UNIVERSITÉ PAUL SABATIER
L3 PARCOURS SPÉCIAL, ANALYSE COMPLEXE 2, 2019-20
TD 7 - BIJECTIONS HOLOMORPHES

12. Applications conformes

12.1. Nous allons étudier une famille de transformations du plan complexe qui est particulièrement utile. Il sera commode d'étendre le plan en y adjoignant un point à l'infini.

Définition 12.1. La *Sphère de Riemann* est l'ensemble $S := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ muni de la topologie telle que $z \to \infty$ si et seulement si $|z| \to +\infty$.

Définition 12.2. Soient $(a, b, c, d) \in \mathbb{C}$ avec $(c, d) \neq (0, 0)$, une *homographie* est l'application $\varphi : S \longrightarrow S$ definie par

$$\begin{aligned} \varphi(z) &= \frac{az+b}{cz+d} \text{ if } z \in \mathbb{C}, cz+d \neq 0, \\ \varphi(\infty) &= \frac{a}{c} \text{ if } c \neq 0, \quad \varphi(\infty) = \infty \text{ if } c = 0, \\ \varphi(-\frac{d}{c}) &= \infty \text{ if } c \neq 0. \end{aligned}$$

Démontrer que le groupe $\mathcal{H}(S)$ est engendré par les rotations $z \mapsto e^{i\theta}z$, $\theta \in \mathbb{R}$; les homothéties $z \mapsto \lambda z$, $\lambda > 0$; les translations $z \mapsto z + b$, $b \in \mathbb{C}$; et l'inversion $\mathcal{I}$.

Indication: décomposition en éléments simples (qui se réduit ici à une division euclidienne).

Vous pouvez aussi utiliser le pivot de Gauss pour trouver un système générateur du groupe $GL(2, \mathbb{C})$ (si les méthodes matricielles ont votre faveur).

12.2. Démontrer que l'image d'une droite ou d'un cercle par une homographie est une droite ou un cercle .

Indication: il suffit de le faire pour les générateur du groupe $\mathcal{H}(S)$ (pourquoi?).

12.3. a) Démontrer que pour tout choix de points distincts $a_1, a_2, a_3 \in S$, il existe $\varphi \in \mathcal{H}(S)$ telle que $\varphi(a_1) = 0$, $\varphi(a_2) = 1$, $\varphi(a_3) = \infty$.

La valeur $\varphi(z)$ s'appelle le birapport (z, a_2, a_1, a_3).

Indications: quand $a_1, a_3 \in \mathbb{C}$, on peut écrire $\varphi(z) = c\frac{z-\alpha}{z-\beta}$. Il est facile de choisir α tel que $\varphi(a_1) = 0$, et β tel que $\varphi(a_3) = \infty$. Il ne reste plus qu'à déterminer c.

Discuter les différents cas qui se présentent quand un des a_j vaut ∞.

b) Calculer en détail les exemples des birapports de $(z, 1, \infty, 0)$ et $(z, 0, \infty, 1)$.

c) Démontrer que $\mathcal{H}(S)$ est transitif sur les triplets de points, c'àd qu'étant donnés (a_1, a_2, a_3) et (b_1, b_2, b_3), des triplets ordonnés de points distincts de S, il existe $\varphi \in \mathcal{H}(S)$ telle que $\varphi(a_j) = b_j$. Montrer que φ est unique.

Étant donnés deux cercles (ou deux droites) dans S, et deux points sur chaque cercle, montrer qu'il existe une unique $\varphi \in \mathcal{H}(S)$ qui envoie le premier cercle sur le deuxième, et les points donnés sur le premier cercle sur ceux du deuxième, en respectant l'ordre.

12.4. a) Trouver une bijection holomorphe de $\{\operatorname{Im} z > 0\}$ dans $\mathbb{D}$.

b) Trouver une bijection holomorphe de $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ dans $\mathbb{D}$.

c) Trouver une bijection holomorphe de $\{-\pi < \operatorname{Im} z < \pi\}$ dans $\mathbb{D}$.

12.5. Le but de cet exercice est de trouver toutes les bijections holomorphes de $\mathbb{D}$ dans lui-même.

a) Pour $\theta \in \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{D}$, on pose

$$\varphi_{a,\theta}(z) := e^{i\theta} \frac{a - z}{1 - \bar{a}z}.$$

Montrer que $\varphi_{a,\theta}(z)(\mathbb{D}) = \mathbb{D}$ et $\varphi_{a,\theta}(z)(\partial\mathbb{D}) = \partial\mathbb{D}$.

En notant $\varphi_a := \varphi_{a,0}$, montrer que $\varphi_a \circ \varphi_a = id$ (l'application est son propre inverse).

b) Montrer que toute bijection holomorphe de $\mathbb{D}$ est de la forme $\varphi_{a,\theta}$.

Indication : si f est une telle bijection, se ramener au cas où $f(0) = 0$ en considérant $f_1 = f \circ \varphi_a$, avec $a := f^{-1}(0)$. Puis appliquer le Lemme de Schwarz à f et à f^{-1}.

12.6. Soit $\Omega := \mathbb{C} \setminus [-1, +1]$. Ce domaine n'est pas simplement connexe (pourquoi ?).

Nous voulons démontrer que $f(z) := z^2 - 1$ admet une racine carrée sur Ω.

a) Si $g(z)^2 = f(z)$ et $g(x) > 0$ pour $x \in (1, \infty)$, montrer que l'argument de g peut être défini sur chacun des demi-plans supérieur et inférieur fermés (privés de l'origin). Puis montrer que ces déterminations coïncident pour $x \in (-\infty, -1)$, et concluez, en vous servant du fait qu'une racine carrée continue d'une fonction holomorphe est toujours holomorphe.

b) Voici une autre démonstration : $f(z) := z^2(1 - \frac{1}{z^2})$, donc il suffit de trouver une racine carrée de $f_1(z) := 1 - \frac{1}{z^2}$.

Montrez qu'il existe une bijection holomorphe de $\hat{\mathbb{C}} \setminus [-1, +1]$ sur $\mathbb{D}$ en utilisant les étapes suivantes :

L'application $z \mapsto 1/(1 - z)$ est une bijection holomorphe de $\hat{\mathbb{C}} \setminus [-1, +1]$ sur $\mathbb{C} \setminus [\frac{1}{2}, +\infty)$.

Avec un bon choix d'argument, l'application $z \mapsto (z - \frac{1}{2})^{1/2}$ est une bijection holomorphe de $\mathbb{C} \setminus [\frac{1}{2}, +\infty)$ sur $\{\operatorname{Im} z > 0\}$.

Finalement, utilisez le fait que toute fonction holomorphe qui ne s'annule pas sur $\mathbb{D}$ (ou sur un demi-plan, au demeurant) admet une racine carrée holomorphe (pourquoi ?)