UNIVERSITÉ PAUL SABATIER
L3 PARCOURS SPÉCIAL, ANALYSE COMPLEXE 2, 2018-19
CONTRÔLE TERMINAL, 2E SESSION
MARDI 25 JUIN 2019, 13H30

Durée du contrôle : 2 heures.

Ce contrôle comporte 4 exercices indépendants et 2 pages.

1. Vérifiez que les fonctions ci-dessous admettent une singularité isolée au point 0. Déterminez si ce sont des pôles (de quel ordre ?), des singularités éliminables ou des singularités essentielles. Démontrez vos réponses.

(1) $f(z) = \frac{1}{\sin z}$.
(2) $f(z) = \frac{\sin z}{z}$.
(3) $f(z) = z \sin\left(\frac{1}{z}\right)$.

2. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$. On suppose que $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ est holomorphe.

a) Montrer que $\operatorname{Re} f$ est harmonique sur Ω, c'est-à-dire que

$$\Delta \operatorname{Re} f(x,y) := \frac{\partial^2 \operatorname{Re} f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \operatorname{Re} f}{\partial y^2} = 0,$$

pour tout $z = x + iy \in \Omega$. On assimile $x + iy$ et (x, y).

Vous avez le droit d'utiliser les équations de Cauchy-Riemann.

b) En déduire que $z \mapsto \log |f(z)|$ est harmonique sur $\Omega \setminus f^{-1}\{0\}$.

3. Soit f analytique sur un ouvert Ω tel que $\overline{D(0,1)} \subset \Omega$, f non constante. On suppose que $|f(z)| = 1$ quand $|z| = 1$.

a) Montrer qu'il existe $a \in D(0,1)$ tel que $|f(a)| < 1$.

b) Montrer que pour tout $w \in D(0,1)$, le nombre de solutions de l'équation $f(z) = w$ (comptées avec multiplicités) est le même que le nombre de solutions de l'équation $f(z) = 0$.

c) Déduire des questions précédentes que $f(D(0,1)) = D(0,1)$.

(../..)

(../..)

4. Soient
$$\Omega_1 := \mathbb{C} \setminus \{-1, +1\}, \quad f(z) := \frac{1}{z^2 - 1}.$$
Dans l'exercice qui suit, les ensembles de questions (a), (b), (c,d,e,f,g) et (h,i) sont indépendants les uns des autres.

a) Soit $\gamma(\theta) := 1 + e^{i\theta}$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Calculer $\int_\gamma f(z)dz$.

En déduire que f n'admet pas de primitive (au sens complexe) sur Ω_1.

b) Soit $\Omega_2 := \mathbb{C} \setminus [-1; +1] \subset \Omega_1$. Montrer que $g(z) = \frac{1}{z}$ n'admet pas de primitive sur Ω_2.

c) Nous allons montrer que f admet une primitive sur Ω_2.

Pour tout $R > 1$, soit $\gamma_R(\theta) := Re^{i\theta}$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Montrer (en utilisant par exemple le Théorème de Cauchy appliqué au cycle $\gamma_{R_2} - \gamma_{R_1}$) que pour $1 < R_1 < R_2 < +\infty$, $\int_{\gamma_{R_1}} f(z)dz = \int_{\gamma_{R_2}} f(z)dz$.

d) En déduire que pour tout $R > 1$, $\int_{\gamma_R} f(z)dz = 0$.

e) On pose $\Omega' := \mathbb{C} \setminus [-\infty, 1]$, et on définit, pour $z \in \Omega'$, la fonction
$$F(z) := \int_{\sigma_z} \frac{1}{\zeta^2 - 1} d\zeta,$$
où σ_z est le segment de droite joignant 2 à z. Montrer que F est une primitive de f sur Ω'.

f) Pour $a \in \Omega'$ avec $\operatorname{Re} a < -1$, $\operatorname{Im} a > 0$, on considère le chemin fermé Γ_a constitué des trois segments suivants, enchaînés dans cet ordre :

(1) σ_a ;
(2) le segment $[a; \bar{a}]$, parcouru dans le sens des y décroissants ;
(3) le segment $\sigma_{\bar{a}}$ parcouru dans le sens inverse.

Pour tout $R > \max(2, |a|)$, montrer que $\int_{\Gamma_a} f(z)dz = \int_{\gamma_R} f(z)dz$, et donc s'annule.

g) Montrer que si on note $a = \alpha + i\beta$, avec $\alpha < -1$, $\beta > 0$, $\lim_{\beta \to 0} F(a) = \lim_{\beta \to 0} F(\bar{a}) \in \mathbb{C}$. (Pour montrer que la limite existe, il suffit de voir que pour chaque suite $(\beta_n)_n \subset \mathbb{R}_+^*$ telle que $\lim_n \beta_n = 0$, la suite $(F(\alpha + i\beta_n))_n$ est une suite de Cauchy).

En déduire que F se prolonge par continuité à Ω_2, en une fonction qui sera une primitive de f.

h) Les deux questions qui suivent donnent une autre démonstration du fait que f admet une primitive.

On rappelle que $\hat{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ est la Sphère de Riemann. Montrer que f se prolonge en une fonction holomorphe sur $\Omega_3 := \hat{\mathbb{C}} \setminus [-1; +1] = \Omega_2 \cup \{\infty\}$.

i) Soit U l'image de Ω_3 par l'application $g(z) = \frac{1}{z}$. Déterminer U et montrer qu'il est simplement connexe (indication : U est étoilé par rapport à des points, lesquels ?). En déduire que Ω_3 est simplement connexe, et à nouveau que f admet une primitive sur Ω_2.