UNIVERSITÉ PAUL SABATIER
L3 PARCOURS SPÉCIAL, ANALYSE COMPLEXE 2, 2020-21
CONTRÔLE 2E SESSION
LUNDI 28 JUIN 2021, 10 H

Durée du contrôle : 2 heures.
Ce contrôle se compose de 4 exercices indépendants, sur deux pages.

1. a) On considère la fonction $f(z) := \frac{1}{\sin z}$.
Montrer que f est holomorphe sur $D(0,r) \setminus \{0\}$ pour un certain $r \in]0,+\infty]$. Quelle est la plus grande valeur possible de r ?
Déterminer la nature de la singularité de f et son résidu en 0.

b) Mêmes questions pour la fonction $g(z) := \sin\left(\frac{1}{z}\right)$.

2. a) (Question de cours)

Rappeler la définition de l'indice d'un chemin fermé γ par rapport à un point a qui est en-dehors de l'image de γ. Vous pouvez donner l'interprétation géométrique.
Soit Ω un ouvert connexe de $\mathbb{C}$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que toute fonction f holomorphe sur Ω admette une primitive, en termes de l'indice des chemins fermés dont l'image est contenue dans Ω.

b) Soit $\Omega_1 := \mathbb{C} \setminus \{-1,+1\}$, γ un chemin fermé dont l'image est contenue dans Ω_1, et f holomorphe sur Ω_1.
Exprimer $\int_\gamma f(z)dz$ en fonction des résidus de f aux points $+1$ et -1.

c) Soient $n, m \in \mathbb{N}^*$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. On pose

$$f(z) := \frac{\alpha}{(z-1)^m} + \frac{\beta}{(z-1)^n}. \tag{1}$$

Pour quelles valeurs de α, β, m, n la fonction f admet-elle une primitive holomorphe sur Ω_1 ?

d) Soit $\Omega_2 := \mathbb{C} \setminus [-1,+1]$, γ un chemin fermé dont l'image est contenue dans Ω_2. Montrer que $\mathrm{Ind}(\gamma,1) = \mathrm{Ind}(\gamma,-1)$.

e) Pour quelles valeurs de α, β, m, n la fonction f définie en (1) admet-elle une primitive holomorphe sur Ω_2 ?

3. On pose $\psi(z) := \frac{z-i}{z+i}$ pour $z \in \mathbb{C} \setminus \{-i\}$.

a) Montrer que ψ est une bijection de $\{\mathrm{Im}\, z > 0\}$ sur $D(0,1)$ (on peut par exemple calculer l'application inverse, mais il faut faire attention aux ensembles de points mis en jeu).

b) Désormais, soit f une fonction holomorphe sur $D(0,1)$ telle que pour tout $z \in D(0,1)$, $\operatorname{Im} f(z) \geq 0$. Montrer que s'il existe $a \in D(0,1)$ tel que $f(a) \in \mathbb{R}$, alors f est constante.

(Suggestion : dans quel ensemble est contenu $\psi \circ f(D(0,1))$?)

c) On suppose de plus que $f(0) = i$. Calculer $(\psi \circ f)'(0)$ en fonction de $f'(0)$.

d) Montrer que $|f'(0)| \leq 2$, et que si $|f'(0)| = 2$, alors il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $f(z) = \psi^{-1}(e^{i\theta} z)$.

Indication : Lemme de Schwarz.

4. Soit f holomorphe sur $D(0,2)$.

On suppose que $|f(z)| \geq 1$ quand $|z| = 1$ et qu'il existe $\alpha \in D(0,1)$ tel que $|f(\alpha)| < 1$.

a) Montrer que f et $f - f(\alpha)$ ont le même nombre de zéros sur $D(0,1)$.
(Suggestion : théorème de Rouché).

b) Montrer que pour tout $\beta \in D(0,1)$, il existe $z \in D(0,1)$ tel que $f(z) = \beta$.