\gamma} dz = z_2 - z_1$, ce qui semble raisonnable!

Proposition 22. *Si σ est une bijection croissante de $[c, d]$ dans $[a, b]$, alors $\int_{\gamma} F = \int_{\gamma \circ \sigma} F$. On dit que l'intégrale ne dépend pas du paramétrage de la courbe.*

Si σ est une bijection décroissante de $[c, d]$ dans $[a, b]$ (donc $\sigma(d) = a$, $\sigma(c) = b$) alors $\int_{\gamma} F = -\int_{\gamma \circ \sigma} F$.

Démonstration.

Notons $[a, b]$ un des intervalles de la subdivision, il suffit de démontrer la propriété pour un intervalle, puis de faire la somme. D'après la règle de dérivation des fonctions composées,

$$\begin{aligned} \int_{\gamma \circ \sigma} F &= \int_c^d (f_1(\gamma(\sigma(t)))\gamma_1'(\sigma(t)) + f_2(\gamma(\sigma(t)))\gamma_2'(\sigma(t)))\sigma'(t)dt \\ &= \int_a^b (f_1(\gamma(u))\gamma_1'(u) + f_2(\gamma(u))\gamma_2'(u)) du = \int_{\gamma} F, \end{aligned}$$

en faisant le changement de variable $u = \sigma(t)$, donc $du = \sigma'(t)dt$.

Dans le cas où σ est décroissant, l'intégrale de c à d se transforme en intégrale de b à a , et quand on rétablit l'ordre des bornes on doit changer le signe. \square

Nous allons généraliser l'exemple du segment donné ci-dessus.

Proposition 23. *Supposons qu'il existe une fonction Φ définie dans un voisinage de $\gamma([a, b])$ telle que $f_1(x, y) = \frac{\partial \Phi}{\partial x}$ et $f_2(x, y) = \frac{\partial \Phi}{\partial y}$. Alors $\int_{\gamma} F = \Phi(b) - \Phi(a)$.*

Démonstration.

D'après la formule de dérivation des fonctions composées et les égalités ci-dessus,

$$\frac{d}{dt} (\Phi(\gamma(t))) = f_1(\gamma(t))\gamma_1'(t) + f_2(\gamma(t))\gamma_2'(t),$$

et on calcule donc aisément $\int_{\gamma} F$ d'après le théorème fondamental du calcul différentiel. \square

Dans le cas où $f(z) = F'(z)$ pour une fonction F dérivable au sens complexe, les équations de Cauchy-Riemann pour F nous donnent

$$f(z)dz = F'(z)(dx + idy) = \frac{\partial F}{\partial x}dx + i\frac{\partial F}{\partial x}dy = \frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy \quad :$$

on retrouve une forme exacte!

Une courbe \mathcal{C}^1 par morceaux est *rectifiable*, c'est-à-dire qu'on peut calculer sa longueur et qu'elle est finie. En général, la longueur d'une courbe se définit comme une limite de longueurs de lignes brisées passant par une subdivision de points de la courbe de pas tendant vers 0, mais dans notre cas, il suffit de poser la définition suivante.

Définition 24. *La longueur d'une courbe γ qui est \mathcal{C}^1 par morceaux est donnée par*

$$L(\gamma) := \int_a^b \sqrt{\gamma_1'(t)^2 + \gamma_2'(t)^2} dt.$$

Comme avant, les dérivées sont définies sur chaque morceau, et on a en fait une somme finie d'intégrales.

Proposition 25. *Supposons que f soit bornée sur $\gamma([a, b])$, alors*

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq \sup_{t \in [a, b]} |f(\gamma(t))| L(\gamma).$$

Démonstration. En chaque point t ,

$$|f(\gamma(t)) (\gamma'_1(t) + i\gamma'_2(t))| \leq \left(\sup_{t \in [a, b]} |f(\gamma(t))| \right) \sqrt{\gamma'_1(t)^2 + \gamma'_2(t)^2}.$$

□

4.2. Rappel : Formule de Green-Riemann.

Définition 26. *Une courbe γ définie sur $[a, b]$ est dite courbe de Jordan si $\gamma(a) = \gamma(b)$ et pour tous t_1, t_2 tels que $t_1 < t_2$, alors $\gamma(t_1) = \gamma(t_2)$ implique $t_1 = a, t_2 = b$.*

Intuitivement, il s'agit d'une courbe fermée qui ne se rencontre jamais elle-même. Par exemple, $\gamma(t) = e^{it}$, $a = 0, b = 2\pi$ est un paramétrage du cercle unité.

