UNIVERSITÉ PAUL SABATIER : PRÉPARATION À L'AGRÉGATION DE MATHÉMATIQUES SUITES ET SÉRIES NUMÉRIQUES, SÉRIES ENTIÈRES ET SÉRIES DE FOURIER

PASCAL THOMAS

Edition de Septembre 2008, reprenant des passages dûs à Xavier Buff. Les remarques et corrections sont les bienvenues.

Rappel du programme.

Il s'agit d'extraits du programme prévu pour 2009, que vous pouvez consulter en particulier en passant par le site de notre préparation.

Nombres réels. Le corps $\mathbb{R}$ des nombres réels. Topologie de $\mathbb{R}$. Structure des sous-groupes additifs de $\mathbb{R}$. Droite numérique achevée.

Suites de nombres réels. convergence, valeur d'adhérence. Limites inférieure et supérieure. Suites de Cauchy. Complétude de $\mathbb{R}$. Théorème de Bolzano-Weierstrass. Parties compactes de $\mathbb{R}$. Parties connexes de $\mathbb{R}$.

Suites définies par une relation $u_{n+1} = f(u_n)$. Étude graphique. Points fixes attractifs. Points fixes répulsifs.

Séries numériques. Convergence des séries à termes réels. Séries géométriques, séries de Riemmann. Séries à termes positifs. Sommation des relations de comparaison. Comparaison d'une série et d'une intégrale. Estimations des restes. Convergence absolue. Produits de séries. Séries alternées.

Suites et séries de fonctions. Convergence simple, convergence uniforme. Continuité et dérivabilité de la limite. Cas des séries de fonctions : convergence normale.

Séries entières. Rayon de convergence. Propriétés de la somme d?une série entière sur son disque de convergence : continuité, dérivabilité par rapport la variable complexe, primitives.

Analyse de Fourier. Séries de Fourier des fonctions localement intégrables périodiques d'une variable réelle. Lemme de Riemann-Lebesgue. Produit de convolution de fonctions périodiques. Théorèmes de Dirichlet et de Fejer. Théorie L^2 : convergence en moyenne quadratique, formule de Parseval.

Semaines du 1 au 13 septembre 2008 :

Mercredi 3/09, 8 h – 10 h, 10 h 15 – 12 h 15 ;
Jeudi 4/09, 14 h – 16 h (avec M. Pradel) ;
Vendredi 5/09, 8 h – 10 h, 10 h 15 – 12 h 15 ;
Lundi 8/09, 8 h – 10 h, 10 h 15 – 12 h 15 ;
Mercredi 10/09, 8 h – 10 h, 10 h 15 – 12 h 15 ;
Jeudi 11/09, 14 h – 16 h (avec M. Pradel).
Horaires donnés sous toutes réserves.
Consultez le site http://www.math.ups-tlse.fr/agreg

Sujets traités et bibliographie.

Avant d'attaquer les exercices, vous devez réviser les sujets ci-dessous, que je me propose de traiter, dans les références à votre disposition.

Les numéros donnés dans la liste des sujets concernent des exercices qui pourraient faire partie d'un cours, qu'il faut regarder en priorité, et que je traiterai.

Suites numériques : convergence (1.6, 1.8,), suites de Cauchy, suites extraites, valeurs d'adhérence (2.4). Suites réelles : limite supérieure, limite inférieure (2.5). Image d'une suite par une fonction continue (2.9). Suites définies par une relation de récurrence (3.3).

Séries numériques : séries convergentes, absolument convergentes. Séries à termes positifs. Théorèmes de comparaison (entre séries et avec une intégrale généralisée, 4.2). Critères classiques (Cauchy, D'Alembert 4.4, Raabe-Duhamel 4.5). Développement décimal des nombres réels (4.10). Séries semi-convergentes (5.1). Familles sommables, convergence commutative (5.5). Transformation d'Abel (5.8). Procédés de sommation. Produits infinis (6.1, 6.4).

Suites et séries de fonctions : convergence simple, uniforme, normale (8.1, 8.3). Propriétés de la limite (continuité, dérivabilité, intégrales) (7.6, 7.9, 7.10).

Séries entières : rayon de convergence (9.1), comportement sur le cercle de convergence, théorème d'Abel (9.2). Développements en série entière. Exemples de séries de Fourier et de séries trigonométriques.

Ces sujets sont couverts en bonne partie dans les cours de Premier Cycle que vous avez pu suivre à l'université ou ailleurs, ou dans les livres suivants (liste non limitative) :

Votre livre de cours de premier cycle préféré; j'ai moi-même un faible pour celui de Lelong-Ferrand et Arnaudiès, mais Lehning ou Chambadal & Ovaert sont d'autres bons exemples. Voici quelques autres suggestions.

J. Combes, *Suites et Séries.*
C'est en plein dans le sujet, et la sélection d'exercices est bonne.

W. Rudin, *Principes de l'Analyse Mathématique,* chapitres 3 & 7.
Référence un peu plus originale, et qui vous rappelle les choses de façon compacte.

M. Spivak, *Calculus,* Part IV.
Spivak ne recule jamais devant la beauté et la difficulté que peuvent recéler des mathématiques pourtant déjà anciennes et considérées comme élémentaires. Vous trouverez dans ce livre, par exemple, une démonstration de la transcendance de e. Un tome supplémentaire donne les solutions des exercices.

Y. Chevallard & R. Rolland, *Théorie des Séries : 1/ Séries numériques, 2/ Séries entières.*
Ce livre n'est malheureusement plus disponible en librairie, mais il figure à la bibliothèque de l'agreg disponible le jour de l'oral, d'après la liste relevée en 2000 ; il a une présentation distrayante et comporte beaucoup d'exemples, souvent historiquement motivés.

Vous trouverez bien d'autres exemples de calculs de suites ou de séries dans des livres d'analyse plus avancés, particulièrement en analyse numérique, en analyse complexe, en probabilités, en dynamique...

Bons livres un peu anciens :

K. Knopp, *Theory and application of infinite series,* sorti à l'origine en 1921. La terminologie a vieilli, mais les exemples peuvent être fort astucieux.

E. C. Titchmarsh, *The Theory of Functions,* qui consacre son chapitre 1 aux séries.

Un bon livre moderne sur les séries de Fourier :

T. Körner, *Fourier Analysis.*

Exercices et résultats supplémentaires

En plus des exercices proches du cours mentionnés plus haut, nous aborderons des exercices choisis parmi les suivants :

1.1 (a), 1.3, 1.4, 1.5, 1.7, 2.4, 2.9, 2.10, 3.2, 3.10, 3.11 (selon le temps disponible), 4.3, 4.6, 4.8, 4.12 (selon le temps disponible), 5.6, 6.2, 6.6, 7.3, 7.4, 7.8, 8.4, 9.4, 10.3, 10.5 (a) et (b).

Regardez-les, essayez avant le TD de voir si vous savez les résoudre ! Je vous encourage à proposer des modifications à la liste ci-dessus, en plus et en moins.

1. Suites, convergence

1.1. *Etudier la limite de :*

a) $\frac{n!}{n^n}$.

b) $(n^2+1)^{1/8} - (n+1)^{1/4}$.

c) $(a^n + b^n)^{1/n}$ *où* $a,\ b \geq 0$. *Pouvez-vous généraliser à une somme avec un nombre fini quelconque de termes ? Et avec une infinité de termes ?*

d) $\frac{\alpha(n)}{n}$, *où* $\alpha(n)$ *est le nombre de nombres premiers (strictement plus grands que* 1*) qui divisent* n.

(Les quatre questions ci-dessus sont tirées de M. Spivak, Calculus, chap. 21, ex. 1, p. 380)

e) $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. *Pourriez-vous le faire sans utiliser la connaissance de la fonction logarithme, mais seulement la définition de e par*

$$e := \sum_0^\infty \frac{1}{n!} \ ?$$

1.2. *On pose*

$$a_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}, \quad b_n = \frac{1}{n \cdot n!} + \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}.$$

Montrer que $\{a_n\}$ *est croissante,* $\{b_n\}$ *est décroissante ; en déduire qu'elles ont une limite commune (notée e, bien entendu).*

Montrer que e est irrationnel.

1.3. *Soit* (a_n) *une suite telle que* $a_n > 0$ *pour tout* n *et* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. *Montrer qu'il existe* n_0 *tel que* $a_{n_0} = \max_{n\geq 0} a_n$.

(M. Spivak, *Calculus,* chap. 21, ex. 8, p. 382).

1.4. *Montrer que*

$$\frac{n^n}{e^{n-1}} < n! < \frac{(n+1)^{n+1}}{e^n}$$

(indication : passer aux logarithmes et comparer les sommes avec des intégrales). En déduire $\lim_{n\to\infty} \frac{(n!)^{1/n}}{n}$.

(M. Spivak, *Calculus,* chap. 21, ex. 10, p. 382 ; cf. aussi J. Combes, Suites et Séries, exercice 16, p. 32).

