UNIVERSITÉ PAUL SABATIER
L2 PARCOURS SPÉCIAL, ALGÈBRE, 2018-19
TD 4 - FORME DE JORDAN, POLYNÔME CARACTÉRISTIQUE, APPLICATIONS

PASCAL J. THOMAS

7. Forme de Jordan

7.1. Cet exercice illustre le Théorème 6.2.1 et est presque immédiat (n'allez pas compliquer les choses). Les matrices 5×5 suivantes représentent des endomorphismes u de K^5, où K est un corps quelconque. Dans chaque cas, on vous demande de montrer que u est nilpotent, de donner son ordre de nilpotence, son noyau, et la décomposition de K^5 en somme directe de sous-espaces stables F_j sur lesquels la restriction de u est irréductible (et donc son ordre de nilpotence est égal à la dimension de F_j).

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

7.2. Même situation et mêmes questions qu'à l'exercice précédent, facile toujours, mais un peu moins immédiat.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

7.3. (extrait du Contrôle Continu de L2 PS du 8 mars 2017)

On considère l'endomorphisme u de $\mathbb{C}^5$ donné par la matrice suivante dans la base canonique $\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$:

$$M := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

a) Montrer rapidement que $F_1 := \text{Vect}\{e_1, e_2\}$ et $F_2 := \text{Vect}\{e_3, e_4, e_5\}$ sont des sous-espaces stables de u. On note u_1 l'endomorphisme de F_1 induit par restriction de u, et u_2 l'endomorphisme de F_2 induit par restriction de u.

Calculer les matrices de u_1 et u_2, u_2^2 et u_2^3.

b) En déduire les matrices de u^2 et u^3.

c) Montrer que le polynôme minimal de u est $X^3(X-1)$.

d) Calculer les sous-espaces propres de u pour les valeurs propres 1 et 0.

e) Calculer $\dim \operatorname{Ker} u$, $\dim \operatorname{Ker} u^2$, $\dim \operatorname{Ker} u^3$.

f) Trouver un vecteur $v_1 \in \operatorname{Ker} u^3 \setminus \operatorname{Ker} u^2$.
Montrer qu'on peut trouver une base $\mathcal{B}$ de $\operatorname{Ker} u^3$ qui contient $v_1, u(v_1), u^2(v_1)$ et un vecteur v_2.

Donner la matrice de u dans la base $\{v_3, v_2, u^2(v_1), u(v_1), v_1\}$, où $\{v_3\}$ est une base de $\operatorname{Ker}(u - id)$, avec id l'application identité.

8. Polynôme caractéristique

Dans tout ce qui suit, u est un endomorphisme d'un espace vectoriel E sur $\mathbb{K}$, de dimension finie. Les polynômes sont toujours supposés à coefficients dans $\mathbb{K}$. On note χ_u le polynôme caractéristique d'un endomorphisme u, χ_A le polynôme caractéristique d'une matrice A.

8.1. Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ (ensemble des matrices $n \times n$ à coefficients complexes). On écrit $\chi_A(X) = \prod_{j=1}^n (X - \lambda_j)$. Soit Q un polynôme quelconque ; montrer que

$$\chi_{Q(A)}(X) = \prod_{j=1}^n (X - Q(\lambda_j)).$$

Indication : traiter d'abord le cas où A est triangulaire supérieure.

8.2. Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$. On considère la matrice $M \in M_{2n}(\mathbb{C})$ donnée par l'expression en blocs:

$$M = \begin{pmatrix} A & A \\ 0 & A \end{pmatrix}.$$

Montrer que M est diagonalisable si et seulement si $A = 0$.

Indication : calculer le polynôme caractéristique de M pour montrer que toute valeur propre de M est une valeur propre de A.

8.3. Cet exercice se réfère à l'exercice 8.1.3 du cours (matrices compagnon). On suppose que u est un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie n. On suppose de plus que u est cyclique, c'est-à-dire qu'il admet un vecteur cyclique, qui est par définition un vecteur e_1 tel que $\{e_1, u(e_1), u^2(e_1), \dots, u^{n-1}(e_1)\}$ forme un système générateur de E, et donc une base.

Donner la matrice de u dans cette base, en fonction des coordonnées de $u^n(e_1)$ dans la base.

Comparer ces coordonnées aux coefficients du polynôme caractéristique de u. Quel rapport a cette matrice avec une matrice compagnon ?