# UNIVERSITÉ PAUL SABATIER
# L2 PARCOURS SPÉCIAL, ALGÈBRE, 2018-19
# TD 7 - FORMES QUADRATIQUES, QUADRIQUES

## 12. Formes quadratiques

12.1. **(B)** Soit $E := \mathbb{R}^4$; ses éléments sont notés $(x_0, x_1, x_2, x_3)$, et sa base canonique $(e_0, e_1, e_2, e_3)$.

On considère la forme quadratique sur $E$ donnée par $Q(x) := -x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ (forme de Lorentz). Déterminer les orthogonaux de $\mathbb{R}e_0$, $\mathrm{Vect}(e_0, e_1)$, et $\mathrm{Vect}(e_0 + e_1, e_3)$.

12.2. **(B)** Quels sont les sous-espaces vectoriels totalement isotropes maximaux de la forme quadratique sur $\mathbb{R}^4$ donnée par $Q(x) := -x_0^2 - x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ ?

12.3. **(B)** On considère la forme bilinéaire symétrique $B_0$ sur $\mathbb{K}^3$ donnée par la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Quel est le rang de $B_0$? Déterminer $\mathrm{rad}(B)$. On considère le sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^3$ donné par $F := \{x : x_1 = x_2 - x_3\}$. Déterminer $F^\perp$.

12.4. **(B)**

(= exercice 5.2.7 (2) dans le polycopié de cours)

Soit $Q$ une forme bilinéaire symétrique non dégénérée sur $E$ et $H$ un hyperplan. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

(1) $H$ est singulier ;
(2) $H^\perp$ est une droite isotrope ;
(3) $H$ est l'orthogonal d'une droite isotrope.

12.5. (Adapté du contrôle continu du 5 avril 2017)

On considère $E = K^{2\times 2}$ l'ensemble des matrices $(2, 2)$ à coefficients dans $K$ ($E$ est isomorphe à $End(K^2)$), muni de la base canonique $(E_{ij}, 1 \leq i, j \leq 2)$ des matrices ayant pour entrées un 1 en position $(i, j)$ et des 0 partout ailleurs.

a) Montrer que $M \mapsto \det(M)$ est une forme quadratique et écrire la forme bilinéaire polaire $\Phi$ de det dans la base $(E_{ij})$.

Cette forme quadratique est-elle neutre ?

b) On considère $L := \{\lambda Id, \lambda \in K\}$ (l'ensemble des matrices scalaires). Déterminer $L^\perp$ au sens de la forme $\Phi$.

c) On rappelle que $\mathrm{Tr}\, A$ est la trace de la matrice $A$ (somme des coefficients diagonaux).

Montrer en utilisant le théorème de Hamilton-Cayley que

$$2\Phi(A, B)Id = -(AB + BA) + (\mathrm{Tr}\, A)B + (\mathrm{Tr}\, B)A.$$

(Indication : polarisation).

## 13. Méthode des carrés de Gauss

13.1. **(B)** Décomposer $B_0(x,x)$ (où $B_0$ est la forme quadratique de l'exercice 12.3) en somme de carrés de formes linéaires par la méthode de Gauss, dans les cas $\mathbb{K}=\mathbb{C}$ et $\mathbb{K}=\mathbb{R}$.

13.2. **(B)** On considère, sur l'espace vectoriel $E := \mathbb{R}^4$, la forme quadratique donnée par

$$Q(x) := x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 - 2x_3x_4 + x_1x_4 + 3x_1x_2 - x_2x_4.$$

Décomposer $Q$ en somme de carrés de formes linéaires (avec des coefficient $+1$ ou $-1$) par la méthode de Gauss. Quel est son indice de Witt ? Décomposer $E$ en somme directe orthogonale de plan(s) hyperbolique(s) et d'un espace anisotrope.

13.3. On considère, sur l'espace vectoriel $E := \mathbb{R}^n$, la forme quadratique donnée par

$$Q(x) := \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \sum_{1\leq i<j\leq n} x_i x_j.$$

Montrer qu'elle est associée à une forme bilinéraire non dégénérée.

Montrer qu'on peut trouver des formes linéaires $\varphi_i$, $1 \leq i \leq n$, telles que

$$Q(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{i+1}{2i}\varphi_i(x)^2.$$

## 14. Quadriques

14.1. (Extrait du contrôle continu du 5 avril 2017)

**(B)** Soit $(E,Q)$ un $K$-vectoriel muni d'une forme bilinéaire symétrique non dégénérée $Q$ dont on note $q$ la forme bilinéaire associée. Montrer que si l'indice de Witt $\nu(Q) > 0$, alors l'équation $q(x) = a$ a une solution pour tout $a \in K$.

14.2. (Adapté du contrôle terminal du 10 mai 2017)

Soit $Q$ une forme bilinéaire sur un $K$-vectoriel $E$ et $q$ la forme quadratique associée, $q(x) := Q(x,x)$. On désigne par $X_Q$ la quadrique affine d'équation $q(x) = 1$.

Soit $x_0 \in E$ fixé, et $L$ une droite affine passant par $x_0$.

a) Montrer que si $x \in L \cap X_Q$ et $q(x - x_0) \neq 0$, alors le polynôme de degré 2 en $\lambda$ défini par $q(\lambda x + (1-\lambda)x_0) - 1$, $\lambda \in K$, admet 1 comme racine. Calculer l'autre racine.

b) Montrer que $L \cap X_Q = \{x, y\}$ en cherchant les points d'intersection sous la forme $p = \lambda x + (1-\lambda)x_0$. En déduire que le scalaire $Q(x - x_0, y - x_0)$ ne dépend que du point $x_0$ quand on fait varier le point $x$. (Dans le cas classique où $E = \mathbb{R}^2$ et la forme bilinéaire est le produit scalaire euclidien, c'est ce qu'on appelle la *puissance d'un point par rapport à un cercle*).

14.3. Dans l'espace $E = \mathbb{R}^3$, trouver les plans tangents à l'ellipsoïde d'équation $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 21$ qui sont parallèles au plan d'équation $x + 4y + 6z = 0$.

Indication : un plan affine donné par une équation $\varphi(v - p_0) = 0$, où $\varphi$ est un élément du dual de $E$ et $p_0 \in E$, est tangent à l'ellipsoïde $\{q(v) = a\}$ en $p_0$ si $q(p_0 + v) = q(p_0) + \lambda\varphi(v) + O(v^2)$, où $\lambda \in \mathbb{R}$, et $O(v^2)$ représente des termes de degré 2.