UNIVERSITÉ PAUL SABATIER
L3 PARCOURS SPÉCIAL, ANALYSE COMPLEXE 1, 2020-21
CONTRÔLE TERMINAL, 2E SESSION
VENDREDI 25 JUIN 2021, 14 H 45

Durée du contrôle : 2 heures.

Les 4 exercices sont indépendants.

Rappel : au vu des résultats du cours, il est équivalent de dire qu'une fonction est "$\mathbb{C}$-dérivable" ou "holomorphe" ou "analytique".

1. Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un disque $D(a,R) \subset \mathbb{C}$, qui est $\mathbb{C}$-dérivable en tout point de $D(a,R)$.

On suppose qu'en tout point, $\overline{f(z)} = f(z)$. Montrer que f est constante.

Indication : appliquer les équations de Cauchy-Riemann pour montrer que $f'(z) = 0$ (ou que les dérivées partielles sont nulles).

2. a) Montrer qu'il n'y a pas de fonction analytique sur $D(0,1)$ telle que $f(z)^2 = z$ pour tout $z \in D(0,1)$.

b) Montrer qu'il n'y a pas de fonction analytique sur $D(0,1)$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $f(\frac{1}{n}) = \frac{1}{\sqrt{n}}$.

Indication : que pourrait-on dire de la fonction $g(z) := f(z)^2 - z$?

3. Soit f une fonction $\mathbb{C}$-dérivable sur $\mathbb{C}$ tout entier telle que $\lim_{|z|\to\infty} f(z) = 1$. Montrer que $f(z) = 1$, pour tout $z \in \mathbb{C}$.

4. On pose $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{iy : y \leq 0\}$ (le plan complexe privé de la demi droite des imaginaires "négatifs ou nuls"). On définit un logarithme complexe sur Ω par $\operatorname{Log} z := \ln|z| + i \arg z$, avec $-\frac{\pi}{2} < \arg z < \frac{3\pi}{2}$, et on pose, toujours pour $z \in \Omega$, $z^{1/2} := \exp\left(\frac{1}{2}\operatorname{Log} z\right)$.

a) Montrer que l'intégrale généralisée $\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{x^2+1}dx$ est convergente.

b) Montrer (rapidement) que la fonction f donnée par

$$f(z) := \frac{z^{1/2}}{z^2+1}$$

est définie et $\mathbb{C}$-dérivable sur Ω à l'exception d'un pôle qu'on déterminera.

c) Calculer le résidu de f en ce pôle.

d) Pour $R > 1$, $\varepsilon \in]0,1[$, soit $\Gamma_{\varepsilon,R}$ la courbe fermée composée des quatre arcs suivants :

- $\gamma_1(t) = t$, $\varepsilon \leq t \leq R$ (le segment $[\varepsilon, R]$, orienté dans le sens de t croissant);

- $\gamma_2(t) = Re^{i\theta}$, $0 \leq \theta \leq \pi$ (le demi-cercle supérieur de rayon R centré en 0, orienté dans le sens de θ croissant).
- $\gamma_3(t) = t$, $-R \leq t \leq -\varepsilon$ (le segment $[-R, -\varepsilon]$, orienté dans le sens de t croissant);
- $\gamma_4(t) = -\varepsilon e^{-i\theta}$, $0 \leq \theta \leq \pi$ (le demi-cercle supérieur de rayon ε centré en 0, orienté dans le sens de θ décroissant).

Calculer $\int_{\Gamma_{\varepsilon,R}} f(z)dz$.

e) Calculer $\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_2} f(z)dz$ (justifiez votre résultat !).

f) Calculer $\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\gamma_4} f(z)dz$ (justifiez votre résultat !).

g) Donner le module et l'argument de $z^{1/2}$ quand $z = -u$, avec $u \in \mathbb{R}_+^*$ (autrement dit, $z < 0$). Calculer $\int_{\gamma_3} f(z)dz$ en fonction de $\int_\varepsilon^R f(t)dt$.

Indication : changement de variable $u = -t$.

h) Trouver la valeur de $\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{x^2+1}dx$. Ce doit être un réel positif !