UNIVERSITÉ PAUL SABATIER
L2 PARCOURS SPÉCIAL, ALGÈBRE, 2018-19
TD 9 - LE PROCÉDÉ D'ORTHOGONALISATION DE GRAM-SCHMIDT

PASCAL J. THOMAS

16. Gram-Schmidt

Le but de ces quelques lignes est d'expliciter un procédé utile pour obtenir des bases orthogonales, qui est essentiellement contenu dans le cours de J. Tapia.

Théorème 16.1. *Soit Q une forme bilinéaire non-dégénérée sur un K-espace vectoriel E de dimension n. Soient $v_1, v_2, \ldots, v_m$ des vecteurs indépendants. On note $V_j := Vect\{v_1, \ldots, v_j\}$. On suppose que pour tout j, $1 \leq j \leq m$, $Q|_{V_j}$ est non-dégénérée.*

Alors il existe une base orthogonale $x_1, \ldots, x_m$ telle que pour tout j, $1 \leq j \leq m$, $Vect\{x_1, \ldots, x_j\} = V_j$.

Si de plus E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et Q est définie positive (ce qui est le cas le plus souvent utilisé), alors l'hypothèse que $Q|_{V_j}$ est non-dégénérée est automatiquement satisfaite, et on peut choisir la base $x_1, \ldots, x_m$ orthonormée.

Remarque : si on prend $m = n$, on obtient en particulier une base de E.

Démonstration.

Nous allons prouver, par récurrence sur j, qu'il existe une base orthogonale $\{x_1, \ldots, x_j\}$ de V_j telle que $Q(x_j, x_j) \neq 0$ pour tout j.

Si $j = 1$, on prend $x_1 := v_1$. Comme $\{v_1\}$ est indépendant, $v_1 \neq 0$, et c'est une base de $\mathrm{Vect}\{v_1\}$, orthogonale de façon triviale. Comme $Q|_{V_1}$ est non-dégénérée, $Q(v_1, v_1) \neq 0$.

Supposons la propriété prouvée pour un certain $j \leq m - 1$. On cherche x_{j+1} sous la forme $x_{j+1} = v_{j+1} - \sum_{i=1}^{j} \lambda_i x_i$, $\lambda_i \in \mathbb{K}$. Comme $\sum_{i=1}^{j} \lambda_i x_i \in V_j$, on a $\sum_{i=1}^{j} \lambda_i x_i = \sum_{i=1}^{j} \mu_i v_i$ pour certains scalaires μ_i, et on voit que $\{x_1, \ldots, x_j, x_{j+1}\}$ est un système indépendant, donc une base de V_{j+1}, quel que soit le choix des λ_i.

Pour en faire une base orthogonale considérons, pour tout $k \leq j$,

$$Q\left(x_{j+1}, x_k\right) = Q\left(v_{j+1}, x_k\right) - \sum_{i=1}^{j} \lambda_i Q\left(x_i, x_k\right) = Q\left(v_{j+1}, x_k\right) - \lambda_k Q\left(x_k, x_k\right).$$

Comme $Q|_{V_k}$ est non-dégénérée, $Q\left(x_k, x_k\right) \neq 0$, on peut donc choisir $\lambda_k := \frac{Q(v_{j+1}, x_k)}{Q(x_k, x_k)}$ et on obtient une base orthogonale.

Il reste à voir que $Q\left(x_{j+1}, x_{j+1}\right) \neq 0$. Mais si c'était le cas, alors comme $\{x_1, \ldots, x_j, x_{j+1}\}$ est une base de V_{j+1}, on aurait que $x_{j+1} \in \operatorname{Ker} Q|_{V_{j+1}}$, ce qui est exclu par l'hypothèse.

Dans le cas où Q est définie positive, sa restriction sur chaque sous-espace l'est aussi, et donc automatiquement non-dégénérée. De plus, on peut remplacer x_k par $x'_k := Q(x_k, x_k)^{-1/2} x_k$ qui vérifiera $Q(x'_k, x'_k) = 1$. □

Remarque: tout ce qui précède se généralise aisément au cas d'une forme hermitienne définie positive, en faisant les changements techniques qui s'imposent.

16.1. Nous nous plaçons dans un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'une forme quadratique définie positive q. On note $q(x) = \|x\|^2$, et $Q(x, y)$ la forme bilinéaire associée.

Montrer que le procédé de Gram-Schmidt consiste à choisir, pour chaque j, l'unique vecteur x_j qui soit orthogonal à V_{j-1} et tel que $x_j = v_j + \sum_{k=0}^{j-1} \lambda_k v_k$. Pourquoi ce vecteur est-il unique ? (indication : si x'_j était un autre vecteur avec les mêmes propriétés, $x_j - x'_j \in V_{j-1}$...)

On rappelle qu'une projection p est dite orthogonale si $\operatorname{Ker} p$ et $\operatorname{Im} p$ sont les orthogonaux l'un de l'autre. Pour tout sous espace V de $\mathbb{R}^d$, il existe une unique projection orthogonale p_V telle que $\operatorname{Im} p_V = V$.

Appelons $\pi_j(v)$ la projection orthogonale de v sur V_j.

Un moyen de trouver des x_j comme ci-dessus est d'écrire $x_j = v_j - \pi_j(v_j)$ (le démontrer). On pose alors $y_j := \frac{1}{\|x_j\|} x_j$.

Montrer qu'on peut construire récursivement les y_j en posant $x_j := v_j - \sum_{k=1}^{j-1} Q(v_j, y_k) y_k$.

16.2. On prend comme espace E l'espace des fonctions continues sur $[0, 1]$, à valeurs réelles, muni du produit scalaire $f \cdot g := \int_0^1 f(x)g(x)dx$.

On considère $S := \{1, x, x^2, \dots, x^n, \dots\}$. Calculer les trois premières fonctions du système orthonormal obtenu par le procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt à partir de S (c'est un exemple de ce qu'on appelle *polynômes orthogonaux*).

En déduire la projection orthogonale de x^3 sur l'espace engendré par $\{1, x, x^2\}$.

16.3. Nous nous plaçons dans $\mathbb{R}^d$ muni du produit scalaire euclidien standard, noté $x \cdot y$.

On définit le k-volume du parallélépipède engendré par les vecteurs $v_1, \dots, v_k$ comme étant la valeur de $\det(v_1, \dots, v_k)$ calculé dans une base orthonormale de $\langle v_1, \dots, v_k \rangle$, et on le note $\operatorname{Vol}(v_1, \dots, v_k)$.

On définit la matrice de Gram du système $(v_1, \dots, v_k)$: $G(v_1, \dots, v_k) := (v_i \cdot v_j)_{1 \le i,j \le k}$. En utilisant le procédé de Gram-Schmidt, montrer par récurrence sur k que

$$\operatorname{Vol}(v_1, \dots, v_k)^2 = \det G(v_1, \dots, v_k).$$

16.4. a) Soit A une matrice carrée réelle symétrique définie positive. Montrer qu'il existe une matrice triangulaire inversible T telle que $A = {}^tTT$. Indication : procédé d'orthogonalisation de Schmidt appliqué pour le produit scalaire défini par A.

b) Soit A une matrice carrée réelle symétrique définie positive. Montrer que le déterminant de A est inférieur ou égal au produit de ses coefficients diagonaux.