1.5. *Déterminer* $\lim \left(\sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2}\right)$*,* $\lim \left(\sum_{k=1}^n \ln\left(1+\frac{k}{n^2}\right)\right)$*, et* $\lim \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)\right)$*. Attention, la dernière de ces limites requiert l'application d'un théorème (dont on peut se passer pour les deux premières).*

(inspiré de K. Knopp, p. 107, exercice15).

1.6. *(Convergence au sens de Cesàro)*
Soit $\{s_n\}$ *une suite à valeurs complexes, on pose*

$$\sigma_n := \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} s_k.$$

a) Si $\lim_{n\to\infty} s_n = s$*, montrer que* $\lim_{n\to\infty} \sigma_n = s$.
b) Montrer que la réciproque est fausse : donner un exemple où $\{\sigma_n\}$ *converge, mais pas* $\{s_n\}$.
c) Peut-on avoir $s_n > 0$, $\limsup_{n\to\infty} s_n = +\infty$*, et* $\lim_{n\to\infty} \sigma_n = 0$*?*

(W. Rudin, *Principes de l'Analyse Mathématique,* chapitre 3, exercice 14).

1.7. *On suppose que* (a_n) *et* (b_n) *tendent vers* 0*, et que* (b_n) *est décroissante. On suppose de plus que* $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n - a_{n+1}}{b_n - b_{n+1}}$ *existe.*
Montrer que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n - a_{n+1}}{b_n - b_{n+1}}.$$

(K. Knopp, p. 107).

1.8. *Le fait suivant, connu sous le nom de Théorème de Toeplitz (K. Knopp, pp. 74–78), est un exemple de procédé de convergence, c'est-à-dire d'une méthode qui transforme les suites en des suites qui convergent mieux (dans certains cas). Cela généralise aussi le théorème de Cesaro.*
On considère des coefficients $(a_{jk}, 0 \le k \le j)$ *tels que*

(1) *Pour tout* k *fixé,* $\lim_{j\to\infty} a_{jk} = 0$*;*
(2) $\sup_j \left(\sum_{k=0}^j |a_{jk}|\right) < \infty$;
(3) $\lim_{j\to\infty} \sum_{k=0}^j a_{jk} = 1$.

Soit (x_n) *une suite convergente. Montrer qu'on a alors*

$$\lim_{j\to\infty} \sum_{k=0}^{j} a_{jk} x_k = \lim_{j\to\infty} x_j.$$

Donner des exemples de suites (x_n) *non convergentes tel que le procédé les rende convergentes.*
Exemple: $a_{jk} = 2^{-j} C_j^k$ *(interprétation probabiliste ?)*

2. Sous-suites, suites de Cauchy...

2.1. *Montrer que si* $\{u_{2n}\}$, $\{u_{2n+1}\}$ *et* $\{u_{3n}\}$ *sont convergentes, alors* $\{u_n\}$ *est convergente.*

(J. Combes, Suites et Séries, exercice 4, p. 31).

2.2. *Montrer qu'une suite réelle bornée est convergente si et seulement si elle admet une seule valeur d'adhérence. Montrer que ce résultat peut échouer (dans quelle direction ?) si la suite n'est pas bornée.*

Si on travaille dans la topologie de la droite réelle complétée, $[-\infty, +\infty]$ *(pour admettre* $+\infty$ *et* $-\infty$ *comme limites), cette difficulté disparaît.*

2.3. *Montrer que toute suite* $\{u_n\}$ *à valeurs réelles contient, soit une sous-suite croissante (au sens large), soit une sous-suite décroissante (au sens large).*

Essayez de faire cette démonstration sans utiliser la propriété de Bolzano-Weierstrass, et déduisez-en une démonstration de ladite propriété (pour les suites réelles). Indication : considérez l'ensemble

$$E := \{n \in \mathbb{N} : \forall k > n, u_k \geq u_n\},$$

et distinguez selon le cas où E *est soit infini, soit fini (ou vide).*

(cf. M. Spivak, *Calculus,* p. 378).

2.4. *Montrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence d'une suite est fermé (utilisez l'une ou l'autre définition de "valeur d'adhérence").*

Réciproquement, montrez que tout fermé borné de $\mathbb{R}$ *est exactement l'ensemble des valeurs d'adhérence d'une certaine suite. (On peut généraliser cette réciproque, au moins au cas d'un espace métrique compact).*

On rappelle les définitions suivantes : pour $\{u_n\}$ une suite à valeurs réelles,

$$\limsup_{n\to\infty} u_n := \lim_{n\to\infty} \sup_{k\geq n} u_k, \liminf_{n\to\infty} u_n := \lim_{n\to\infty} \inf_{k\geq n} u_k.$$

Pourquoi les limites en question sont-elles toujours définies ?

2.5. *Soit* $\{u_n\}$ *une suite à valeurs réelles. Nous considérons ses valeurs d'adhérence dans la droite réelle complétée* $[-\infty, +\infty]$.

Montrer que

$$\limsup_{n\to\infty} u_n = \max\left\{\lambda : \lambda \textit{ valeur d'adhérence de } \{u_n\}\right\}.$$

2.6. *Soient* $\{u_n\}$, $\{v_n\}$ *deux suites à valeurs réelles. Montrer que*

$$\liminf_{n\to\infty} u_n + \liminf_{n\to\infty} v_n \leq \limsup_{n\to\infty}(u_n + v_n) \leq \limsup_{n\to\infty} u_n + \limsup_{n\to\infty} v_n.$$

Donner des exemples d'inégalité stricte.

2.7. *Montrer qu'une suite de Cauchy qui admet une valeur d'adhérence est convergente.*

2.8. *Soit une suite* $\{u_n\}$ *à valeurs réelles telle que il existe un nombre* l *vérifiant : pour toute sous-suite* $\{u_{n_p}, p \in \mathbb{N}\}$, *alors il existe une suite extraite de cette sous-suite* $\{u_{n_{p_k}}, k \in \mathbb{N}\}$, *telle que* $\lim_{k\to\infty} u_{n_{p_k}} = l$. *Montrer que* $\{u_n\}$ *converge vers* l.

2.9. *Soit f une application uniformément continue (sur un espace métrique X) et $\{u_n\}$ une suite de Cauchy dans X. Montrer que $\{f(u_n)\}$ est une suite de Cauchy.*

Montrer qu'il existe des applications non uniformément continues qui transforme toute suite de Cauchy en suite de Cauchy, par exemple $f(x) = x^2$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Donner un exemple de fonction continue f et de suite de Cauchy $\{u_n\}$ telles que $\{f(u_n)\}$ ne soit pas une suite de Cauchy (on suggère $X = [0, 1[$; quelles sont dans ce cas les suites de Cauchy qui ne sont pas convergentes ? Les fonctions continues qui ne sont pas uniformément continues ?)

2.10. *a) Montrer que tout sous-groupe additif $G \subset \mathbb{R}$ est soit dense dans $\mathbb{R}$, soit de la forme $a\mathbb{Z}$, avec un certain $a > 0$ (indication: considérer $a := \inf(G \cap \mathbb{R}_+^*)$, dans le cas où ce nombre est positif).*

b) Soit $\omega \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ et $G = \{p + q\omega, p, q \in \mathbb{Z}\}$. Montrer que G est dense dans $\mathbb{R}$ si et seulement si $\omega \notin \mathbb{Q}$.

c) Déterminer les valeurs d'adhérence de $\{\sin(nx), n \in \mathbb{N}\}$ selon les valeurs de $x \in \mathbb{R}$.

(adapté de : J. Lelong-Ferrand, J. M. Arnaudiès, *Cours de mathématiques, tome 2 : Analyse,* 4e édition, Exercices, Chapitre II, 6 & 7).

3. Suites définies par une relation de récurrence

3.1. *Soit $a > 0$. On définit une suite $\{u_n\}$ par $u_{n+1} = \sqrt{a + u_n}$. Etudier la nature de la suite (on se donne une valeur $u_0 \geq -a$).*

(J. Combes, Suites et Séries, exercice 7, p. 31).

3.2. *La suite $\{x_n\}$ est définie par $x_0 = 0$, $x_{2m} = \frac{1}{2}x_{2m-1}$, $x_{2m+1} = \frac{1}{2} + x_{2m}$.*
Déterminer $\limsup_n x_n$ et $\liminf_n x_n$.

(W. Rudin, *Principes de l'Analyse Mathématique,* chapitre 3, exercice 4).

3.3. *Soit f une fonction continue et croissante sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$, telle que $f(I) \subset I$, et $x_0 \in I$ tel que $f(x_0) > x_0$. Montrer que la suite x_n définie par $x_{n+1} = f(x_n)$ est croissante. Si de plus il existe $a \in I$ tel que $a > x_0$ et $f(a) = a$, alors x_n converge ; quelle est sa limite ?*

Que se passe-t-il dans le cas où $f(x_0) < x_0$?

Que se passe-t-il dans le cas où f est décroissante ? (indication : considérer la fonction $f \circ f$).