Nous admettrons le (difficile) Théorème de Jordan, qui affirme le fait topologique que si γ est une courbe de Jordan dans le plan, alors $\mathbb{C} \setminus \gamma([a, b])$ admet exactement deux composantes connexes, une bornée ("à l'intérieur" de γ , entourée par γ) et l'autre non-bornée.

On considère désormais un ouvert borné connexe Ω dont la frontière soit l'image d'une courbe de Jordan, \mathcal{C}^1 par morceaux. Cela peut être un disque, un rectangle, un secteur angulaire... On oriente la courbe frontière de telle façon que la base $(\vec{n}(\gamma(t)), \gamma'(t))$ soit une base orthogonale directe, où $\vec{n}(z)$ est la normale extérieure au point z . Exprimé avec des nombres complexes, cela donne $\gamma'(t) = in(\gamma(t))$. Par exemple, si on prend le cercle unité, paramétré comme dans l'exemple ci-dessus, $\vec{n}(e^{it}) = e^{it}$ et $\gamma'(t) = ie^{it}$.

Théorème 27 (Green-Riemann). *Si $P(x, y), Q(x, y)$ sont des fonctions de classe \mathcal{C}^1 , et Ω un domaine dont la frontière est l'image d'une courbe de Jordan γ orientée comme ci-dessus, alors*

$$\int_{\gamma} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \int \int_{\Omega} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy.$$

Ce théorème a été vu dans votre cours de calcul différentiel de deuxième année. Nous considérons sans problème des P, Q à valeurs complexes : pour obtenir la formule dans ce cadre, il suffit d'appliquer la version réelle aux parties réelle et imaginaire de chaque coefficient.

Notez un cas particulier important : si (P, Q) est le gradient d'une fonction ("potentiel") $\Phi(x, y)$ de classe \mathcal{C}^2 , $P = \frac{\partial \Phi}{\partial x}$, $Q = \frac{\partial \Phi}{\partial y}$, donc $d\Phi = P(x, y) dx + Q(x, y) dy$ est une différentielle totale, alors par le Théorème de Schwarz $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0$. On retrouve que sur une courbe fermée γ alors $\int_{\gamma} d\Phi = 0$, ce qu'on sait d'après la Proposition 23.

4.3. Théorème et formule de Cauchy.

Théorème 28 (de Cauchy). *Soit Ω un domaine dont la frontière est l'image d'une courbe de Jordan γ orientée comme ci-dessus, et f une fonction holomorphe (c'est-à-dire \mathbb{C} -dérivable) et de classe \mathcal{C}^1 sur un voisinage de $\overline{\Omega}$. Alors*

$$\int_{\gamma} f(z)dz = 0.$$

Démonstration. D'après les équations de Cauchy-Riemann, $\frac{\partial Q}{\partial x} = i\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} = i\frac{\partial f}{\partial x}$. On applique la formule de Green-Riemann à $P = f$ et $Q = if$: l'intégrale est nulle. \square

La formule de Cauchy est la plus importante de toute l'analyse complexe. Nous allons maintenant donner la formule de Cauchy dans le cas particulier mais déjà très important d'un disque.

Théorème 29. *Soit f une fonction holomorphe (c'est-à-dire \mathbb{C} -dérivable) et de classe \mathcal{C}^1 sur un domaine U . Soient $a \in U$ et $r > 0$ tels que $\overline{D}(a, r) \subset U$, et $z \in D(a, r)$. Alors, en notant $C(a, r)$ le cercle de centre a et de rayon r parcouru une fois dans le sens trigonométrique,*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(a, r)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

Démonstration.

Nous allons construire une famille de courbes γ et d'ouverts Ω auxquels nous appliquerons le théorème 28. Intuitivement, il s'agit de creuser une petite bulle autour du point z (sans sortir du disque $D(a, r)$), puis un tunnel encore plus étroit qui relie cette bulle à l'extérieur du disque. On appliquera le théorème de Cauchy. Puis on fera tendre vers zéro d'abord la largeur du tunnel, puis le diamètre de la bulle, et la formule voulue sortira à la limite.

