# UNIVERSITÉ PAUL SABATIER
# L3 PARCOURS SPÉCIAL, ANALYSE COMPLEXE 2, 2020-21
# CONTRÔLE CONTINU
# LUNDI 30 NOVEMBRE 2019, 13 H 45

Durée du contrôle : 1 heure 30. Ce contrôle se compose de 2 exercices indépendants, sur deux pages. Barème approximatif : 9 – 11

La question marquée d'une astérisque * est facultative, ne la faites que si vous avez fait l'essentiel du reste.

1. Soit $\Omega := \{x + iy : a < y < b\}$ et $f$ analytique sur $\Omega$ telle que pour tout $z \in \Omega$, $f(z + 2\pi) = f(z)$ (périodique de période $2\pi$).

a) Montrer que toute fonction de la forme $z \mapsto e^{ikz}$, avec $k \in \mathbb{Z}$, possède la propriété ci-dessus avec $a = -\infty$ and $b = +\infty$.

b) Montrer que s'il existe une fonction $g$ analytique sur l'anneau $A(0; e^{-b}, e^{-a})$ telle que $f(z) = g(e^{iz})$, alors $f$ est analytique sur $\Omega$, périodique de période $2\pi$.

c) Montrer la réciproque : pour toute fonction $f$ périodique de période $2\pi$ sur $\Omega$, il existe une fonction $g$ analytique sur l'anneau $A(0; e^{-b}, e^{-a})$ telle que pour tout $z \in \Omega$,

$$f(z) = g(e^{iz}). \tag{1}$$

Méthode suggérée : pour $w \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$, on définit $\mathrm{Log}(w)$ comme l'unique nombre complexe $\zeta$ tel que $e^{\zeta} = w$ et $0 < \mathrm{Im}\,\zeta < 2\pi$. Pour $0 < \mathrm{Re}\,z < 2\pi$, montrer que $g(w) := f(-i\mathrm{Log}(w))$ verifie (1).

De façon analogue, pour $w \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$, soit $L_1(w)$ l'unique nombre complexe $\zeta$ tel que $e^{\zeta} = w$ et $-\pi < \mathrm{Im}\,\zeta < \pi$. Pour $w \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$, montrer que $g_1(w) := f(-iL_1(w))$ verifie (1).

Finalement montrer que $g = g_1$ sur l'intersection de leurs domaines de définition, et conclure.

d) En déduire que $f$ admet un développement en "série de Fourier":

$$f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{inz},$$

avec convergence uniforme de la série sur tout ensemble de la forme $\{x + iy : a + \varepsilon \le y \le b - \varepsilon\}$, $\varepsilon > 0$.

*e) Soit $f$ $2\pi$-périodique sur $\mathbb{R}$. Montrer que si $f$ s'étend comme fonction analytique à la bande $\{z \in \mathbb{C} : |\,\mathrm{Im}\,z| < \rho\}$, alors pour tout $R < \rho$, les coefficients de Fourier de $f$ vérifient $\sup_{k \in \mathbb{Z}} e^{R|k|} |c_k(f)| < +\infty$.

2. Les questions b) et c) sont indépendantes de toutes les autres.

Soient $P$ et $Q$ deux polynômes à coefficients complexes tels que $p := \deg P$, $q := \deg Q$, et $q \geq p+2$. On suppose de plus que $Q(z) = (z-z_1)\cdots(z-z_q)$.

a) En considérant $\int_{C(0,R)} \frac{P(\zeta)}{Q(\zeta)} d\zeta$ avec $R > \max_{1\leq j\leq q} |z_j|$, montrer que

$$\sum_{j=1}^{q} \mathrm{Res}\left(\frac{P}{Q}, z_j\right) = 0.$$

On suppose **désormais** que $z_j \in [-1,+1]$ pour tout $j$. On pose $\Omega = \mathbb{C} \setminus [-1,+1]$.

b) Donner un exemple de fonction $g$ holomorphe sur $\Omega$ qui n'admet pas de primitive sur $\Omega$ (et le démontrer).

c) Voici un exemple de fonction qui admet une primitive sur $\Omega$ : on pose $f(z) := \frac{z+1}{z-1}$. Montrer que pour tout $z \in \Omega$, $f(z) \notin ]-\infty, 0]$. En déduire qu'il existe une fonction $L$ holomorphe sur $\Omega$ telle que $e^{L(z)} = f(z)$, pour tout $z \in \Omega$. Exprimer une primitive de $f_1(z) := \frac{1}{1-z^2}$ en fonction de $L$.

d) Montrer que pour tout chemin fermé $\gamma$ sur $[a,b]$ tel que $\gamma([a,b]) \subset \Omega$, et pour tous $j,k \in \{1,\ldots,q\}$, $\mathrm{Ind}(\gamma, z_j) = \mathrm{Ind}(\gamma, z_k)$.

e) Pour tout chemin fermé $\gamma$ sur $[a,b]$ tel que $\gamma([a,b]) \subset \Omega$, calculer $\int_\gamma \frac{P(\zeta)}{Q(\zeta)} d\zeta$ (où $P$ et $Q$ vérifient les hypothèses du début de l'exercice et de la question a) ).

f) Montrer que la fraction $\frac{P}{Q}$ admet une primitive sur $\Omega$.