3.4. *Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que $f(a) = a$ et que $|f'(x_0)| < 1$. Montrer qu'il existe un nombre $\delta > 0$ tel que si $|b - a| < \delta$, alors la suite x_n définie par $x_0 = b$, $x_{n+1} = f(x_n)$ converge vers a.*

3.5. *Discuter le comportement de la suite définie par*

$$u_{n+1} = au_n + b$$

en fonction de u_0, a et b.

3.6. *Calculer explicitement les termes de la suite de Fibonacci :*

$$u_1 = u_2 = 1, u_{n+2} = u_{n+1} + u_n.$$

3.7. *Soit $\alpha > 0$ et $x_1 > \sqrt{\alpha}$. On définit, pour $n \geq 1$,*

$$x_{n+1} := \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{\alpha}{x_n}\right).$$

a) Montrer que $\{x_n\}$ est décroissante et que $\lim_{n\to\infty} x_n = \sqrt{\alpha}$.

b) En posant $\varepsilon_n := x_n - \sqrt{\alpha}$, montrer que

$$\varepsilon_{n+1} = \frac{\varepsilon_n^2}{2x_n} < \frac{\varepsilon_n^2}{2\sqrt{\alpha}},$$

et que donc, avec $\beta := 2\sqrt{\alpha}$,

$$\varepsilon_{n+1} < \beta\left(\frac{\varepsilon_1}{\beta}\right)^{2^n},$$

autrement dit on a une convergence très rapide. (Il s'agit d'un cas particulier très facile de la méthode de Newton).

(W. Rudin, *Principes de l'Analyse Mathématique,* chapitre 3, exercice 16).

3.8. *(Itération des homographies du plan complexe)*

Une homographie du plan complexe (ou application de Möbius) est l'application définie par

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \text{ pour } z \in \mathbb{C} \setminus \{-\frac{d}{c}\} \quad \text{où } a,b,c,d \in \mathbb{C}, ad-bc \neq 0.$$

On étend f comme une application de la sphère de Riemann $S = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ dans elle-même, avec les conventions :

$$f(-\frac{d}{c}) = \infty \text{ si } c \neq 0; \quad f(\infty) = \frac{a}{c} \text{ si } c \neq 0, f(\infty) = \infty \text{ si } c = 0 \text{ (et donc } a \neq 0).$$

On obtient alors une bijection de S dans S (le vérifier). On notera f^n l'itérée n-ième de f (c'est-à-dire que $f^{n+1} = f \circ f^n$, $f^0(z) = z$).

a) Montrer que, si f n'est pas l'identité, elle admet un ou deux points fixes dans S (discuter selon les valeurs de a, b, c, d.)

b) Etant donnés deux points distincts arbitraires z_1 et z_2, montrer qu'il existe une homographie g telle que $g(z_1) = 0$, $g(z_2) = \infty$.

c) Montrer que si f admet deux points fixes et g est choisie comme dans la question précédente, alors $f_1 := g \circ f \circ g^{-1}$ admet deux points fixes en 0 et ∞. Quelle est alors la forme de f_1? Pour quelles valeurs de z la suite $\{f_1^n(z)\}$ sera-t-elle convergente, vers quelle limite ? (discuter selon les valeurs de $f_1'(0)$).

d) Pour une fonction h qui admet ∞ comme point fixe, on pose $h'(\infty) := h_1'(0)$, en définissant $h_1(\zeta) := 1/(h(1/\zeta))$. Montrer que $f'(z_1)f'(z_2) = 1$ et discuter du comportement de $\{f^n(z)\}$ selon les valeurs de z_0 et de $f'(z_1)$.

e) Mener l'étude similaire aux questions b)-c)-d) dans le cas où f n'admet qu'un seul point fixe.

(Tout ce qui précède est adapté de A. Beardon, Iteration of Rational Functions, p. 3–5).

f) Spécialiser l'étude ci-dessus au cas des homographies réelles (définies sur la droite réelle projective, avec des coefficients réels). Exprimer la discussion en termes d'algèbre linéaire sur $\mathbb{R}^2$.

g) On pose $\mathbb{D} = \{z : |z| < 1\}$. A quelles conditions a-t-on $f(\mathbb{D}) = \mathbb{D}$? $f(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$? Etudier la suite $\{f^n(z)\}$ dans ces deux cas.

3.9. *Soit z_n une suite complexe définie par $z_0 \in \mathbb{C}$ et $z_{n+1} = z_n^2$.*

(1) *Etudier le comportement de la suite lorsque $|z_0| \neq 1$.*
(2) *Dorénavant, on suppose que $z_0 = e^{2i\pi t}$ avec $t \in [0, 1[$. Montrer que le comportement de la suite z_n est lié au développement de t en base 2.*
(3) *Montrer que pour tout entier $p \geq 1$, il existe z_0 dans le cercle unité tel que la suite soit périodique de période exactement p.*
(4) *Montrer qu'il existe des z_0 pour lesquels la suite est dense dans le cercle unité.*

3.10. *On considère la suite définie par récurrence $u_0 \in \mathbb{R}$, $u_{n+1} = 2u_n^2 - 1$.*

(1) *Montrer que si $u_0 \notin [-1, 1]$, la suite est croissante et $\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.*
(2) *On suppose dorénavant que $u_0 \in [-1, 1]$ et on choisit $\alpha \in [0, \pi]$ tel que $u_0 = \cos \alpha$. Montrer que $u_n = \cos(2^n \alpha)$.*
(3) *Montrer que pour tout entier $p \geq 1$, il existe $u_0 \in [-1, 1]$ tel que la suite soit périodique de période exactement p.*
(4) *Montrer qu'il existe des $u_0 \in [-1, 1]$ tels que la suite u_n soit dense dans $[-1, 1]$.*

(adapté de A. Beardon, *Iteration of Rational Functions.*)

3.11. *(Fractions continues) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on note $\lfloor x \rfloor$ la partie entière de x et $\{x\} := x - \lfloor x \rfloor$ sa partie fractionnaire. On suppose dorénavant que x est un irrationnel et on définit deux suite a_n et x_n par récurrence :*

$$a_0 = \lfloor x \rfloor, \; x_0 = \{x\}, \quad a_{n+1} = \left\lfloor \frac{1}{x_n} \right\rfloor \; \text{et } x_{n+1} = \left\{ \frac{1}{x_n} \right\}.$$

Pour $a \in \mathbb{R}$, on définit $f_a : \mathbb{R} \cup \{\infty\} \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ et $L_a : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ par

$$f_a(x) = a + \frac{1}{x} \quad \text{et} \quad L_a \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} a & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + y \\ x \end{pmatrix}.$$

On définit $\pi : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ par $\pi \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{x}{y}$.
On définit des suites $\{p_n\}_{n \geq -1}$ et $\{q_n\}_{n \geq -1}$

$$\begin{cases} p_{-1} = 1 \\ q_{-1} = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix} = L_{a_0} \circ L_{a_1} \circ \ldots \circ L_{a_n} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(1) *Montrer que pour tout $a \in \mathbb{R}$,*
$$f_a \left(\frac{x}{y} \right) = \pi \circ L_a \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$
(2) *Montrer que*
$$\frac{p_n}{q_n} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_n}}}.$$
(3) *Montrer que*
$$L_{a_0} \circ L_{a_1} \circ \ldots \circ L_{a_n} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{n-1} \\ q_{n-1} \end{pmatrix}.$$

(4) *En déduire la matrice* M_n *de* $L_{a_0} \circ L_{a_1} \circ \ldots \circ L_{a_n}$ *ainsi que la relation de récurrence*

$$p_{n+1} = a_{n+1}p_n + p_{n-1} \quad \textit{et} \quad q_{n+1} = a_{n+1}q_n + q_{n-1}.$$

(5) *Montrer que pour tout* $n \geq 0$,

$$x = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_n + x_n}}} = f_{a_0} \circ f_{a_1} \circ \ldots \circ f_{a_n}\left(\frac{1}{x_n}\right).$$

(6) *En déduire que pour* $n \geq 0$,

$$x = \frac{p_n + p_{n-1}x_n}{q_n + q_{n-1}x_n}.$$

(7) *En calculant le déterminant de* M_n *deux manières montrer que*

$$q_n p_{n-1} - p_n q_{n-1} = (-1)^n.$$

(8) *En déduire que* p_n *et* q_n *sont premiers entre eux, que*

$$\frac{p_{2n}}{q_{2n}} < x < \frac{p_{2n+1}}{q_{2n+1}},$$

que la suite p_{2n}/q_{2n} *est croissante et que la suite* p_{2n+1}/q_{2n+1} *est décroissante.*

(9) *Montrer que pour* $n \geq 0$,

$$\left|x - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{q_n q_{n+1}}$$

et donc que $p_n/q_n \to x$. *Montrer en utilisant la question précédente que la fraction* $\frac{p_n}{q_n}$ *est celle qui réalise la meilleure approximation de* x *parmi les fractions de dénominateur inférieur ou égal à* q_n.