Nous allons, pour simplifier, écrire d'abord les formules dans le cas où $a = 0$, $r = 1$ et $0 \leq z < 1$ (puis nous transporterons la construction dans $\overline{D}(a, r) \subset U$). Considérons un cercle de centre z et de rayon $\delta < 1 - z$, et pour $0 < \varepsilon < \delta$, les droites $L_{\varepsilon} := \{y = \varepsilon\}$ et $L_{-\varepsilon} := \{y = -\varepsilon\}$. La droite L_{ε} a exactement un point d'intersection $A_{\delta, \varepsilon}$ avec le cercle $C(z, \varepsilon)$ tel que $\operatorname{Re} A_{\delta, \varepsilon} > z$. Elle a un point d'intersection $B_{\delta, \varepsilon}$ avec le cercle unité $C(0, 1)$ tel que $\operatorname{Re} B_{\delta, \varepsilon} > 0$. De façon symétrique, la droite $L_{-\varepsilon}$ intersecte le cercle $C(z, \varepsilon)$ au point $D_{\delta, \varepsilon} := \overline{A_{\delta, \varepsilon}}$, et le cercle unité au point $C_{\delta, \varepsilon} := \overline{B_{\delta, \varepsilon}}$.

Le chemin $\gamma_{\delta, \varepsilon}$ sera composé de quatre morceaux successifs :

- γ_1 , le segment de droite de $A_{\delta, \varepsilon}$ à $B_{\delta, \varepsilon}$, orienté dans le sens des x croissants ;
- γ_2 , l'arc de cercle de $B_{\delta, \varepsilon}$ à $C_{\delta, \varepsilon}$, orienté dans le sens trigonométrique ;
- γ_3 , le segment de droite de $C_{\delta, \varepsilon}$ à $D_{\delta, \varepsilon}$, orienté dans le sens des x décroissants ;
- γ_4 , l'arc de cercle de $D_{\delta, \varepsilon}$ à $A_{\delta, \varepsilon}$, orienté dans le sens trigonométrique inverse.

Nous avons omis les ε et δ pour alléger la notation.

Pour obtenir notre chemin γ dans le cas général, nous appliquons à $\gamma_{\delta, \varepsilon}$ le déplacement suivant : d'abord une homothétie de rapport r , puis une rotation d'angle égal à l'argument dans $] - \pi, \pi]$ de $z - a$ (si $z = a$, on ne fait pas de rotation), et enfin une translation de vecteur a . L'image du chemin γ est désormais contenue dans $\overline{D}(a, r)$, et celle de l'ouvert Ω entouré par γ également. De plus le point z , qui est l'unique point de U où $\zeta \mapsto \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}$ ne soit pas holomorphe, reste en dehors de $\overline{\Omega}$.

Donc nous sommes dans les conditions d'application du théorème 28 et $\int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta-z} d\zeta = 0$.

Maintenant, quand $\varepsilon \rightarrow 0$, nous voyons que γ_2 tend vers l'image par notre déplacement du segment $[z + \delta, 1]$ orienté dans le sens des x croissants, tandis que γ_4 tend vers le même segment, mais orienté dans le sens des x décroissants. La même chose se produit pour les portions correspondantes du chemin γ , avec convergence vers le segment $[a + (z-a)(1+r\delta), a+r\frac{z-a}{|z-a|}]$. Comme la fonction f est en particulier continue sur le compact $\overline{D}(a, r)$, donc uniformément continue, on voit que les intégrales correspondantes se décomposent en des intégrales sur des intervalles dont la longueur tend vers 0 (et l'intégrande est borné) et d'autres sur lesquels la convergence est uniforme, et donc les intégrales convergent vers les intégrales sur deux fois le même segment orienté dans des sens opposés : leur somme tend vers 0.

D'autre part, il est aussi facile de voir que l'intégrale sur γ_1 tend vers l'intégrale sur le cercle $C(a, r)$ de $\frac{f(\zeta)}{\zeta-z} d\zeta$, et que l'intégrale sur γ_3 tend vers l'opposé de l'intégrale sur le cercle $C(z, \delta)$ (orienté dans le sens trigonométrique) de $\frac{f(\zeta)}{\zeta-z} d\zeta$. Donc $\int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta-z} d\zeta = 0$ nous donne : pour tout $\delta > 0$ assez petit,

$$\int_{C(a,r)} \frac{f(\zeta)}{\zeta-z} d\zeta - \int_{C(z,\delta)} \frac{f(\zeta)}{\zeta-z} d\zeta = 0.$$

Maintenant nous considérons la limite de l'intégrale sur le cercle de rayon δ quand $\delta \rightarrow 0$. Une paramétrisation de $C(a, \delta)$ est donnée par $\gamma_{\delta}(t) := z + \delta e^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$ (il est facile de voir que changer le point de départ et d'arrivée sur le cercle ne changera pas l'intégrale).

