UNIVERSITÉ PAUL SABATIER
L3 PARCOURS SPÉCIAL, ANALYSE COMPLEXE 2, 2019-20
TD 5 - INDICE, SINGULARITÉS

PASCAL J. THOMAS

9. Singularités et séries de Laurent

9.1. Soit f continue sur $\mathbb{C}$ et holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$. Montrer en utilisant le théorème de Morera que f est en fait holomorphe sur $\mathbb{C}$.

9.2. (Extrait du partiel de novembre 2018).

Soit $r > 0$ et f une fonction analytique dans le demi-disque $\Omega := \{z : \operatorname{Im} z > 0, |z| < r\}$, et continue sur $\Omega \cup]-r, r[$. On suppose que pour tout $x \in]-r, r[$, $f(x) \in \mathbb{R}$.

a) On pose $g(z) := f(z)$ pour $\operatorname{Im} z \geq 0$, et $g(z) := \overline{f(\bar{z})}$ pour $\operatorname{Im} z < 0$. Montrer que g est continue sur $D(0, r)$.

b) Soit T un triangle de sommets $a, b, c \in D(0, r)$ avec $-r < a < b < r$ et $\operatorname{Im} c > 0$. Pour $0 < \varepsilon < \operatorname{Im} c$, on définit a_ε comme le point d'intersection de $[a; c]$ avec la droite horizontale $\{\operatorname{Im} z = \varepsilon\}$, et b_ε comme le point d'intersection de $[b; c]$ avec la droite horizontale $\{\operatorname{Im} z = \varepsilon\}$. T_ε est le triangle de sommets $a_\varepsilon, b_\varepsilon, c$.

Pour toute fonction h continue sur $\Omega \cup]-r, r[$, montrer que

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{T_\varepsilon} h(\zeta) d\zeta = \int_T h(\zeta) d\zeta.$$

c) Soit h une fonction continue sur $D(0, r)$ et γ un chemin $\mathcal{C}^1$ par morceaux d'image contenue dans $D(0, r)$. On pose $\bar{\gamma}(t) := \overline{\gamma(t)}$. Montrer que

$$\int_{\bar{\gamma}} \overline{h(\bar{\zeta})} d\zeta = \overline{\int_\gamma h(\zeta) d\zeta}.$$

d) Montrer en utilisant le Théorème de Morera que g est holomorphe sur $D(0, r)$.

*e) Montrer que tous les coefficients de la série de Taylor de g en 0 sont réels.

9.3. (Extrait du partiel de novembre 2018).

On pose $\Omega := \mathbb{C} \setminus \{1, -1\}$, et pour $z \in \Omega$, $f(z) := \frac{z^2+3z}{(z+1)^2(z-1)}$.

a) Calculer $\operatorname{Res}(f; 1)$.

b) f admet-elle une primitive sur $\Omega_1 := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\}$?

c) f admet-elle une primitive sur $\Omega_2 := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 1\}$?

d) Calculer $\operatorname{Res}(f; -1)$.

e) f admet-elle une primitive sur $\Omega_3 := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z < 1\} \setminus \{-1\}$?

f) Calculer la décomposition en éléments simples de f.

*g) Donner une primitive de f sur $\mathbb{R} \setminus \{1, -1\}$ qui puisse être étendue à $\Omega_4 := \mathbb{C} \setminus (\{\operatorname{Re} z = 1, \operatorname{Im} z < 0\} \cup \{-1\})$.

9.4. Vérifier que toutes les fonctions ci-dessous admettent une singularité isolée au point 0. Quand ce sont des pôles, donner leur ordre. Dans les quatre premiers cas, donner le développement en série de Laurent (sur l'anneau le plus grand possible, à déterminer).

(1) $f(z) = \exp\left(\frac{1}{z}\right)$.
(2) $f(z) = \frac{\sin z}{z}$.
(3) $f(z) = z \sin\left(\frac{1}{z}\right)$.
(4) $f(z) = \frac{\log(z+1)}{z^2}$.
(5) $f(z) = \frac{1}{1+z-e^z}$.

9.5. Déterminer les développements en série de Laurent de $f(z) := \frac{1}{z(z-1)(z-2)}$ sur les anneaux $A(0;0,1)$, $A(0;1,2)$ et $A(0;2,+\infty)$.

9.6. Soit $\Omega := \{x+iy : a < y < b\}$ et f analytique sur Ω telle que pour tout $z \in \Omega$, $f(z+1) = f(z)$ (périodique de période 1).

a) Montrer qu'il existe une fonction g analytique sur un anneau (à déterminer) telle que $f(z) = g(e^{2\pi i z})$.

b) En déduire que f admet un développement en "série de Fourier":

$$f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{2\pi i n z},$$

avec convergence uniforme sur tout ensemble de la forme $\{x+iy : a+\varepsilon \le y \le b-\varepsilon\}$, $\varepsilon > 0$.

9.7. On suppose que la fonction f est analytique avec une singularité isolée en a, et non identiquement nulle. On suppose qu'il existe $s \in \mathbb{R}$ tel que soit

$$\lim_{z\to a} |z-a|^s |f(z)| = 0, \tag{1}$$

soit

$$\lim_{z\to a} |z-a|^s |f(z)| = +\infty. \tag{2}$$

a) Montrer qu'il existe $m \in \mathbb{Z}$ tel que (1) est vérifié pour $s > m$ et (2) est vérifié pour $s < m$.

b) Montrer que $m = 0$ si et seulement si a est une singularité éliminable et $f(a) \neq 0$.

c) Montrer que $m < 0$ si et seulement si a est une singularité éliminable et $f(a) = 0$, avec un zéro d'ordre $-m$.

d) Montrer que $m > 0$ si et seulement si a est un pôle d'ordre m.

e) Montrer que a est une singularité essentielle si et seulement si il n'existe aucun $s \in \mathbb{R}$ tel que ni (1) ni (2) ne soit vérifiée.