# UNIVERSITÉ PAUL SABATIER
# L3 PARCOURS SPÉCIAL, ANALYSE COMPLEXE 1, 2018-19
# TD 1 - SÉRIES ENTIÈRES, ANALYTICITÉ, HOMOGRAPHIES

PASCAL J. THOMAS

Les exercices marqués d'une astérisque (*) ne sont pas essentiels, ou destinés à ceux qui veulent approfondir la théorie.

## 1. Séries entières

1.1. Déterminer les rayons de convergence des séries entières suivantes :

$$(a) \quad \sum n! z^n, \qquad (b) \quad \sum_n q^{n^2} z^n, \text{ où } |q| < 1, \qquad (c) \quad \sum z^{n!}.$$

1.2. Calculer le développement en série entière autour du point 0 de la fonction $f(z) = \frac{1}{(1-z)^m}$, pour chaque $m \in \mathbb{N}^*$. Indication : dérivées.

1.3. Montrer la formule de Hadamard pour le rayon de convergence d'une série entière $\sum a_k z^k$, à savoir

$$R = \frac{1}{\limsup_k |a_k|^{1/k}}.$$

Indications : on pose $L := \limsup_k |a_k|^{1/k}$. Alors si $r < L^{-1}$, on peut trouver $\varepsilon > 0$ tel que $L < L + \varepsilon < r^{-1}$. Montrer qu'à partir d'un certain rang, $|a_k| \leq (L+\varepsilon)^k$ et conclure que $R \geq L^{-1}$. Procéder de façon analogue pour montrer que $R \leq L^{-1}$.

1.4. (*) Soit $A := (a_i, i \in \mathcal{I}) \subset \mathbb{R}_+$ une famille de nombres positifs, où $\mathcal{I}$ est un ensemble quelconque.

a) On dit que $A$ est une *famille sommable* si

$$S := \sup \left\{ \sum_{i \in E} a_i : E \subset \mathcal{I}, E \text{ fini} \right\} < +\infty.$$

Montrer que dans ce cas, $\mathcal{I}' := \{i : a_i > 0\}$ est dénombrable, et que, quel que soit l'ordre qu'on met sur $\mathcal{I}' =: \{i_n, n \in \mathbb{N}\}$, la série $\sum a_{i_n}$ est convergente.

b) On suppose maintenant que $A \subset \mathbb{C}$, avec les mêmes notations. On dit que $A$ est une *famille sommable* si pour tout $\varepsilon > 0$, alors il existe $E \subset \mathcal{I}$ un ensemble fini tel que pour tout $F \subset \mathcal{I}$, ensemble fini, $\left|\sum_{i \in F} a_i\right| < \varepsilon$.

Montrer que $A$ est sommable si et seulement si $(|a_i|, i \in \mathcal{I})$ est sommable au sens précédent. En déduire que $\mathcal{I}' := \{i : a_i \neq 0\}$ est dénombrable, et que, quel que soit l'ordre qu'on met sur $\mathcal{I}' =: \{i_n, n \in \mathbb{N}\}$, la série $\sum a_{i_n}$ est convergente.

c) (**) Montrer qu'au contraire, si on prend une série $\sum_k a_k$ à termes réels de signe quelconque qui est semi-convergente, c'est-à-dire convergente mais pas absolument convergente, alors pour tout $\ell \in [-\infty, +\infty]$, il existe une bijection de $\mathbb{N}$ telle que $\lim_N \sum_{k=0}^N a_k = \ell$. Donc dans ce cas l'ordre de sommation fait tout !

1.5. Montrer que si $f$ est une fonction analytique en $a$ (c'est-à-dire développable en série entière autour du point $a$), alors la suite $\left(\frac{1}{k}\log\left(\frac{|f^{(k)}(a)|}{k!}\right)\right)$ est bornée supérieurement.

## 2. Exemples de fonctions analytiques et dérivabilité complexe

2.1. On note $z = x+iy$, $x, y \in \mathbb{R}$. On pose $\sinh z := \frac{1}{2}(e^z - e^{-z})$, $\cosh z := \frac{1}{2}(e^z + e^{-z})$. Montrer que

$$|\cos z|^2 = \sinh^2 y + \cos^2 x = \cosh^2 y - \sin^2 x = \frac{1}{2}\left(\cosh 2y + \cos 2x\right).$$

Déterminer tous les nombres *complexes* $z$ tels que $\cos z = 0$.

2.2. (*) Pour quels nombres complexes $(a, b, c)$ l'équation $az + b\bar{z} + c = 0$ représente-t-elle une droite du plan ?