Alors $\gamma_{\delta}(t) - z = \delta e^{it}$ et $\gamma'_{\delta}(t) = i\delta e^{it}$, donc

$$\int_{C(z,\delta)} \frac{f(\zeta)}{\zeta-z} d\zeta = \int_0^{2\pi} \frac{f(z + \delta e^{it}) i\delta e^{it}}{\delta e^{it}} dt = \int_0^{2\pi} f(z + \delta e^{it}) i dt,$$

et comme f est continue au point z , $\lim_{\delta \rightarrow 0} f(z + \delta e^{it}) = f(z)$ uniformément en $t \in [0, 2\pi]$. Donc

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \int_0^{2\pi} f(z + \delta e^{it}) i dt = \int_0^{2\pi} f(z) i dt = 2\pi i f(z).$$

□

4.4. Conséquences de la formule de Cauchy. Nous pouvons maintenant démontrer que les fonctions holomorphes de classe \mathcal{C}^1 sont la même chose que les fonctions analytiques. (On peut démontrer que l'hypothèse de classe \mathcal{C}^1 n'est pas indispensable, mais ce serait trop long à notre niveau).

Théorème 30. *Soit f une fonction holomorphe (c'est-à-dire \mathbb{C} -dérivable) et de classe \mathcal{C}^1 sur un domaine U . Alors f est développable en série entière autour de tout $a \in U$ avec un rayon de convergence supérieur ou égal au plus grand $r > 0$ tel que $D(a, r) \subset U$ (qui est la distance de a au complémentaire de U).*

Remarque : ce théorème dit qu'une fonction est holomorphe et de classe \mathcal{C}^1 sur un ouvert si et seulement si elle est analytique sur cet ouvert. C'est donc une réciproque au théorème 11. Mais il donne quelque chose de nouveau même pour une fonction déjà supposée analytique : on avait simplement supposé qu'une telle fonction est développable en série entière autour de chaque $a \in U$, mais avec un rayon de convergence

de la série qui peut être beaucoup plus petit. Or comme une telle fonction est nécessairement holomorphe et de classe \mathcal{C}^1 , sa série de Taylor en a devra converger sur le plus grand disque possible centré en a et contenu dans U .

Démonstration. Considérons comme ci-dessus $r = \text{dist}(a, \mathbb{C} \setminus U)$ (éventuellement infini). Soit $r' < r$. On peut appliquer la formule de Cauchy dans le disque $\overline{D}(a, r')$. De plus, pour $r'' < r'$ et $z \in \overline{D}(a, r'')$, $\zeta \in C(a, r)$, $\frac{|z-a|}{|\zeta-a|} \leq r''/r' < 1$. Alors

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{(\zeta - a) - (z - a)} = \frac{1}{\zeta - a} \frac{1}{1 - \frac{z-a}{\zeta-a}} = \frac{1}{\zeta - a} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z-a}{\zeta-a} \right)^k,$$

avec convergence normale en $(z, \zeta) \in \overline{D}(a, r'') \times C(a, r')$. On peut donc échanger l'intégration et la sommation dans la formule de Cauchy :

$$(5) \quad f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(a, r')} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=0}^{\infty} (z-a)^k \int_{C(a, r')} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{k+1}} d\zeta.$$

On voit ainsi que cette série converge pour tout $z \in \overline{D}(a, r'')$, mais comme r'' peut prendre toute valeur strictement inférieure à r , la série obtenue converge dans tout le disque $D(a, r)$ et admet un rayon de convergence supérieur ou égal à r . \square

Corollaire 31. (1) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, si $\overline{D}(a, r) \subset U$,

$$\frac{f^{(k)}(a)}{k!} = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(a, r)} \frac{f(z) dz}{(z-a)^{k+1}},$$

où $C(a, r)$ désigne le cercle de centre a et de rayon r , parcouru une fois dans le sens trigonométrique.

(2) (Inégalités de Cauchy).

