UNIVERSITÉ PAUL SABATIER
L3 PARCOURS SPÉCIAL, ANALYSE COMPLEXE 1, 2018-19
CONTRÔLE TERMINAL
VENDREDI 9 NOVEMBRE 2018

Durée du contrôle : **2 heures.**

Cette épreuve se compose de 3 exercices indépendants. Le 4e exercice est hors-barème, plus précisément : vous ne recevrez de points pour cet exercice que si vous avez sérieusement abordé au moins 2 des trois premiers exercices.

Justifiez vos réponses par une démonstration ou un résultat du cours.

1. a) Rappeler la définition de $\cos z$ et $\sin z$ à partir de l'exponentielle complexe.
En déduire l'identité $\cos(\frac{\pi}{2} - z) = \sin z$, pour tout $z \in \mathbb{C}$.
En admettant que pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, on a $\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin x$, donner une autre démonstration de l'identité pour tout $z \in \mathbb{C}$.

b) Soit f une fonction analytique sur $\mathbb{C}$.
Démontrer ou réfuter par un contre-exemple l'assertion suivante :
si pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f(n\pi) = f(-n\pi)$, alors f est paire.

Démontrer ou réfuter par un contre-exemple l'assertion suivante :
si pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f(\frac{\pi}{n}) = f(-\frac{\pi}{n})$, alors f est paire.

2. a) Rappeler l'énoncé du Principe du Module Maximum.

b) Soit Ω un ouvert connexe et borné, et f une fonction analytique sur Ω et continue sur $\overline{\Omega}$. Montrer que si f ne s'annule nulle part sur $\overline{\Omega}$, alors f vérifie un principe du module minimum : $\min_{\overline{\Omega}} |f|$ est nécessairement atteint sur $\partial\Omega$ (la frontière de Ω).
Indication : considérer la fonction $g = \frac{1}{f}$.

c) Soit $f(z) = z^7 - z^3 + 2z^2 - \frac{z}{2} + 1$, et $\Omega = D(0, 2)$ (le disque ouvert de rayon 2 centré en 0).
Montrer que pour tout $z \in \partial D(0, 2)$ (le cercle de rayon 2 centré en 0), alors $|f(z)| \geq 100$ (indication: $2^7 = 128$).
En déduire qu'il existe $a \in D(0, 2)$ tel que $f(a) = 0$.

3. Le but de cet exercice est de calculer par la méthode des résidus

$$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1 + t^2)\sqrt{t}}.$$

a) Expliquer rapidement pourquoi $\int_0^1 \frac{dt}{(1+t^2)\sqrt{t}}$ et $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)\sqrt{t}}$ sont des intégrales convergentes.

b) Pour $z \in \mathbb{C} \setminus i\mathbb{R}_-$ (le plan complexe privé du demi-axe imaginaire négatif), on pose $\operatorname{Log} z := \ln|z| + i \arg z$, où $\arg z \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[$ est une détermination continue de l'argument de z.

Montrer que $s(z) := \exp(\frac{1}{2}\operatorname{Log} z)$ vérifie $s(z)^2 = z$ et est continue sur $\mathbb{C} \setminus i\mathbb{R}_-$. En déduire que s est $\mathbb{C}$-dérivable sur $\mathbb{C} \setminus i\mathbb{R}_-$. On posera $z^{1/2} := s(z)$.
Indication : $b - a = \frac{b^2-a^2}{b+a}$.

c) On considère le chemin fermé γ qui dépend de deux paramètres ε, R, avec $0 < \varepsilon < 1 < R$, composé de la concaténation, dans cet ordre, des chemins suivants :
(1) $\gamma_1(t) := t$, $\varepsilon \leq t \leq R$;
(2) $\gamma_2(t) := Re^{it}$, $0 \leq t \leq \pi$;
(3) $\gamma_3(t) := t$, $-R \leq t \leq -\varepsilon$;
(4) $\gamma_4(t) := \varepsilon e^{i(\pi-t)}$, $0 \leq t \leq \pi$.
On pose $f(z) := \frac{1}{z^{1/2}(1+z^2)}$ pour $z \in \mathbb{C} \setminus (i\mathbb{R}_- \cup \{i\})$.
Calculer $\int_\gamma f(\zeta)d\zeta$ par la méthode des résidus.

d) Montrer que $\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\gamma_4} f(\zeta)d\zeta = 0$.

e) Montrer que $\lim_{R\to+\infty} \int_{\gamma_2} f(\zeta)d\zeta = 0$.

f) Calculer $\lim_{R\to+\infty,\varepsilon\to 0} \int_{\gamma_3} f(\zeta)d\zeta$.

g) Déduire de ce qui précède la valeur de $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)\sqrt{t}}$.

4. **(Hors barème)**
On propose une autre méthode pour calculer l'intégrale de l'exercice 3.

a) En faisant le changement de variable $u = \sqrt{t}$, montrer que
$$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)\sqrt{t}} = 2\int_0^{+\infty} \frac{du}{1+u^4}.$$

b) Déterminer les pôles de la fonction $f_1(z) := \frac{1}{1+z^4}$. Montrer qu'en un tel pôle a, le résidu de f est égal à $\frac{1}{4a^3}$.

c) Calculer l'intégrale ci-dessus en appliquant la méthode des résidus à $\int_\gamma f(\zeta)d\zeta$, où γ est la concaténation de
(1) $\gamma_1(t) := t$, $-R \leq t \leq R$;
(2) $\gamma_2(t) := Re^{it}$, $0 \leq t \leq \pi$,
et en faisant tendre R vers $+\infty$.