(10) *Déterminer* p_n *et* q_n *pour* $1 \leq n \leq 3$ *et* $x = \pi$. *En déduire une valeur approchée de* π, *préciser une borne de l'erreur.*

(11) *Soit* $a \in \mathbb{N}^*$. *Déterminer* $x = a + \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{a + \ddots}}}$.

(12) *Plus généralement, si la suite* a_n *est (pré)périodique, montrer que* x *est une solution irrationnelle d'une équation du second degré à coefficients entiers (utiliser la question 6).*

(13) *On dit que* x *est diophantien d'exposant* α *si et seulement si il existe* C *tel que pour tout* $p \in \mathbb{Z}$ *et* $q \in \mathbb{N}^*$, $|x - p/q| > C/q^\alpha$. *Montrer que les nombres diophantiens d'exposant* 2 *sont exactement ceux pour lesquels la suite* $\{a_n\}$ *est bornée.*

(14) *Montrer que pour tout* $\alpha > 2$ *(non nécessairement entier), presque tout* $x \in \mathbb{R}$ *est diophantien d'exposant* α.

(Adapté de : J. Lelong-Ferrand, J. M. Arnaudiès, *Cours de mathématiques, tome 2 : Analyse,* 4e édition, Exercices, Chapitre I, 18 à 21, p. 562–563. On peut aussi consulter J. Milnor, *Dynamics in One Complex Variable,* 2nd Edition, p. 216–225).

4. Séries à termes positifs ou nuls

4.1. *Déterminer la nature des séries suivantes :*
(a) $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}$ *(Spivak, no. 4, p. 485);*
(b) $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n^{1+\frac{\ln(\ln n)}{\ln n}}}$*;*
(c) $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$*;*
(d) $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{(\ln n)^{\ln(\ln n)}}$.
Indication : comparaison avec séries de Riemann ou de Bertrand.

4.2. *Donner un exemple de fonction continue positive* f *telle que* $\int_0^\infty f(t)dt$ *converge, mais* $\lim_{n\to\infty} f(n) = \infty$.

4.3. *Montrer que si* $a_n \geq 0$ *pour tout* n*, et* $\sum a_n$ *est convergente, alors la série* $\sum_n \frac{\sqrt{a_n}}{n}$ *converge aussi. (Indication : pensez à l'inégalité de Cauchy-Schwarz).*

(W. Rudin, *Principes de l'Analyse Mathématique,* chapitre 3, exercice 7, p. 73).

4.4. *(Comparaison des règles de Cauchy et de D'Alembert)*
Montrer que si $a_n \geq 0$ *pour tout* n*, alors*

$$\limsup_{n\to\infty} a_n^{1/n} \leq \limsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n},$$

et que l'inégalité peut être stricte. Traduire ceci en termes des règles de Cauchy et de D'Alembert.

4.5. *(Règle de Raabe-Duhamel)*
Soit $a_n > 0$ *pour tout* n*. Montrer que si*

$$\liminf_{n\to\infty} n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) > 1,$$

la série $\sum a_n$ *converge, et si*

$$\limsup_{n\to\infty} n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) < 1,$$

la série $\sum a_n$ *diverge. (Indication : comparer* $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ *avec le rapport des deux termes successifs d'une série de Riemann).*

(Cf. par exemple Y. Chevallard, Théorie des Séries : 1/ Séries numériques, p. 79 & 89, et bien d'autres ouvrages).

Application : $a_n = 2^{-2n}C_{2n}^n$ *(c'est la probabilité que la marche aléatoire discrète symétrique sur* $\mathbb{Z}$ *revienne au point de départ au temps* $2n$*; la convergence ou la divergence de la série répond à la question de savoir si cette marche aléatoire est récurrente).*

4.6. *(Critère de condensation de Cauchy)*
Montrer que si $a_n \geq a_{n+1} \geq 0$ *pour tout* n*, alors la convergence de la série* $\sum a_n$ *est équivalente à celle de la série* $\sum 2^n a_{2^n}$*. En déduire que si* $\sum a_n$ *converge, alors* na_n *tend vers* 0.

Donner des contre-exemples si la suite $\{a_n\}$ *n'est pas décroissante. En fait, montrez que pour toute suite* ε_n *qui décroit vers* 0*, on peut trouver une suite* $\{a_n\}$ *à termes positifs ou nuls telle que* $\sum a_n$ *est convergente et* $\limsup a_n/\varepsilon_n = +\infty$.

(Cf. par exemple Y. Chevallard, *Théorie des Séries : 1/ Séries numériques,* p. 81 & 85.)

4.7. *Cet exercice vous montre que séries convergentes et divergentes peuvent être arbitrairement "proches" (si elles ne sont pas équivalentes).*

Montrer que pour toute suite γ_n *à termes positifs telle que* $\lim_n \gamma_n = +\infty$, *on peut trouver une série à termes positifs* $\sum a_n$ *telle que* $\sum_n a_n < +\infty$ *et* $\sum_n \gamma_n a_n = +\infty$.

4.8. *Montrer que pour toute suite* $\{a_n\}$ *à termes positifs ou nuls telle que* $\sum a_n$ *est convergente, on peut trouver une suite* $\{b_n\}$ *à termes positifs ou nuls telle que* $\sum b_n$ *est convergente, et* $\lim_{n\to\infty} b_n/a_n = +\infty$. *(Indication : travailler d'abord sur les sommes partielles,* $\sum_{k=0}^n a_k$ *et* $\sum_{k=0}^n b_k$*).*

De même, montrer que pour toute suite $\{a_n\}$ *à termes positifs ou nuls telle que* $\sum a_n$ *est divergente, on peut trouver une suite* $\{b_n\}$ *à termes positifs ou nuls telle que* $\sum b_n$ *est divergente, et* $\lim_{n\to\infty} b_n/a_n = 0$.

4.9. *On suppose que* $a_n > 0$, $A_n := \sum_{k=0}^n a_k$ *et* $\sum a_n$ *est divergente.*

a) Montrer que $\sum \frac{a_n}{1+a_n}$ *est divergente.*

b) Montrer que

$$\sum_{j=1}^{k} \frac{a_{N+j}}{A_{N+j}} \geq 1 - \frac{A_N}{A_{N+k}},$$

et en déduire que $\sum \frac{a_n}{A_n}$ *diverge.*

c) Montrer que

$$\frac{a_n}{A_n^2} \leq \frac{1}{A_{n-1}} - \frac{1}{A_n}$$

et en déduire que $\sum \frac{a_n}{A_n^2}$ *converge.*

d) Que dire de

$$\sum \frac{a_n}{1+na_n} \quad \text{et} \sum \frac{a_n}{1+n^2 a_n} \quad ?$$

(Source : W. Rudin, *Principes de l'Analyse Mathématique,* chapitre 3, exercice 11).

4.10. *(Développement décimal des réels)*

a) Soit $\{a_n\}$ *une suite d'entiers* $a_n \in \{0, \ldots, 9\}$. *Montrer que la série de terme général* $a_n/10^n$ *converge. De plus, si on pose*

$$x := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{10^n} \in [0,1],$$

et qu'on suppose que pour tout $n_1 \in \mathbb{N}$, *il existe* $n_2 \geq n_1 \in \mathbb{N}$ *tel que* $a_{n_2} < 9$, *alors*

$$a_n = E\left[10^n x - 10E[10^{n-1}x]\right],$$

où $E[y]$ *désigne la partie entière du réel* y.

b) Réciproquement, si on prend $x \in [0,1[$, *et qu'on pose*

$$a_n := E\left[10^n x - 10E[10^{n-1}x]\right],$$

montrer que la série $\sum_n \frac{a_n}{10^n}$ *converge vers* x.

4.11. *(Développement décimal des rationnels)*

a) Soit $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$. On considère une suite d'entiers $c_n \in \{0, \ldots, 9\}$, périodique de période m, i.e. $c_{n+m} = c_n$ pour tout n. Soit

$$x := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{10^n}.$$

Montrer que la série converge, et que $x \in \mathbb{Q}$ (donner un procédé pour calculer x sous forme de fraction. Indication : commencer par séparer la série en "paquets" de longueur m).

b) Réciproquement, soit p/q un nombre rationnel (avec $p, q \in \mathbb{N}^*$). On va montrer que son développement décimal est périodique.

Montrer qu'il existe toujours deux nombres entiers $A < B \in \{0, \ldots, q\}$ tels que q divise $10^B p - 10^A p$.

En déduire que $10^B p/q$ et $10^A p/q$ admettent la même partie décimale de leur développement.

En comparant avec les décimales du développement de p/q, montrer que celui-ci est de période $B - A$.

(Adapté de : C. Deschamps, A. Warusfel, et al., *Cours de Mathématiques 2e année,* Dunod ed., chapitre 9, p. 265–266.)