Sous les mêmes hypothèses,

$$|f^{(k)}(a)| \leq k! \frac{\max_{\overline{D}(a, r)} |f|}{r^k}.$$

Démonstration. Le premier énoncé provient de la relation entre dérivées successives et coefficients du développement en série de Taylor. Le deuxième en appliquant la majoration d'une intégrale par le maximum du module de l'intégrande multiplié par la longueur du chemin (ici égale à $2\pi r$). \square

Si on applique le premier énoncé ci-dessus pour $k = 0$, on voit après un calcul similaire à celui de la preuve de la formule de Cauchy (mais plus simple) que

$$f(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + re^{it}) dt.$$

Cet énoncé est connu comme la *formule de la moyenne* (on obtient la valeur de f en un point en faisant la moyenne de ses valeurs sur un cercle autour du point). Comme dt est une mesure réelle, on voit que cette formule est aussi valable pour $\text{Re } f$ et $\text{Im } f$. C'est plus généralement une propriété des fonctions harmoniques (celles dont le Laplacien est nul).

Théorème 32 (de Liouville). Si f est holomorphe et bornée sur \mathbb{C} tout entier, alors f est constante.

Démonstration. On applique les inégalités de Cauchy pour $k = 1$ et un disque de rayon R aussi grand qu'on veut :

$$|f'(a)| \leq \frac{\max_{\overline{D}(a,R)} |f|}{R} \leq \frac{M}{R} \rightarrow 0 \text{ pour } R \rightarrow +\infty.$$

La dérivée de f est identiquement nulle, donc f est constante (utiliser l'expression de $f(b) - f(a)$ comme intégrale de la dérivée). \square

Corollaire 33 (Théorème Fondamental de l'Algèbre). *Tout polynôme de degré supérieur ou égal à 1 possède au moins une racine complexe.*

Démonstration. Soit P un polynôme. Si P n'admet aucune racine, alors $\frac{1}{P(z)}$ est une fonction holomorphe sur tout \mathbb{C} , et continue. Si le degré de P est supérieur ou égal à 1, alors $\lim_{|z| \rightarrow \infty} \frac{1}{|P(z)|} = 0$, donc $\frac{1}{P(z)}$ est bornée sur \mathbb{C} , donc constante d'après le théorème de Liouville : contradiction, donc en fait P devait être de degré 0. \square

On déduit facilement de ce théorème que tout polynôme de degré n (exactement) se factorise en n facteurs de degré 1 et admet donc n racines complexes éventuellement confondues, et que les polynômes à coefficients réels se factorisent en facteurs irréductibles de degré inférieur ou égal à 2.

5. FORMULE DES RÉSIDUS ET APPLICATIONS

5.1. Résidu en un pôle.

Définition 34. Soit f une fonction \mathbb{C} -dérivable (holomorphe) sur un disque pointé $D(a, r) \setminus \{a\}$, où $r > 0$. On appelle Résidu de f au point a et on note $\text{Res}(f, a)$ le nombre complexe

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{C(a, \varepsilon)} f(z) dz,$$

où $C(a, \varepsilon)$ est le cercle de rayon ε centré en a , parcouru une fois dans le sens trigonométrique, et $\varepsilon \in]0, r[$.

Nous devons montrer que cette définition a un sens, c'est-à-dire que le nombre ainsi défini ne dépend pas de ε . La démonstration ressemble à celle de la formule de Cauchy : soient $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2 < r$. Pour $0 < \delta < \varepsilon_1$, on considère le chemin γ composé des quatre morceaux suivants :

- γ_1 : l'intersection de la droite $\text{Im } z = \text{Im } a + \delta$ avec $\overline{D(a, \varepsilon_2)} \setminus D(a, \varepsilon_1)$, prise dans le sens des x croissants ;
- γ_2 : l'arc du cercle $C(a, \varepsilon_2)$ qui va de l'intersection de γ_1 avec ce cercle jusqu'à l'autre point du cercle avec la même partie réelle, prise dans le sens trigonométrique ;
- γ_3 : l'intersection de la droite $\text{Im } z = \text{Im } a - \delta$ avec $\overline{D(a, \varepsilon_2)} \setminus D(a, \varepsilon_1)$, prise dans le sens des x décroissants ;
- γ_4 : l'arc du cercle $C(a, \varepsilon_1)$ qui va de l'intersection de γ_3 avec ce cercle jusqu'à l'intersection de γ_1 avec ce cercle, prise dans le sens contraire au sens trigonométrique.

