UNIVERSITÉ PAUL SABATIER
L3 PARCOURS SPÉCIAL, ANALYSE COMPLEXE 2, 2019-20
DEVOIR MAISON
A RENDRE LE LUNDI 25 NOVEMBRE 2019

1. Soit f une fonction holomorphe admettant au point a une singularité essentielle.

Montrer que toute valeur complexe est valeur d'adhérence de f en a, au sens suivant : pour tout $w \in \mathbb{C}$, il existe une suite $z_n \to a$ telle que $\lim_{n\to\infty} f(z_n) = w$.

Indications :

Montrer que la propriété voulue est équivalente à : pour tout $w \in \mathbb{C}$, pour tous $\varepsilon > 0$, $r > 0$, il existe z tel que $|z - a| < r$ et $|f(z) - w| < \varepsilon$.

Raisonner par contraposée : si il existe w, ε et $r > 0$ tel que pour tous z tels que $|z - a| < r$ alors $|f(z) - w| \geq \varepsilon$, considérer la fonction $\frac{1}{f(z)-w}$. Peut-on la prolonger en a ? En déduire que f admet un pôle ou une singularité éliminable en a.

(Ce résultat est connu sous le nom de Théorème de Casorati-Weierstrass).

2. On suppose que la fonction f est analytique avec une singularité isolée en a, et non identiquement nulle. On suppose qu'il existe $s \in \mathbb{R}$ tel que l'une des deux propriétés suivantes soit vérifiée :

$$\lim_{z\to a} |z - a|^s |f(z)| = 0, \tag{1}$$

ou

$$\lim_{z\to a} |z - a|^s |f(z)| = +\infty. \tag{2}$$

a) Montrer qu'aussi bien l'hypothèse (1) que l'hypothèse (2) implique qu'il existe un unique $m \in \mathbb{Z}$ tel que :

$$\forall s' > m, \lim_{z\to a} |z - a|^{s'} |f(z)| = 0 \text{ et } \forall s' < m, \lim_{z\to a} |z - a|^{s'} |f(z)| = +\infty.$$

b) Montrer que $m = 0$ si et seulement si a est une singularité éliminable et $f(a) \neq 0$.

c) Montrer que $m < 0$ si et seulement si a est une singularité éliminable et $f(a) = 0$, avec un zéro d'ordre $-m$.

d) Montrer que $m > 0$ si et seulement si a est un pôle d'ordre m.

e) Montrer que a est une singularité essentielle si et seulement si il n'existe aucun $s \in \mathbb{R}$ tel que ni (1) ni (2) ne soit vérifiée.