4.12. *On rappelle la définition de l'ensemble ternaire de Cantor. Si $J = [a, b]$ est un intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$, on pose $J_0 := [a, \frac{2}{3}a + \frac{1}{3}b]$, $J_2 := [\frac{1}{3}a + \frac{2}{3}b, b]$. (Quand on perce un trou d'un tiers de sa longueur au milieu de l'intervalle J, on obtient $J_0 \cup J_2$). On définit une suite décroissante de compacts de $\mathbb{R}$ par $K_0 := [0, 1]$ et, si K_n est une union finie d'intervalles compacts $\bigcup J_j$, alors $K_{n+1} := \bigcup J_{j,0} \cup J_{j,2}$. Finalement, on pose $K := \bigcap_n K_n$.*

C'est un fait classique, que nous ne démontrerons pas ici, que K est un ensemble compact, non vide, sans point isolé, et dont chaque composante connexe se réduit à un point.

Montrer qu'un réel x appartient à K si et seulement si il existe une suite $\{\alpha_n\}_{n \geq 1} \in \{0, 2\}^{\mathbb{N}}$ telle que

$$x = \sum_{1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{3^n}.$$

Indication : tout $x \in [0, 1[$ peut sécrire sous la forme ci-dessus si on autorise $\alpha_n \in \{0, 1, 2\}$. Trouver l'ensemble des x tels que $\alpha_1 \neq 1$. Itérer en considérant $3x$...

(Source : W. Rudin, *Principes de l'Analyse Mathématique,* chapitre 3, exercice 19, p. 72).

5. Séries à termes de signe quelconque

5.1. *Donner un exemple de deux séries dont les termes généraux sont équivalents, et qui sont de nature différente (indication : utilisez la série de terme général $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}$).*

5.2. *Etudier la convergence de la série $\sum (-1)^n \sqrt{n} \sin \frac{1}{n}$ (indication : développement limité de la fonction sinus).*

5.3. *Déterminer la nature de la série $\sum \frac{(-1)^n}{n^\alpha + (-1)^n}$ en fonction de α.*

5.4. *Le but de l'exemple qui suit est de montrer que l'ordre de sommation est important quand la convergence n'est pas absolue.*

Considérons

$$\begin{aligned} a_{n,k} &:= \frac{(-1)^n}{n} \text{ si } n \geq k \geq 1, \\ a_{n,k} &:= 0 \text{ si } 1 \leq n \leq k-1. \end{aligned}$$

Montrer que pour tout $k \geq 1$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_{n,k} = S_k \in \mathbb{R}$, *et que la la série* $\sum S_k$ *est convergente.*

Montrer que pour tout $n \geq 1$, $\sum_{k=1}^{\infty} a_{n,k} = s_n \in \mathbb{R}$, *calculer* s_n *et montrer que la série* $\sum s_n$ *est divergente.*

5.5. *Soit* $\sum a_n$ *une série semi-convergente. Montrer que pour tout* $l \in [-\infty, +\infty]$, *on peut trouver une bijection* φ *de* $\mathbb{N}$ *telle que* $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_{\varphi(k)} = l$.

(Cf. par exemple Y. Chevallard, *Théorie des Séries : 1/ Séries numériques,* Proposition 7, p. 104.)

5.6. *On rappelle la définition de la série-produit au sens de Cauchy : si* $\{a_n\}$ *et* $\{b_n\}$ *sont deux suites à termes complexes, la série produit a pour terme général*

$$c_n := \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}.$$

a) Montrer le théorème de Mertens : si $\sum a_n$ *est absolument convergente et* $\sum b_n$ *convergente, alors* $\sum c_n$ *est convergente.*

Méthode : posons $A_n := \sum_{k=0}^{n} a_k$, $B_n := \sum_{k=0}^{n} b_k$, $\varepsilon_n := \sum_{k=n+1}^{\infty} b_k$, $C_n := \sum_{k=0}^{n} c_k$.

Montrer que

$$C_n = A_n \sum_{k=0}^{\infty} b_k - \sum_{k=0}^{n} a_k \varepsilon_{n-k}. \tag{1}$$

Montrer que le deuxième terme du membre de droite tend vers 0.

b) L'hypothèse de convergence absolue ne peut pas être abandonnée: prendre $a_n = b_n = (-1)^n/\sqrt{n}$.

(Cf. W. Rudin, *Principes de l'Analyse Mathématique,* chapitre 3, Théorème 3.50, ou Y. Chevallard, *Théorie des Séries : 1/ Séries numériques,* Proposition 9, p. 70).

5.7. *Avec les notations de l'exercice ci-dessus, on suppose que les trois limites suivantes existent :*

$$A = \lim_{n\to\infty} A_n, \quad B = \lim_{n\to\infty} B_n, \quad C = \lim_{n\to\infty} C_n.$$

Alors $C = AB$ *(théorème dû à Cesàro).*

Méthode : montrez que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} C_k = AB$$

en utilisant l'identité (1) *pour exprimer* C_k. *Utilisez le résultat de l'exercice 1.6 sur la convergence au sens de Cesàro.*

(Y. Chevallard, *Théorie des Séries : 1/ Séries numériques,* Chapitre 4, Proposition 8, p. 105).

5.8. *(Usage de la transformation d'Abel)*

La Transformation d'Abel est aux séries ce que l'intégration par parties est aux intégrales. En reprenant les notations de l'exercice ci-dessus, elle consiste à remarquer que

$$\sum_{n=p}^{q} a_n b_n = \sum_{n=p}^{q-1} (A_n - A_{p-1})(b_n - b_{n+1}) + (A_q - A_{p-1}) b_q.$$

a) Montrer que si la suite $\{A_n\}$ est bornée, que $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$, et que la série de terme général $|b_n - b_{n+1}|$ est convergente, alors la série de terme général $a_n b_n$ est convergente.

b) Application : étudier la convergence de la série de terme général $b_n \cos(nx)$, où $x \in \mathbb{R}$, et $\{b_n\}$ est une suite positive convergeant vers 0 en décroissant.

(cf. W. Rudin, *Principes de l'Analyse Mathématique,* chapitre 3, Théorèmes 3.41 et suivants).

5.9. *(Théorèmes taubériens)*

On reprend les définitions et les notations de l'exercice 1.6 sur la convergence au sens de Cesàro. On pose de plus $a_n = s_n - s_{n-1}$, pour $n \geq 1$, et $s_0 = 0$, donc $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$.

a) On suppose que $\{\sigma_n\}$ converge, et de plus que $\lim_{n\to\infty} na_n = 0$. Montrer que $\{s_n\}$ converge, et admet la même limite que $\{\sigma_n\}$. Indication : démontrer l'identité

$$s_n - \sigma_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} k a_k.$$

b) Démontrer, pour tout $m < n$, l'identité

$$s_n - \sigma_n = \frac{m+1}{n-m}(\sigma_n - \sigma_m) + \frac{1}{n-m} \sum_{k=m+1}^{n} (s_n - s_k).$$

On suppose désormais seulement que pour tout n, $|na_n| \leq M < +\infty$.

Montrer que pour $m < i < n$,

$$|s_n - s_i| \leq \frac{(n-m-1)M}{m+2}.$$

c) En choisissant successivement $m = m(n)$ tel que $|s_n - s_i| \leq M\varepsilon$ sous les hypothèses ci-dessus, puis n et m suffisamment grands, montrer que

$$\limsup_{n\to\infty} |s_n - \sigma| \leq M\varepsilon.$$

En déduire la même conclusion que pour la question a).

(W. Rudin, *Principes de l'Analyse Mathématique,* chapitre 3, exercice 14)

6. Produits infinis

On rappelle quelques définitions et résultats. Je suis ici les notations d'Arnaudiès et Fraysse, *Cours de Mathématiques, tome 2 : Analyse,* Chap. IX, p. 490 et suivantes.

Etant donnée une suite $(v_n)_{n\geq 1}$ de nombres complexes, on dit que le *produit infini* $\prod v_n$ converge (vers une limite non nulle) si et seulement la suite $(\prod_{k=1}^{n} v_k)$ admet une limite non nulle.

Remarque : cette définition pose un problème, qui est que la nature du produit peut changer si on change un nombre fini de termes (il suffit d'ajouter ou d'enlever un terme $v_n = 0$). On prend donc souvent, en particulier quand on considère des produits de fonctions holomorphes, une définition affinée : le produit $\prod_{n\geq 1} v_n$ converge si il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\prod_{n>N} v_n$ converge vers une limite non nulle, au sens précédent. La limite sera nulle si et seulement si $\prod_{n=1}^{N} v_n = 0$.

Si le produit converge, on aura que $\lim_n v_n = 1$, on note donc souvent $v_n = 1 + u_n$. On dit que le produit est *absolument convergent* si la série $\sum |u_n|$ est convergente (ce qui implique la convergence du produit, au sens élargi mentionné ci-dessus). C'est le cas le plus fréquemment considéré. Nous allons voir ci-dessous que la généralisation pose des problèmes...

Si tous les v_n sont réels et positifs, alors le produit $\prod v_n$ converge si et seulement si $\sum \log v_n$ converge.