On a $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$ d'après le Théorème de Cauchy. Quand on fait tendre δ vers 0, les intégrales sur les deux segments γ_1 et γ_3 se compensent (leur somme tend vers 0)

et donc

$$0 = \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\gamma} f(z) dz = \int_{C(a, \varepsilon_2)} f(z) dz - \int_{C(a, \varepsilon_1)} f(z) dz,$$

c.q.f.d.

On remarque que quand f est holomorphe sur tout le disque $D(a, r)$, alors le résidu est nul, d'après le Théorème de Cauchy.

Définition 35. On dit qu'une fonction analytique f , définie sur $D(a, r) \setminus \{a\}$, admet un pôle d'ordre m au point a si il existe $m \in \mathbb{N}^*$ et g analytique sur $D(a, r)$, avec $g(a) \neq 0$, tels que

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z-a)^m}, z \in D(a, r) \setminus \{a\}.$$

Proposition 36. Avec les notations ci-dessus, si on pose $g(z) = \sum_{k \geq 0} a_k (z-a)^k$, alors pour tout $\varepsilon \in]0, r[$,

$$\text{Res}(f; a) = a_{m-1} = (m-1)!g^{(m-1)}(a).$$

En particulier, si $m = 1$ (pôle simple) alors $\text{Res}(f; a) = g(a)$, si $m = 2$ (pôle double) alors $\text{Res}(f; a) = g'(a)$.

Démonstration. Comme la série qui définit g converge normalement sur tout disque fermé $\overline{D(a, r_1)}$ pour $r_1 < r$, la série $\sum a_k (z-a)^{k-m}$ converge uniformément sur tout fermé de la forme $\overline{D(a, r_1)} \setminus D(a, \varepsilon_1)$. On choisit $\varepsilon_1 < \varepsilon$ et l'intégrale qui définit le résidu vaut

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{C(a, \varepsilon)} f(z) dz = \frac{1}{2i\pi} \sum_{k=0}^{\infty} a_k \int_{C(a, \varepsilon)} (z-a)^{k-m} dz.$$

Il reste à calculer les intégrales du type $\int_{C(a, \varepsilon)} w^k dw$, en posant $w = z - a$. Quand $k \geq 0$, ces intégrales sont nulles d'après le Théorème de Cauchy. Quand $k \geq 2$, alors $w^{-k} = \frac{d}{dw} \left(\frac{1}{-k+1} w^{-k+1} \right)$, et d'après la remarque après la Proposition 23, l'intégrale est nulle aussi. Il reste à calculer

$$\int_{C(a, \varepsilon)} w^{-1} dw = \int_0^{2\pi} \frac{1}{\varepsilon e^{i\theta}} \varepsilon i e^{i\theta} d\theta = 2\pi i.$$

□

Corollaire 37. Formule de la Moyenne : si f est holomorphe sur $D(a, r)$, alors pour tout $r_1 < r$,

$$f(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + r_1 e^{i\theta}) d\theta.$$

En effet, l'intégrale ci-dessus vaut $\int_{C(a, r_1)} \frac{f(z)}{i(z-a)} dz$, et on applique notre calcul de résidu dans le cas $m = 1$. On retrouve donc cette formule déjà connue...

5.2. Théorème des résidus. Quand γ est une courbe de Jordan, on note $\hat{\gamma}$ l'union de $\gamma([a, b])$ et de la composante connexe bornée de $\mathbb{C} \setminus \gamma([a, b])$. On parlera souvent pour ce dernier ensemble de "points entourés par γ " ou (abusivement) d'"intérieur de γ ". L'ensemble $\hat{\gamma}$ est un fermé borné de \mathbb{C} , donc un compact.

Théorème 38. Si Ω est un ouvert, f une fonction analytique sur $\Omega \setminus A$, où A est un ensemble sans point d'accumulation (donc fini ou dénombrable), γ une courbe de Jordan \mathcal{C}^1 par morceaux, orientée dans le sens trigonométrique, telle que $\gamma([a, b]) \cap A = \emptyset$ et $\hat{\gamma} \subset \Omega$, alors

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{w \in A \cap \hat{\gamma}} \text{Res}(f; w).$$

On note que $A \cap \hat{\gamma}$ est un ensemble fini, donc la somme ci-dessus est toujours une somme finie.

ADMIS.