2.3. Nous allons montrer qu'il est impossible de trouver une fonction *continue* $L$ sur $D(0, 2) \setminus \{0\}$ telle que $e^{L(z)} = z$.

a) Montrer qu'on peut se ramener au cas où $L(1) > 0$ en considérant la fonction $L - \operatorname{Im} L(1)$.

b) Montrer que l'ensemble $A := \{\theta \in [0, \pi] : \operatorname{Im} L(e^{i\theta}) = \theta$ est fermé (c'est-à-dire stable par limites de suites).

c) Montrer que l'ensemble $A$ est ouvert, c'est-à-dire que pour tout $\theta \in A$, il existe $\delta > 0$ tel que $]\theta-\delta, \theta+\delta[\subset A$. Indication : si $\operatorname{Im} L(e^{i\theta}) \neq \theta$, alors $|\operatorname{Im} L(e^{i\theta}) - \theta| \geq 2\pi$.

d) Conclure que $A = [0, \pi]$.

e) Montrer de même que pour tout $\theta \in [-\pi, 0]$, $\operatorname{Im} L(e^{i\theta}) = \theta$. Conclure par contradiction.

2.4. (*) Montrer que la fonction $z \mapsto \cos\sqrt{z}$, définie a priori sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ en posant $\sqrt{z} := \exp(\frac{1}{2}\operatorname{Log} z)$, peut s'étendre en une fonction analytique sur tout $\mathbb{C}$, et donner son développement en série entière.

## 3. Homographies

Nous allons étudier une famille de transformations du plan complexe qui est particulièrement utile. Il sera commode d'étendre le plan en y adjoignant un point à l'infini. Il faut au moins connaître les deux définitions et faire les deux exercices qui les suivent.

*Définition* 3.1. La *Sphère de Riemann* est l'ensemble $S := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ muni de la topologie telle que $z \to \infty$ si et seulement si $|z| \to +\infty$.

*Définition* 3.2. Soient $(a, b, c, d) \in \mathbb{C}$ avec $(c, d) \neq (0, 0)$, une *homographie* est l'application $\varphi : S \longrightarrow S$ definie par

$$\begin{aligned}
\varphi(z) &= \frac{az+b}{cz+d} \text{ if } z \in \mathbb{C}, cz+d \neq 0, \\
\varphi(\infty) &= \frac{a}{c} \text{ if } c \neq 0, \quad \varphi(\infty) = \infty \text{ if } c = 0, \\
\varphi(-\frac{d}{c}) &= \infty \text{ if } c \neq 0.
\end{aligned}$$

3.1. Démontrer que le groupe $\mathcal{H}(S)$ est engendré par les rotations $z \mapsto e^{i\theta} z$, $\theta \in \mathbb{R}$; les homothéties $z \mapsto \lambda z$, $\lambda > 0$; les translations $z \mapsto z + b$, $b \in \mathbb{C}$; et l'inversion $\mathcal{I}$.

Indication: décomposition en éléments simples (qui se réduit ici à une division euclidienne).

Vous pouvez aussi utiliser le pivot de Gauss pour trouver un système générateur du groupe $GL(2, \mathbb{C})$ (si les méthodes matricielles ont votre faveur).

3.2. Démontrer que l'image d'une droite ou d'un cercle par une homographie est une droite ou un cercle .

Indication: il suffit de le faire pour les générateurs du groupe $\mathcal{H}(S)$ (pourquoi?).

3.3. a) Démontrer que pour tout choix de points distincts $a_1, a_2, a_3 \in S$, il existe $\varphi \in \mathcal{H}(S)$ telle que $\varphi(a_1) = 0$, $\varphi(a_2) = 1$, $\varphi(a_3) = \infty$.

La valeur $\varphi(z)$ s'appelle le birapport $(z, a_2, a_1, a_3)$.

Indications: quand $a_1, a_3 \in \mathbb{C}$, on peut écrire $\varphi(z) = c\frac{z-\alpha}{z-\beta}$. Il est facile de choisir $\alpha$ tel que $\varphi(a_1) = 0$, et $\beta$ tel que $\varphi(a_3) = \infty$. Il ne reste plus qu'à déterminer $c$.

Discuter les différents cas qui se présentent quand un des $a_j$ vaut $\infty$.

b) Calculer en détail les exemples des birapports de $(z, 1, \infty, 0)$ et $(z, 0, \infty, 1)$.

c) Démontrer que $\mathcal{H}(S)$ est transitif sur les triplets de points, c'àd qu'étant donnés $(a_1, a_2, a_3)$ et $(b_1, b_2, b_3)$, des triplets ordonnés de points distincts de $S$, il existe $\varphi \in \mathcal{H}(S)$ telle que $\varphi(a_j) = b_j$. Montrer que $\varphi$ est unique.

Étant donnés deux cercles (ou deux droites) dans $S$, et deux points sur chaque cercle, montrer qu'il existe une unique $\varphi \in \mathcal{H}(S)$ qui envoie le premier cercle sur le deuxième, et les points donnés sur le premier cercle sur ceux du deuxième, en respectant l'ordre.