6.1. *a) Montrer que le produit infini*

$$\prod_{n\geq 2}\left(1+\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}\right)$$

ne converge pas vers une limite non-nulle, tandis que la série $\sum \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$ *converge.*

b) Pour $p \geq 1$*, on pose*

$$u_{2p} = \frac{1}{\sqrt{p}}, \quad u_{2p+1} = \frac{1}{1+\frac{1}{\sqrt{p}}} - 1.$$

Montrer que $\prod(1+u_n)$ *converge, mais que* $\sum_n u_n$ *diverge.*

Un autre exemple du même type est donné par $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{2n}$.

6.2. *Etudier le produit infini* $\prod n^{n^{-\alpha}}$ *selon les valeurs de* $\alpha > 0$.

6.3. *Montrer que*

$$\prod\left(1+\frac{i}{n}\right) \text{ diverge, mais } \prod\left|1+\frac{i}{n}\right| \text{ converge.}$$

6.4. *a) Soit* $\{u_n\} \subset \mathbb{C}$ *une suite telle que* $\sum u_n$ *et* $\sum |u_n|^2$ *convergent. Montrer que* $\prod(1+u_n)$ *converge.*

b) Soit $\{u_n\} \subset \mathbb{R}$ *une suite de réels tels que* $\sum u_n$ *converge et* $u_n \neq -1$ *pour tout* n*. Montrer que* $\prod(1+u_n)$ *converge vers une limite non nulle si et seulement si* $\sum u_n^2$ *converge.*

(cf. Arnaudiès & Fraysse, *Cours de mathématiques, t. 2: Analyse,* p. 490–495).

6.5. *Calculer les produits infinis suivants :*

(a) $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$;

(b) $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+x^{2^n}\right)$.

(Spivak, no. 4, p. 485)

6.6. *On prend* $a_0 > 0$ *et on pose* $a_{n+1} = \sin a_n$.

a) Montrer que la suite $\{a_n\}$ *est décroissante, en déduire qu'elle converge et quelle est sa limite.*

b) En utilisant le fait que la série $\sum(a_n - a_{n+1})$ *converge (évident ; pourquoi ?), montrer que* $\sum a_n^3$ *converge.*

c) En utilisant le produit infini $\prod \frac{a_{n+1}}{a_n}$*, montrer que la série* $\sum a_n^2$ *diverge.*

(Y. Chevallard, *Théorie des Séries : 1/ Séries numériques,* p. 205.)

6.7. *(Fréquence des nombres premiers)*

a) En utilisant le produit infini

$$\prod_{p \text{ premier}} \frac{1}{1-\frac{1}{p}},$$

la décomposition des entiers naturels en facteurs premiers, et le fait que $(1-x)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ *pour* $|x| < 1$*, montrer que la série*

$$\sum_{p \text{ premier}} \frac{1}{p}$$

est divergente.

b) Déduire du a) le fait suivant (et faible !) sur la répartition des nombres premiers: pour tout $\varepsilon > 0$*,*

$$\liminf_{k\to\infty} \frac{p_{k+1}-p_k}{(\log p_{k+1})^{1+\varepsilon}} = 0.$$

(Pour une autre démonstration de la question a), cf. Y. Chevallard, *Théorie des Séries : 1/ Séries numériques,* exemple 12, p. 21).

7. Suites de fonctions

7.1. *Etudier la convergence simple, puis uniforme sur* $[0,1]$*, des suites de fonctions suivantes :*

$$f_n(x) := x^n(1-x) \quad g_n(x) := x^n(1-x^n) \quad h_n(x) := x^n(1-x)^n.$$

7.2. *On définit*

$$f_n(x) = \frac{x}{1+nx^2}.$$

Montrer que la suite (f_n) *converge uniformément sur* $\mathbb{R}$ *vers une fonction* f*.*

Montrer que pour tout $x \neq 0$*,* $f'(x) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x)$*, mais que cette relation est fausse pour* $x = 0$*.*

(Source : W. Rudin, *Principes de l'Analyse Mathématique,* ch. 7, exercice 7.)

7.3. *Sur quels intervalles de* $\mathbb{R}$ *la suite de fonctions* $(\arctan(nx))_{n\geq 0}$ *est-elle simplement convergente ? uniformément convergente ?*

7.4. *Soient* $p, q > 0$*. On pose* $f_n(x) := n^{-p}\sin(n^q x)$*. Montrer que la suite* (f_n) *converge uniformément vers la fonction nulle. Déterminer le maximum des entiers* k *tels que la suite* $(f_n^{(k)})$ *des dérivées* k*-ièmes converge uniformément sur* $\mathbb{R}$ *(vers quelle fonction ?)*

7.5. *Calculer, pour* $x \in \mathbb{R}$*,* $\lim_{n\to\infty}(\lim_{k\to\infty}(\cos n!\pi x)^{2k})$*. Peut-on intervertir les deux limites?*

L'exercice qui suit montre qu'on ne peut pas trouver une seule suite de fonctions continues qui tende vers la limite en question.

(Source : M. Spivak, *Calculus,* chap. 21, ex. 5, p. 381)

7.6. *Soit (f_n) une suite de fonctions continues qui converge simplement vers f sur un intervalle de longueur positive I. Le théorème de Baire permet de démontrer que l'ensemble des points où f est continue est dense dans I. Voici les grandes lignes d'une démonstration de ce fait.*

(a) Pour $n, m \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$E_{m,n} := \left\{ x : |f_n(x) - f_k(x)| \leq \frac{1}{m} \forall k \geq n \right\}.$$

On pose $E'_{m,n} := E_{m,n} \setminus E^\circ_{m,n}$ la frontière de $E_{m,n}$, et $E := \bigcup_{m,n} E'_{m,n}$. Rappeler pourquoi $I \setminus E$ est dense dans I.

(b) Soit $x \in I$. Pour tout m, montrer qu'il existe $n(m)$ tel que $x \in E_{m,n}$.

(c) Si de plus $x \notin E$, montrer qu'il existe un voisinage V de x tel que pour tout $y \in V$, $|f(x) - f(y)| \leq 3/m$.

En déduire que f est continue en tout point de $I \setminus E$.

(Source : Royden, *Real Analysis,* chap. 7, ex. 31, p. 141)

7.7. *Soient (a_n) et (b_n) deux suites de réels telles que pour tout $x \in [\alpha, \beta]$, $a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) \to 0$ quand $n \to \infty$.*

Montrer que $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = 0$. Méthode : si on suppose que la condition n'est pas vraie, montrer qu'on peut trouver une sous-suite de

$$f_n(x) = \frac{(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))^2}{a_n^2 + b_n^2}$$

qui tende vers zéro sur l'intervalle $[\alpha, \beta]$. Considérer $\int_\alpha^\beta f_n(x)dx$.

(Source: J. Combes, *Suites et Séries,* exercice 10, p. 119.)

7.8. *Soit $\{r_n\}$ une énumération des rationnels (i.e. $\mathbb{Q} = \{r_0, r_1, r_2, \dots\}$). On pose*

$$\varphi(x) := \sum_{n : r_n < x} 2^{-n}.$$

Etudier la continuité de φ en chaque point $x \in \mathbb{R}$. Trouver une suite de fonctions qui converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers φ.

7.9 (un théorème de Dini). *On suppose que (f_n) est une suite de fonctions continues sur un compact K, qui convergent vers une limite continue, et telles que pour tout x, $f_n(x) \geq f_{n+1}(x)$. Montrer que la convergence est uniforme.*

Indication : se ramener au cas où $f = 0$ et considérer les ensembles $\{x \in K : f_n(x) \geq \varepsilon\}$.

(Source : W. Rudin, *Principes de l'Analyse Mathématique,* ch. 7, théorème 7.13.)

7.10. *On dit qu'une fonction f définie sur un espace métrique X, à valeurs réelles, est* semi-continue supérieurement, *ou "scs", si et seulement si pour tout $a \in X$,*

$$f(a) \geq \limsup_{x\to a} f(x).$$

Ici, on note $B(a, r)$ la boule de centre a et de rayon r (c'est $]a - r, a + r[$ dans le cas des réels) et on définit

$$\limsup_{x\to a} f(x) = \lim_{r\to 0} \sup_{B(a,r)} f.$$

(a) Montrer que f est semi-continue supérieurement si et seulement si pour tout $\lambda \in R$, $\{x : f(x) < \lambda\}$ est ouvert.

(b) Si (f_n) est une suite de fonctions scs, montrer que $\inf_n f_n$ est scs.

(c) Si f est une fonction scs sur un intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$, montrer qu'elle est majorée.

*(*d) Si f est une fonction scs sur un intervalle fermé borné I de $\mathbb{R}$, montrer que*

$$f(x) = \inf \{\varphi(x) : \varphi \text{ continue}, \varphi(t) \geq f(t), \forall t \in I\}.$$

*(*e) Si f est une fonction scs sur un intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$, montrer qu'elle est la limite d'une suite décroissante de fonctions continues.*

8. Séries et produits de fonctions

8.1. *On pose*

$$f_n(x) := |\sin(\pi x)|, n \leq x \leq n+1; \quad f_n(x) := 0 \text{ pour } x \in [0, n] \cup [n+1, +\infty[.$$

Montrer que la série $\sum \frac{1}{n} f_n$ est uniformément et absolument convergente sur $[0, +\infty[$, mais pas normalement convergente.

