UNIVERSITÉ PAUL SABATIER
L3 PARCOURS SPÉCIAL, ANALYSE COMPLEXE 1, 2020-21
CONTRÔLE TERMINAL
LUNDI 2 NOVEMBRE 2020

Durée du contrôle : **2 heures.**

Cette épreuve se compose de 3 exercices indépendants (sur deux pages). Justifiez vos réponses par une démonstration ou un résultat du cours. Barème **approximatif** : 11 – 3 – 6 (respectivement).

1. a) Calculer les nombres $z \in \mathbb{C}$ tels que $z^4 = -1$. Indication : $-1 = e^{i\pi + 2ki\pi}$, pour tout $k \in \mathbb{Z}$.

En déduire la factorisation du polynôme $z^4 + 1$.

b) Montrer que l'intégrale généralisée $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^4+1} dx$ est absolument convergente.

On signale à toutes fins utiles que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^4} dx$ n'est pas convergente (il y a un problème en 0).

c) Si P est un polynôme de degré d et que $P(a) = 0$, on sait que $P(x) = (x-a)P_1(x)$, où P_1 est un polynôme de degré $d-1$. Montrer que $P'(a) = P_1(a)$.

d) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $f(z) := \dfrac{e^{i\lambda z}}{z^4+1}$. Calculer les résidus de f en $e^{i\frac{\pi}{4}}$ et $e^{i\frac{3\pi}{4}}$.

e) On considère le chemin fermé γ qui dépend du paramètre R, avec $1 < R$, composé de la concaténation, dans cet ordre, des chemins suivants :

$$\begin{aligned} \gamma_1(t) &:= t, & -R \leq t \leq R \\ \gamma_2(t) &:= Re^{it}, & 0 \leq t \leq \pi. \end{aligned}$$

Calculer $\int_\gamma f(z)dz$ par la méthode des résidus.

f) Mettre le résultat sous la forme $ae^{b\lambda}\cos(c\lambda + d)$, où a, b, c, d sont des constantes réelles.

g) On se restreint temporairement au cas où $\lambda \geq 0$. Montrer que pour $\operatorname{Im} z \geq 0$, $|e^{i\lambda z}| \leq 1$.

Montrer que $\lim_{R\to+\infty} \int_{\gamma_2} f(z)dz = 0$.

h) On pose $f_0(x) := \frac{1}{x^4+1}$. On définit la transformée de Fourier d'une fonction g par $\hat{g}(\xi) := \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi i x\xi} g(x)dx$.

Déduire de ce qui précède la transformée de Fourier $\hat{f}_0(\xi)$, pour $\xi \leq 0$.

i) Calculer la dérivée de $\hat{f}_0$ à gauche au point 0.

j) Pourquoi $\hat{f}_0$ doit-elle être une fonction paire ? En déduire ses valeurs pour $\xi \geq 0$.

k) Pourquoi $\hat{f}_0$ doit-elle être de classe $\mathcal{C}^1$ sur tout $\mathbb{R}$? En déduire à nouveau, sans calculs, la valeur de $\hat{f}_0'(0)$.

2. Soit $a \in \mathbb{C}$ tel que $|a| < 1$.

a) Montrer que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $|e^{i\theta} - a| = |1 - ae^{-i\theta}|$.
En déduire que $|e^{i\theta} - a| = |1 - \bar{a}e^{i\theta}|$.

b) Montrer que la fonction $f(z) = \dfrac{z-a}{1-\bar{a}z}$ est holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \{\frac{1}{\bar{a}}\}$.

c) Rappeler le principe du module maximum.
Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$, $|z - a| < |1 - \bar{a}z|$.

3. On considère l'ouvert $\Omega := \{z = x + iy \in \mathbb{C} : x > -y^2\}$ (c'est l'ensemble des points situés à droite d'une parabole dont l'axe est la demi droite des réels négatifs).

Soit $\varphi(x) =: 1 + e^{-\frac{1}{x}}$ pour $x > 0$. On admet qu'en posant $\varphi(x) = 1$ pour $x \leq 0$, on obtient une fonction indéfiniment dérivable sur toute la droite réelle.

a) Expliquer (intuitivement, par un dessin, si vous le souhaitez) pourquoi Ω est connexe par arcs.

Soit f une fonction holomorphe sur Ω. On suppose que $f(x) = \varphi(x)$ pour tout $x > 0$. Montrer que $f(z) = 1 + e^{-\frac{1}{z}}$ pour tout $z \in \Omega$.

b) Pour quelles valeurs de $y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ a-t-on $f(iy) = 0$?

c) On veut montrer par l'absurde qu'il n'existe aucune fonction holomorphe au voisinage de 0 qui prolonge f. Supposons qu'il existe $r > 0$ et g holomorphe sur $D(0, r)$ telle que $g(x) = f(x)$ pour tout $x > 0$.

Montrer que $g(iy) = f(iy)$ pour tout $y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. En déduire que $g(z) = 0$ pour tout $z \in D(0, r)$. Obtenir une contradiction.

*d) (hors barème) Montrer que pour tout $z \in \Omega$, $|f(z)| \leq 1 + e$.
En revanche, montrer que f ne peut même pas se prolonger par continuité à l'ensemble $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\, z \geq 0\}$.

NOTE: cette version du texte corrige trois erreurs de texte qui ont été signalées pendant l'épreuve.