UNIVERSITÉ PAUL SABATIER
L3 PARCOURS SPÉCIAL, ANALYSE COMPLEXE 2, 2017-18
TD 6 - SÉRIES DE LAURENT, PRINCIPE DE L'ARGUMENT, THÉORÈME DE ROUCHÉ

1. Séries de Laurent, Résidus, divers

1.1. Soit f une fonction analytique sur $D(a,r) \setminus \{a\}$. Alors f se développe en série de Laurent, $f(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_k (z-a)^k$.

Montrer que f admet une singularité essentielle en a si et seulement si $\inf\{k \in \mathbb{Z} : a_k \neq 0\} = -\infty$.

1.2. Soit $r > 0$ et f une fonction analytique dans le demi-disque $\Omega := \{z : \operatorname{Im} z > 0, |z| < r\}$, et continue sur $\Omega \cup]-r, r[$. On suppose que pour tout $x \in]-r, r[$, $f(x) \in \mathbb{R}$.

a) On pose $g(z) := f(z)$ pour $\operatorname{Im} z \geq 0$, et $g(z) := \overline{f(\bar{z})}$ pour $\operatorname{Im} z < 0$. Montrer que g est continue sur $D(0,r)$.

b) Soit T un triangle de sommets $a, b, c \in D(0,r)$ avec $-r < a < b < r$ et $\operatorname{Im} c > 0$. Pour $0 < \varepsilon < \operatorname{Im} c$, on définit a_ε comme le point d'intersection de $[a; c]$ avec la droite horizontale $\{\operatorname{Im} z = \varepsilon\}$, et b_ε comme le point d'intersection de $[b; c]$ avec la droite horizontale $\{\operatorname{Im} z = \varepsilon\}$. T_ε est le triangle de sommets $a_\varepsilon, b_\varepsilon, c$.

Pour toute fonction h continue sur $\Omega \cup] - r, r[$, montrer que

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{T_\varepsilon} h(\zeta) d\zeta = \int_T h(\zeta) d\zeta.$$

c) Soit h une fonction continue sur $D(0,r)$ et γ un chemin $\mathcal{C}^1$ par morceaux d'image contenue dans $D(0,r)$. On pose $\bar{\gamma}(t) := \overline{\gamma(t)}$. Montrer que

$$\int_{\bar{\gamma}} \overline{h(\bar{\zeta})} d\zeta = \overline{\int_\gamma h(\zeta) d\zeta}.$$

d) Montrer en utilisant le Théorème de Morera que g est analytique sur $D(0,r)$. (On appelle ce fait le Principe de Réflexion de Schwarz).

*e) Montrer que tous les coefficients de la série de Taylor de g en 0 sont réels.

1.3. Soit f une fonction entière (analytique sur $\mathbb{C}$ tout entier), et $a \neq b \in \mathbb{C}$. On considère $R > \max(|a|, |b|)$. Calculer

$$\int_{C(0,R)} \frac{f(z)}{(z-a)(z-b)} dz.$$

On suppose que $\lim_{z \to \infty} \frac{f(z)}{z} = 0$. Montrer que f est constante (ceci étend un peu le Théorème de Liouville).

1.4. Soient f et g des fonctions entières. On suppose qu'il existe $C > 0$ telle que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $|f(z)| \leq C|g(z)|$. Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $f(z) = \lambda g(z)$, pour tout $z \in \mathbb{C}$.

1.5. On définit the *résidu à l'infini* d'une fonction f analytique sur un ensemble du type $\{z : R < |z|\}$ par la formule

$$\mathrm{Res}(f,\infty) := -\frac{1}{2\pi i}\int_{C(0,r)} f(\zeta)d\zeta, \quad r > R.$$

a) Vérifier que ce nombre ne dépend pas de r et qu'il est égal à $\mathrm{Res}(f_1, 0)$ si on définit $f_1(z) := -z^{-2} f(\frac{1}{z})$.

b) On suppose que f est analytique sur $\mathbb{C} \setminus S$, où $S = \{s_1, s_2, \ldots, s_m\}$ est un ensemble fini. Montrer que

$$\mathrm{Res}(f,\infty) + \sum_{k=1}^{m} \mathrm{Res}(f, s_k) = 0.$$

c) On dira que f admet (respectivement) une singularité éliminable, un pôle, ou une singularité essentielle à l'infini si $f(\frac{1}{z})$ admet une singularité de ce type en 0. Quelles sont les fonctions entières qui admettent un pôle à l'infini ?

On suppose que f n'admet que des pôles ou des singularités éliminables en tout point de $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Montrer que l'ensemble des pôles de f est fini, et qu'il existe deux polynômes P et Q tels que $f(z) = P(z)/Q(z)$.

1.6. Montrer en appliquant le théorème de Casorati-Weierstrass à la fonction $f(\frac{1}{z})$ que toute fonction entière injective est de la forme $f(z) = az + b$ avec $a \neq 0$.

2. Principe de l'Argument, Théorème de Rouché

2.1. a) Si g est analytique au voisinage d'un point z_0 et $g(z_0) \neq 0$, montrer qu'il existe $r > 0$ et h analytique sur $D(z_0, r)$ tel que $g(z) = e^{h(z)}$.

b) Si f est analytique au voisinage d'un point z_0 et que $f - f(z_0)$ admet un zéro d'ordre m exactement en z_0, montrer qu'il existe une fonction φ analytique au voisinage de z_0 telle que $f(z) = f(z_0) + \varphi(z)^m$. Retrouver ainsi le théorème sur le comportement local des fonctions holomorphes.

2.2. En utilisant le théorème de l'application ouverte, montrer que si f est analytique et non-constante, alors ni $\mathrm{Re}\, f$ ni $|f|$ n'admettent de maximum local.

2.3. Soient f et g deux fonctions analytiques sur Ω avec $\bar{D}(a, r) \subset \Omega$. On suppose que si $z \in \partial D(a, r)$, $|g(z)| < |f(z)|$. Montrer que f et $f + g$ admettent le même nombre de zéros dans $D(a, r)$ (comptés avec multiplicités).

2.4. On pose $P(z) = 8z - z^3 + z^4 + \frac{z^5}{1000}$. Combien P admet-il de zéros dans $\mathbb{C}$? Dans le disque $D(0, 1)$? Dans l'anneau $D(0, 3) \setminus \bar{D}(0, 1)$? $D(0, 20) \setminus \bar{D}(0, 3)$?

2.5. Soit f analytique sur Ω avec $\bar{D}(0, 1) \subset \Omega$, f non constante.

a) On suppose que $|f(z)| = 1$ quand $|z| = 1$. Montrer que le nombre de solutions de l'équation $f(z) = w$ (comptées avec multiplicités) ne dépend pas de $w \in D(0, 1)$. En déduire que $f(D(0, 1)) \supset D(0, 1)$.

b) On suppose que $|f(z)| \geq 1$ quand $|z| = 1$ et qu'il existe $z_0 \in D(0, 1)$ tel que $|f(z_0)| < 1$. Montrer que $f(D(0, 1)) \supset D(0, 1)$.

2.6. Soit $\lambda > 1$. Montrer qu'il existe un unique z tel que $\mathrm{Re}\, z > 0$ et $\lambda - e^{-z} - z = 0$, et que cette solution est réelle. Comment se comporte-t-elle quand $\lambda \to 1$?