8.2. *Pour tout $\alpha > 0$, montrer que*

$$\int_0^1 \frac{x^{\alpha-1}}{1+x} dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\alpha + k}.$$

(Source: J. Combes, *Suites et Séries,* exercice 8, p. 118.)

8.3. *Montrer que la série*

$$\sum (-1)^n \frac{x^2 + n}{n^2}$$

converge uniformément sur chaque intervalle borné, mais ne converge absolument pour aucune valeur de x.

(Source : W. Rudin, *Principes de l'Analyse Mathématique,* ch. 7, exercice 6.)

8.4. *Soit (a_n) une suite de nombres réels non nuls tels que la série $\sum a_n$ soit absolument convergente, et (x_n) une suite de nombre réels distincts. Soit φ une fonction continue sur $\mathbb{R}$, sauf au point 0, et bornée. Montrer que la fonction*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \varphi(x - x_n)$$

est discontinue exactement aux points x_n.

(Source: J. Combes, *Suites et Séries,* exercice 5, p. 118.)

8.5. *(Théorème de Borel)*

a) Rappeler brièvement pourquoi on peut construire une fonction infiniment dérivable g telle que $0 \leq g(x) \leq 1$ pour tout x, $g(x) = 1$ pour $|x| \leq 1/2$, $g(x) = 0$ pour $|x| \geq 1$.

b) Etant donnée une suite quelconque de réels $(a_n)_{n\geq 0}$, on définit

$$f(x) = \sum_{n \geq 0} a_n \frac{x^n}{n!} g(\lambda_n x),$$

où $\lambda_n = 1$ si $|a_n| \leq 1$, $\lambda_n = |a_n|$ si $|a_n| \geq 1$. Montrer que la série est uniformément convergente sur $\mathbb{R}$. Montrer que pour tout $k \geq 1$, les séries obtenues en sommant les dérivées k-èmes prises terme à terme sont elles aussi uniformément convergentes. En déduire que $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ et que $f^{(n)}(0) = a_n$ pour tout n.

c) Donner des exemples où la série de Taylor de f en 0 est de rayon de convergence nul.

(Source : J. Combes, *Suites et Séries.*)

8.6. *Montrer que la série de fonctions*

$$\sum_{n\geq 1} \frac{z^{n-1}}{(1-z^n)(1-z^{n+1})}$$

converge vers $\frac{1}{(1-z)^2}$ quand $|z| < 1$ et vers $\frac{1}{z(1-z)^2}$ quand $|z| > 1$. (Indication; arriver à une somme téléscopique en utilisant l'identité $\frac{1}{(1-a)(1-b)} = \frac{1}{(a-b)}\left(\frac{1}{(1-a)} - \frac{1}{(1-b)}\right)$).

(Source : Whittaker, *Modern Analysis*, p. 59, exercice 1).

8.7 (Produits de Blaschke)**.** *a) Soit $a \in \mathbb{D}$. On appelle "facteur de Blaschke" la fonction*

$$b_a(z) = \frac{\bar{a}}{|a|}\frac{a-z}{1-z\bar{a}}.$$

Montrer que b_a est holomorphe sur $\mathbb{D}$, que $b_a(z) = 0$ si et seulement si $z = a$, que $|b_a(z)| = 1$ pour tout z tel que $|z| = 1$ et que $|b_a(z)| < 1$ pour tout $z \in \mathbb{D}$.

b) Soit $\{a_k\}_{k\in N} \subset \mathbb{D} \setminus \{0\}$. On note $b_k := b_{a_k}$.

Montrer que $\prod_{k=0}^{\infty} b_k(z)$ converge, uniformément sur tout compact de $\mathbb{D}$, vers une fonction qui s'annule exactement aux points $\{a_k\}_{k\in N}$ ssi $\sum_{k=0}^{\infty}(1 - |a_k|) < \infty$.

c) Soit $B(z)$ le produit de Blaschke avec les zéros $a_k = 1 - \frac{1}{k^2}$, $k \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\lim_{r<0,r\to 1} B(r) = 0$, en fait plus précisément, pour $\alpha_{N-1} < r < \alpha_N$,

$$|B(r)| < \prod_1^{N-1} \frac{r - \alpha_n}{1 - \alpha_n r} < \prod_1^{N-1} \frac{\alpha_N - \alpha_n}{1 - \alpha_n} < e^{-N/3}.$$

d) Montrer qu'il existe une suite $\{\alpha_n\} \subset]0, 1[$ telle que, si $B(z)$ est le produit de Blaschke avec les zéros α_k, alors $\limsup_{r<1,r\to 1} B(r) = 1$, et $\lim_{r<1,r\to 1} B(r)$ n'existe pas.

Indication : les $1 - \alpha_n$ devront décroître exponentiellement.

(source : Rudin, *Analyse réelle et Complexe*).

9. Séries entières

9.1. *(Jouons avec le rayon de convergence...)*

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière, et R_1 son rayon de convergence. Soit (n_k) une suite strictement croissante d'entiers. On considère la série

$$\sum a_k z^{n_k}.$$

Cela revient à prendre la série $\sum b_n z^n$, où

$$b_n = 0 \text{ si } n \notin \{n_k\}, \quad b_n = a_k \text{ si } n = n_k.$$

Soit R_2 son rayon de convergence.

a) Montrer que si $R_1 < 1$, alors $R_2 \geq R_1$, que si $R_1 > 1$, alors $R_2 \leq R_1$, et que si $R_1 = 1$, alors $R_2 = 1$.

b) Etudier les exemples :

$$a_n = 2^{2^n}, n_k = 2^k; \quad a_n = 2^{-2^n}, n_k = 2^k.$$

c) On suppose que $\lim_{n\to\infty} |a_n|^{1/n}$ existe et appartient à $]0, +\infty[$.

On pose $m := \liminf_{n\to\infty} \frac{n_k}{k}$, $M := \limsup_{n\to\infty} \frac{n_k}{k}$. Etudier le comportement de R_2 selon que

(i) $R_1 < 1$ et $m < \infty$ ou $m = \infty$;

(ii) $R_1 > 1$ et $M < \infty$ ou $M = \infty$.

d) On suppose que $m = M \in]0, \infty[$. Que dire de R_2 en fonction de R_1?

e) Montrer par des exemples que d'autres comportements sont possibles.

(Source : R. Rolland, *Théorie des Séries : 2/ Séries entières,* ch. 2, exercice 2, p. 55.)

9.2 (Théorème d'Abel)**.** *Soit (a_n) une suite de nombres complexes tels que $\sum a_n$ converge. On pose $f(x) = \sum_n a_n x^n$. Alors*

$$\lim_{x\to 1, x<1} f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n.$$

Méthode : en utilisant la transformation d'Abel, montrer que si on pose $A_n := \sum_{k=0}^{n} a_k$, alors

$$\sum_{k=0}^{n+1} a_k x^k = (1-x) \sum_{k=0}^{n} A_k x^k + A_{n+1} x^{n+1};$$

puis utiliser le fait (à démontrer) que

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = (1-x) \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \right) x^k.$$

Utiliser le théorème d'Abel pour démontrer que si $\sum a_n$ et $\sum b_n$ convergent vers A et B respectivement, et si leur série produit $\sum c_n$ converge vers C, alors $C = AB$.

(Source : W. Rudin, *Principes de l'Analyse Mathématique,* chapitre 8, théorème 8.2).

9.3. *En appliquant le théorème d'Abel à la série entière $\sum \frac{z^n}{n}$, déterminer*

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots = \sum_{k\geq 0} \frac{(-1)^k}{2k+1}.$$

9.4. *a) On suppose que la série numérique $\sum n a_n$ converge. Montrer que $\sum a_n$ converge.*

b) On suppose de plus que $\sum a_n z^n$ a un rayon de convergence égal à 1. Montrer que la fonction $f(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$ est dérivable à gauche au point 1, et que $f'_g(1) = \sum_{n\geq 0} n a_n$.

c) Construire une suite $\{a_n\}$ telle que $\sum a_n$ converge, $\sum n a_n$ diverge, et f définie comme précédemment est dérivable à gauche au point 1.

9.5. *Pour quelles valeurs du nombre complexe λ peut-il exister une fonction f non constante, développable en série entière au voisinage de l'origine, et vérifiant $f(\lambda z) = f(z)$ pour z assez proche de 0 ?*

9.6 (Deux exemples de séries lacunaires)**.** *a) Soit $\{n_k\}$ une suite d'entiers telle que $n_{k+1} > 2kn_k$. On pose*

$$h(z) := \sum_k 5^k z^{n_k}.$$

Montrer que le rayon de convergence de cette série est 1, qu'il existe une constante $c > 0$ telle que $|h(z)| > c5^m$ pour tout z tel que $|z| = 1-(1/n_m)$, et que par conséquent, $\lim_{r\to 1} h(e^{i\theta})$ n'existe pour aucune valeur de θ.