Idée intuitive de la démonstration : si $A \cap \hat{\gamma}$ n'a qu'un seul point a , on l'entoure par un cercle $C(a, \varepsilon)$ assez petit pour que $\overline{D(a, \varepsilon)} \subset \hat{\gamma} \setminus \gamma$. Puis on relie ce cercle à γ par un chemin, et on procède comme dans la démonstration de la formule de Cauchy (ou dans celle de la cohérence de la définition du résidu) pour montrer que $\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{C(a, \varepsilon)} f(z) dz$.

Si $\text{Card}(A \cap \hat{\gamma}) = N + 1$, on procède par récurrence : supposons la formule vraie dans le cas de N points. On entoure un des points $a \in A \cap \hat{\gamma}$ par un disque $D(a, \varepsilon)$ assez petit pour être contenu dans $\hat{\gamma} \setminus \gamma$ et ne contenir aucun des autres points de A , on le relie par un chemin à γ en évitant les autres points de A , et en "élargissant" de δ ce chemin et en utilisant le cercle du petit disque pour contourner a , on obtient un nouveau chemin γ_1 qui n'entoure plus que N points de A , le point a étant laissé en dehors. En passant à la limite pour $\delta \rightarrow 0$, on voit que cette intégrale vaut

$$\int_{\gamma} f(z) dz - \int_{C(a, \varepsilon)} f(z) dz = \int_{\gamma} f(z) dz - 2\pi i \text{Res}(f, a),$$

et en appliquant la formule pour N points,

$$2\pi i \sum_{w \in A \cap \hat{\gamma} \setminus \{a\}} \text{Res}(f; w) = \int_{\gamma} f(z) dz - 2\pi i \text{Res}(f, a),$$

on conclut en passant le dernier terme de l'autre côté.

5.3. Applications au calcul d'intégrales. Un certain nombre d'intégrales définies peuvent se calculer en utilisant la formule des résidus.

Cas 1. $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix\xi} \frac{P(x)}{Q(x)} dx$, où P et Q sont des polynômes tels que $\deg Q \geq \deg P + 2$ et $Q(x) \neq 0$ pour $x \in \mathbb{R}$.

On applique la formule des résidus à $f(z) = e^{iz\xi} \frac{P(z)}{Q(z)}$. La condition sur les degrés assure qu'on a une intégrale absolument convergente sur la droite réelle (le module de l'exponentielle est 1 quand $x \in \mathbb{R}$).

On utilise le contour (courbe fermée) constitué du segment de droite de $-R$ à R , puis un arc de cercle centré en 0 qui va de R à $-R$, et on fait $R \rightarrow +\infty$. Les pôles sont les zéros de Q .

Si $\xi \neq 0$, il faut choisir le demi cercle dans le demi plan où le terme exponentiel sera de module borné par 1.

Cas 2. $\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^{+R} e^{ix\xi} \frac{P(x)}{Q(x)} dx$, où $\xi \neq 0$ et P et Q sont des polynômes tels que $\deg Q = \deg P + 1$ et $Q(x) \neq 0$ pour $x \in \mathbb{R}$.

Attention, l'intégrale que l'on calcule n'est pas absolument convergente.

On utilise un contour rectangulaire choisi de la même manière que ci-dessus. La contribution de la partie située en dehors de l'axe réel tendra vers 0 à cause du Lemme de Jordan :

Proposition 39. *Soit R une fraction rationnelle sans pôles sur l'axe réel telle que $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} R(x) = 0$ et $\alpha > 0$. Soient $X_1, X_2, Y > 0$ vérifiant $Y \geq X_1 + X_2$, et γ le contour donné par le segment $\gamma_0 := [-X_2, X_1]$ orienté dans le sens des x croissants, le segment $\gamma_1 := [X_1, X_1 + iY]$ orienté dans le sens des y croissants, le segment $\gamma_2 := [-X_2 + iY, X_1 + iY]$ orienté dans le sens des x décroissants, et le segment $\gamma_3 := [-X_2, -X_2 + iY]$ orienté dans le sens des y décroissants. On pose Γ pour le chemin constitué des trois segments γ_1, γ_2 , et γ_3 . Alors*

$$\lim_{\min(X_1, X_2) \rightarrow +\infty} \int_{\gamma} e^{i\alpha z} R(z) dz = 0.$$

Démonstration. La fraction rationnelle $R = P/Q$ doit vérifier $\deg Q \geq \deg P + 1$, donc $\lim_{|z| \rightarrow \infty} R(z) = 0$. Donc il existe r_1 tel que si $|z| \geq r_1$, alors $|R(z)| \leq \varepsilon$, et en particulier si $Y \geq \min(X_1, X_2) \geq r_1$, on aura $|R(z)| \leq \varepsilon$ pour tout z dans l'image de γ_1, γ_2 , ou γ_3 .

