

**UNIVERSITÉ PAUL SABATIER : L2 PARCOURS SPÉCIAL
DEVOIR MAISON 1 — À RENDRE LE 17 FÉVRIER 2014**

PASCAL J. THOMAS

Exercice 1.

Montrer que $f(x) = e^{-x^2}$ définit une fonction de la classe de Schwartz.

Indication : montrer par récurrence que $f^{(k)}(x) = P_k(x)e^{-x^2}$, où P_k est un polynôme de degré $\leq k$.

Exercice 2.

On note indifféremment $\mathcal{F}(f) = \hat{f}$ pour la transformée de Fourier d'une fonction.

On cherche à déterminer les fonctions propres pour la transformation de Fourier, c'est-à-dire les fonctions f telles que $\hat{f} = \lambda f$, pour un certain $\lambda \in \mathbb{C}$.

On admet la formule d'inversion de Fourier, que nous allons bientôt démontrer : si f et \hat{f} sont toutes les deux absolument intégrables (en particulier si $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$), alors

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2\pi i x \xi} \hat{f}(\xi) d\xi.$$

(1) On suppose que f est paire et $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Calculer $\mathcal{F}(f + \mathcal{F}(f))$ et $\mathcal{F}(f - \mathcal{F}(f))$. Déterminer les fonctions de la forme $f(x) = \alpha_1 e^{-\pi \delta_1 x^2} + \alpha_2 e^{-\pi \delta_2 x^2}$ qui sont des fonctions propres, où $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ et $\delta_1, \delta_2 > 0$.

(2) Soit f une fonction telle que f et \hat{f} sont toutes les deux absolument intégrables. On pose $\check{f}(x) := f(-x)$. Rappeler ce qu'est $\mathcal{F}(\check{f})$ en fonction de $\mathcal{F}(f)$. Calculer $\mathcal{F}^2(f) = \mathcal{F}(\mathcal{F}(f))$, puis $\mathcal{F}^4(f)$. Si $\mathcal{F}(f) = \lambda f$, quelles peuvent être les valeurs de λ ?

(3) On suppose que f est impaire et $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Montrer que $f + i\hat{f}$ et $f - i\hat{f}$ sont des fonctions propres.

(4) On suppose que f est paire et $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ et que $\mathcal{F}(f) = \lambda f$. Montrer que $\lambda \in \{+1, -1\}$.

Que se passe-t-il si f est impaire et propre ?

(5) Soit $h \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Décomposer h en la somme d'une fonction impaire et d'une fonction paire. Montrer que cette décomposition est unique.

Décomposer h en une somme de quatre fonctions propres pour la transformée de Fourier. On utilisera $\mathcal{F}^i(h)$, $0 \leq i \leq 3$, avec la convention que \mathcal{F}^0 représente l'identité.