Indication: pour cette valeur de $|z|$, le m-ième terme de la somme dominera tous les autres.

b) Montrer qu'il existe une fonction f développable en série entière au voisinage de 0 telle que $f(z^2) = f(z) - z$ et $f(0) = 0$. Quel est le rayon de convergence de la série ? Montrer que pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$,

$$\limsup_{r\to 1} |f(re^{2\pi ik/2^n})| = +\infty.$$

9.7. *a) On considère la fonction $f(x) = \cos(\alpha \arcsin x)$, où $\alpha \in \mathbb{R}$. Pourquoi f est-elle développable en série entière ?*

Trouver une équation linéaire du second ordre satisfaite par f, et en déduire le développement en série entière de f.

b) Appliquer la même méthode à $g(x) = (1 + x)^\alpha$.

(Source : C. Deschamps, A. Warusfel, et al. Mathématiques 2e année, Dunod, coll. “J'intègre”, ch. 17, p. 672).

10. Séries de Fourier

Rappels de Cours et Notations

Dans tout ce qui suit, f désigne une fonctions à valeurs complexes, définie sur $\mathbb{R}$, 2π-périodique, intégrable sur tout intervalle borné de $\mathbb{R}$. On pose pour $n \in \mathbb{Z}$,

$$c_n(f) := \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int}\,dt\ ,$$

et pour $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n(f) := \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos nt\,dt$, $b_n(f) := \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin nt\,dt$ et $a_0(f) := \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt$.

Les sommes partielles de la série de Fourier de f sont données par $S_n(f,x) := \sum_{k=-n}^{n} c_k(f)e^{ikx}$.

[Identité de Parseval]

Théorème 10.1. *Si $f \in L^2([0,2\pi])$, alors $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt = \sum_{-\infty}^{\infty} |c_n(f)|^2$.*

[Théorème de Fejér]

Théorème 10.2. *On pose $\sigma_n(f,x) := \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} S_k(f,x)$. Si f est continue au point a, alors $\lim_{n\to+\infty} \sigma_n(f,a) = f(a)$.*

Si de plus f est continue sur $\mathbb{R}$, la convergence est uniforme sur $\mathbb{R}$.

10.1. *(Démonstration du Théorème de Fejér)*

On pose $K_n(t) := \sum_{k=-n}^{n} \frac{n+1-|k|}{n+1} e^{ikt}$.

a) Montrer que $\sigma_n(f,x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)K_n(x-t)dt$.

b) Montrer que

$$K_n(t) = \frac{1}{n+1}\frac{\sin^2\frac{(n+1)t}{2}}{\sin^2\frac{t}{2}},\ t \neq 0, K_n(0) = n+1\ .$$

c) Montrer que $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K_n(t)dt = 1$, *et que pour tout* $\delta > 0$, $K_n(t) \to 0$ *quand* $n \to \infty$, *uniformément sur l'ensemble* $[-\pi,-\delta] \cup [\delta,\pi]$.

d) Démontrer le Théorème de Fejér.

10.2. *Application du Théorème de Fejér: Théorème de Weierstrass.*

Nous allons montrer qu'étant donnée une fonction g *continue sur* $[-1,1]$ *et un nombre* $\varepsilon > 0$ *donné, il existe un polynôme* P *tel que* $\sup_{x\in[-1,1]} |g(x) - P(x)| < \varepsilon$.

a) Montrer que la fonction définie sur $[0,\pi]$ *par* $f(t) = g(\cos t)$ *peut se prolonger en une fonction continue, paire,* 2π*-périodique.*

b) Montrer que pour tout entier positif n*, il existe un polynôme de degré* n*,* T_n*, tel que* $\cos nx = T_n(\cos x)$*, et conclure.*

(Source pour les deux exercices qui précèdent: T. Körner, *Fourier Analysis.*)

10.3. *a) Calculer la série de Fourier de la fonction donnée par* $f(x) = x^2$ *pour* $x \in]-\pi,\pi]$*. En déduire le calcul explicite de* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$, $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}$, *et* $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^4}$.

b) Montrer que, pour tout $x \in [0,2\pi]$,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2} = \frac{x^2}{4} - \frac{\pi x}{2} + \frac{\pi^2}{6}.$$

En déduire que pour tout p *entier positif,* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2p}} \in \pi^{2p}\mathbb{Q}$ *(prendre des primitives bien choisies).*

10.4 (Séries lacunaires)**.** *On veut donner un exemple de fonction continue nulle part dérivable.*

a) *Montrer que la fonction* f *définie ci-dessous est continue sur* $\mathbb{R}$ *:*

$$f(x) = \sum_{n\geq 1}\frac{\cos(n!x)}{n!}.$$

Etant donné $x_0 \in \mathbb{R}$*, on pose* $u = x - x_0$ *et*

$$g(u) = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \sum_{n\geq 1}\frac{\cos(n!x_0+n!u)-\cos(n!x_0)}{n!u}.$$

On va montrer que l'oscillation de g *sur l'intervalle* $[2\pi/k!, 4\pi/k!]$ *ne tend pas vers* 0 *quand* $k \to +\infty$*. Fixons donc* $k \geq 1$.

b) *Montrer que pour tout* $n < k$ *l'oscillation de* $\dfrac{\cos(n!x_0+n!u)-\cos(n!x_0)}{n!u}$ *est* $\leq 4\pi n!/k!$ *sur l'intervalle* $[2\pi/k!, 4\pi/k!]$.

c) *Montrer que pour* $n > k$ *l'oscillation de* $\dfrac{\cos(n!x_0+n!u)-\cos(n!x_0)}{n!u}$ *est* $\leq k!/(\pi n!)$ *sur l'intervalle* $[2\pi/k!, 4\pi/k!]$.

d) *Montrer que l'oscillation de* $\dfrac{\cos(k!x_0 + k!u) - \cos(k!x_0)}{k!u}$ *est* $\geq 1/(8\pi)$ *sur l'intervalle* $[2\pi/k!, 4\pi/k!]$.

e) *En utilisant*

$$\sum_{1\leq n<k} \frac{n!}{k!} < \frac{2}{k} \quad \textit{et} \quad \sum_{n>k} \frac{k!}{n!} < \frac{1}{k},$$

en déduire que l'oscillation de g *sur l'intervalle* $[2\pi/k!, 4\pi/k!]$ *ne tend pas vers* 0 *quand* $k \to +\infty$.

f) *En déduire que la fonction* f *n'est pas dérivable en* x_0.

10.5 (Une fonction continue qui n'est pas somme de sa série de Fourier).

(1) *Pour* $n \geq 1$, *on pose*

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin kx}{k}.$$

En utilisant la transformation d'Abel, montrer que pour $x \notin \pi\mathbb{Z}$,

$$S_n(2x) = \frac{1}{\sin x} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\sin kx \cdot \sin(k+1)x}{k(k+1)} + \frac{\sin nx \cdot \sin(n+1)x}{n \sin x}.$$

(2) *En majorant* $\sin kx \cdot \sin(k+1)x$ *par* $k(k+1)x^2$ *si* $k \leq \lfloor 1/x \rfloor$ *et par* 1 *si* $k > \lfloor 1/x \rfloor$, *en déduire que les sommes* S_n *sont uniformément bornées.*

(3) *Soit* $\sum \lambda_k$ *une série absolument convergente,* $\{n_k\}$ *une suite d'entiers* ≥ 1 *telle que* $\lambda_k \cdot \log n_k \to +\infty$ *et* $\{m_k\}$ *une suite d'entiers telle que* $m_{k+1} - m_k > 2n_k + 1$. *Montrer que*

$$\sum \lambda_k e^{im_k x} S_{n_k}(x)$$

converge vers une fonction continue f *qui n'est pas somme de sa série de Fourier.*

10.6 (Exemple de série trigonométrique qui n'est pas une série de Fourier).

a) Montrer que la série de fonctions $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{\log n} \sin nx$ *converge en tout point* $x \in \mathbb{R}$ *vers une fonction* $F(x)$ *(indication: transformation d'Abel).*

b) Montrer que cette série ne peut pas être la série de Fourier d'une fonction $f \in L^2(-\pi, \pi)$.

*c) *Montrer que cette série ne peut pas être non plus la série de Fourier d'une fonction* $f \in L^1(-\pi, \pi)$.

Méthode: soit $g(x) := \int_0^x f(t)dt$. *Montrer que* g *est de variation bornée. Montrer en intégrant par parties que* $a_n(g) = -\frac{1}{n} b_n(f)$. *En déduire une contradiction en utilisant le Théorème de Jordan :*

Soit g *une fonction de variation bornée sur* $[-\pi, \pi]$, *alors la suite* $(S_n(g))$ *converge en tout point* x *vers* $\frac{1}{2}(g(x+) + g(x-))$. *Si* I *est un intervalle ouvert sur lequel* g *est continue, et si* $K \subset I$ *est un compact, la convergence est uniforme sur* K.

(Une version de cet exemple se trouve dans Zuily & Queffélec, *Elements d'analyse pour l'agrégation,* ex. 17, p. 117)