D'autre part, si $z = x + iy$, $|e^{i\alpha z}| = e^{-\alpha y}$. On en déduit, toujours pour $Y \geq \min(X_1, X_2) \geq r_1$,

$$\left| \int_{\gamma_1} e^{i\alpha z} R(z) dz \right|, \left| \int_{\gamma_3} e^{i\alpha z} R(z) dz \right| \leq \int_0^Y \varepsilon e^{-\alpha y} \leq \frac{\varepsilon}{\alpha}.$$

D'autre part,

$$\left| \int_{\gamma_2} e^{i\alpha z} R(z) dz \right| \leq \varepsilon (X_1 + X_2) e^{-\alpha Y} \leq \varepsilon Y e^{-\alpha Y} \leq \varepsilon,$$

pour Y suffisamment grand. Finalement l'intégrale sur tout Γ est majorée par 3ε . \square

Cas 3. On peut traiter des cas où Q a des zéros simples sur l'axe réel, mais ces intégrales doivent s'interpréter en "valeur principale" : il faut prendre la limite de l'intégrale calculée sur l'axe réel privé d'un petit intervalle symétrique autour du pôle. Cela nécessite d'ajouter au contour un petit demi-cercle autour de chaque pôle réel.

6. PRINCIPE DU MODULE MAXIMUM

Théorème 40. *Soit Ω un ouvert connexe, f analytique sur Ω , alors si $|f|$ admet un maximum local, la fonction f est constante.*

Démonstration. Soit $a \in \Omega$ un maximum local de $|f|$, c'est-à-dire qu'il existe r_0 tel que pour tout $z \in D(a, r_0)$, $|f(a)| \geq |f(z)|$. Alors $f(a) = |f(a)|e^{i\theta_0}$ et si on considère la fonction $g(z) := e^{-i\theta_0} f(z)$, on a pour tout z , $|g(z)| = |f(z)|$, et $g(a) = \operatorname{Re} g(a) = |g(a)|$.

Mais la fonction g vérifie la formule de la moyenne : $g(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(a + re^{i\theta}) d\theta$, pour tout $r \in [0, r_0]$. Donc en prenant la partie réelle des deux côtés,

$$\operatorname{Re} g(a) = \operatorname{Re} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(a + re^{i\theta}) d\theta \right) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{Re} g(a + re^{i\theta}) d\theta,$$

donc

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\operatorname{Re} g(a) - \operatorname{Re} g(a + re^{i\theta})) d\theta = 0.$$

Or d'après la propriété de maximum local, $\operatorname{Re} g(a) = |g(a)| \geq |g(a + re^{i\theta})| \geq \operatorname{Re} g(a + re^{i\theta})$, donc l'intégrande est toujours positive, et comme l'intégrale est nulle, l'intégrande doit être identiquement nulle. Finalement, $\operatorname{Re} g(z) = \operatorname{Re} g(a)$ pour tout $z \in D(a, r_0)$. Mais alors $g - g(a)$ est analytique et imaginaire pure, donc constante sur $D(a, r_0)$, donc nulle sur ce disque; d'après le Théorème du Prolongement analytique, comme Ω est connexe, elle doit être identiquement nulle sur Ω , donc g est constante, donc f est constante. \square

Remarque : on a démontré au passage que la même propriété est vérifiée par $\operatorname{Re} f$.

Corollaire 41. *Si Ω est un ouvert connexe borné, que f est analytique sur Ω et continue sur $\overline{\Omega}$, alors il existe $z_0 \in \partial\Omega := \overline{\Omega} \setminus \Omega$ tel que $|f(z_0)| = \max_{\overline{\Omega}} |f|$.*

En effet, comme $\overline{\Omega}$ est un fermé borné de \mathbb{C} , la fonction continue $|f|$ atteint son maximum dessus. Si ce maximum est atteint en un point a qui n'est pas sur $\partial\Omega$, alors c'est un maximum local (parce qu'il y a un disque $D(a, r) \subset \Omega$) et on peut appliquer le théorème, mais alors f est constante et son maximum est atteint partout, donc sur la frontière. Donc dans tous les cas il est atteint sur la frontière.