

UNIVERSITÉ PAUL SABATIER
L2 PARCOURS SPÉCIAL, ALGÈBRE, 2018-19
TD 3 - ENDOMORPHISMES DIAGONALISABLES OU NON

PASCAL J. THOMAS

Dans tout ce qui suit, sauf mention contraire, E est un espace vectoriel sur un corps K et u est un endomorphisme de E .

5. EXEMPLES DE SOUS-ESPACES STABLES

5.1. On suppose que $\text{Im}(f - \lambda I) + \text{Im}(f - \mu I) \subsetneq E$. Montrer que $\lambda = \mu$.

Indication : considérer l'image de E par l'application $(f - \lambda I) - (f - \mu I)$.

5.2. On suppose que E est de dimension finie. Soit S un sous-espace vectoriel stable de E tel que $E = \text{Ker } u \oplus S$. Alors $S = \text{Im } u$.

5.3. On suppose que E est de dimension finie.

Montrer qu'il existe $r \in \mathbb{N}^*$ tel que $E = \text{Ker } u^r \oplus \text{Im } u^r$. Indication : vous pouvez utiliser les résultats des exercices 2.3 et 2.5, Feuille 1.

5.4. On se donne f un endomorphisme d'un espace vectoriel E sur \mathbb{K} , de dimension finie. A quelle condition une projection p vérifiera-t-elle $f \circ p = p \circ f$?

Indication : considérez les sous-espaces stables par f et par p .

6. DIAGONALISABILITÉ

6.1. On suppose que E est un \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension finie. Montrer que $u \in \text{End}(E)$ est diagonalisable si et seulement si pour tout sous-espace vectoriel V stable par u , il existe F sous-espace stable par u tel que $V \oplus F = E$.

6.2. On considère les endomorphismes u_1 de K^2 et u_2, u_3 de K^3 , donnés par les matrices (dans les bases canoniques):

$$M(u_1) := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M(u_2) := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M(u_3) := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Déterminer $K[u_1]$ et l'ensemble des endomorphismes qui commutent avec u_1 . Mêmes questions pour u_2 et u_3 .

6.3. Soit E un espace vectoriel sur \mathbb{K} , de dimension n , muni d'une base e_1, \dots, e_n . On rappelle qu'une *permutation* est une bijection de $\{1, \dots, n\}$ dans $\{1, \dots, n\}$. On rappelle qu'un *cycle* d'une permutation σ est un ensemble $\{x_1, \dots, x_k\} \subset \{1, \dots, n\}$ tel que $\sigma(x_j) = x_{j+1}$, $1 \leq j \leq k-1$, et $\sigma(x_k) = x_1$. Toute permutation s'écrit comme un produit de composition de ses restrictions à ses cycles (nécessairement disjoints), qui commutent entre elles.

Si σ est une permutation, on définit $u_\sigma \in \mathcal{L}(E)$ par $u_\sigma(e_j) := e_{\sigma(j)}$.

- a) Si A est un cycle de σ , montrer que $E_A := \text{Vect}\{e_j, j \in A\}$ est un sous-espace stable de u_σ . Si a est le cardinal de A , trouver le polynôme minimal de $u|_{E_A}$.
- b) Montrer que E est somme directe des E_A , où A parcourt tous les cycles possibles de σ .
- c) Montrer que si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, alors u_σ est diagonalisable.
- d) Application : trouver le polynôme minimal et les valeurs propres de

$$M_1 := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_2 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

6.4. (Extrait du contrôle terminal de 2e session, juin 2018).

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie, où \mathbb{K} désigne le corps \mathbb{R} ou \mathbb{C} , et u un endomorphisme de E .

On suppose dans tout l'exercice que $u^4 = id$ (l'endomorphisme identité). Toutes les questions sont indépendantes.

- a) On suppose que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Montrer que u est diagonalisable.
- b) Montrer que u^2 est une symétrie (involution).
- c) On suppose que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et que $E = \mathbb{R}^2$. Donner un exemple de u non-diagonalisable tel que $u^4 = id$.
- d) On suppose que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est triangulaire supérieure. Montrer que le polynôme minimal de u n'admet pas de racines complexes non-réelles. En déduire que u est diagonalisable.

6.5. On considère l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 donné par la matrice (dans la base canonique):

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- a) Quelles sont ses valeurs propres ? Quel est son polynôme minimal ?
- b) En déduire un calcul rapide de A^{-1} , A^3 , A^{-2} et A^{-3} .
- c) Déterminer $\text{Ker}(A-I)^2$ et trouver une base $\{v_1, v_2, v_3\}$ de \mathbb{R}^3 telle que $Av_1 = -v_1$, $Av_2 = v_2$, $Av_3 = v_3 + v_2$.
- d) Déterminer les vecteurs x tels que $\{x, Ax, A^2x\}$ engendrent \mathbb{R}^3 .