UNIVERSITÉ PAUL SABATIER
L3 PARCOURS SPÉCIAL, ANALYSE COMPLEXE 1, 2020-21
CONTRÔLE CONTINU
VENDREDI 2 OCTOBRE 2020

Durée du contrôle : 1 heure 30.
Ce contrôle se compose de 3 exercices indépendants **(barèmes approximatifs)**.

1. **(4 points)** On suppose que Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^2$, que nous assimilons à $\mathbb{C}$ en posant $z = x + iy$ (comme d'habitude), et que H est une fonction de classe $\mathcal{C}^2$, $H : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ qui est *harmonique*, c'est-à-dire que

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} = 0$$

en tout point de Ω.

On définit $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ par

$$f(x+iy) := \frac{\partial H}{\partial x}(x,y) - i\frac{\partial H}{\partial y}(x,y).$$

Montrer, en utilisant les équations de Cauchy-Riemann, que f est $\mathbb{C}$-dérivable en tout point de Ω.

2. **(6 points)** Soit f une fonction analytique ($\mathbb{C}$-dérivable et de classe $\mathcal{C}^1$) sur $\mathbb{C}$ tout entier. On suppose qu'en tout point $z \in \mathbb{C}$, $|f(z)| \geq \frac{1}{1+|z|}$.

a) On pose $g(z) := 1/f(z)$. Montrer que g est définie et analytique sur $\mathbb{C}$ tout entier.

b) On écrit $g(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k z^k$ le développement en série entière de g. Montrer en utilisant les estimations de Cauchy que $a_k = 0$ dès que $k \geq 2$.

c) Montrer que g ne s'annule jamais, et en déduire que g et f sont constantes.

3. **(10 points)** On pose $f(z) := \frac{z^2}{(1+z^2)^2}$.

a) Quels sont les pôles de f ? Calculer le résidu de f en son unique pôle situé dans le demi-plan supérieur $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$. Indication : il pourra être utile de calculer la dérivée de la fonction $z \mapsto z^2(z+i)^{-2}$.

b) On définit le chemin fermé Γ_R comme la concaténation des deux chemins

$$\gamma_{1,R}(t) := t, -R \leq t \leq R; \qquad \gamma_{2,R}(t) := Re^{it}, 0 \leq t \leq \pi.$$

Calculer $\int_{\Gamma_R} f(z)dz$.

c) Montrer que $\lim_{R\to+\infty} \int_{\gamma_{2,R}} f(z)dz = 0$.

d) Montrer que $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^2}dx$ converge. Déduire sa valeur de ce qui précède.

e) (hors-barème) Vérifier le résultat ci-dessus en remarquant que $\frac{x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{(1+x^2)^2}$, et en calculant deux intégrales par la même méthode que ci-dessus.