

UNIVERSITÉ PAUL SABATIER
L2 PARCOURS SPÉCIAL, ALGÈBRE, 2017-18
TD 2 - POLYNÔMES D'ENDOMORPHISMES

PASCAL J. THOMAS

Dans tout ce qui suit, E est un espace vectoriel sur un corps K .

3. POLYNÔMES, QUELQUES FAITS

3.1. Un idéal de $K[X]$ est un sous groupe additif $I \subset K[X]$ qui vérifie par surcroît que :

$$\forall P \in K[X], Q \in I, PQ \in I.$$

a) Montrer que si $P \in K[X]$, l'ensemble $PK[X] := \{PQ, Q \in K[X]\}$ est un idéal. Un tel idéal est dit *idéal principal*.

b) Montrer que si I est un idéal et $P_1, P_2 \in I$, alors le reste R de la division euclidienne de P_1 par P_2 est dans I .

c) Soit I un idéal, $I \neq \{0\}$. Soit $P_0 \in I$ tel que

$$\deg(P_0) = \min \{\deg(P) : P \in I, P \neq 0\}.$$

Montrer que $I = P_0K[X]$. Donc tout idéal de $K[X]$ est principal.

3.2. a) Soit I un idéal de $K[X]$. Montrer que $I = K[X]$ si et seulement si $1 \in I$.

b) Soient I, J deux idéaux de $K[X]$. Montrer que $I + J$ est un idéal de $K[X]$, où $I + J := \{P + Q : P \in I, Q \in J\}$.

c) Soient deux polynômes non nuls $P_1, P_2 \in K[X]$. Montrer que si Q est un diviseur de P_1 , alors $P_1K[X] \subset QK[X]$.

Soit D l'unique polynôme de coefficient de plus haut degré égal à 1 tel que

$$P_1K[X] + P_2K[X] = DK[X],$$

qui existe d'après la question précédente. Montrer que D est un diviseur commun de P_1 et P_2 de degré maximal. On appelle D le pgcd de P_1 et P_2 .

En déduire qu'il existe des polynômes Q_1, Q_2 tels que

$$\text{pgcd}(P_1, P_2) = Q_1P_1 + Q_2P_2.$$

Ceci s'appelle l'identité de Bézout, que vous connaissez sans doute pour les entiers relatifs.

4. POLYNÔMES ANNULATEURS, MINIMAUX, ETC

Dans tout ce qui suit, u est un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie sur le corps K .

4.1. **(B)** Soit u une projection dans un espace vectoriel de dimension finie (cf. feuille 1). Donner le polynôme minimal de u (discuter en fonction de la dimension de $\text{Ker } u$).

4.2. **(B)** a) On suppose qu'il existe un polynôme P tel que $P(0) \neq 0$ et $P(u) = 0$. Montrer que u est inversible, et qu'on peut écrire son inverse sous la forme $Q(u)$, où Q est un polynôme.

b) Montrer que si il existe un endomorphisme $v \neq 0$ tel que $uv = 0$, alors u n'est pas inversible.

c) On note M_u le polynôme minimal de u . Montrer que si u est inversible, alors $M_u(0) \neq 0$.

d) Dédurre de ce qui précède que si u est inversible, son inverse s'exprime comme un polynôme en u (les coefficients du polynôme dépendent de u).

4.3. **(B)** Soit E un espace vectoriel de base e_1, \dots, e_d . On considère l'endomorphisme $\gamma \in \text{End}(E)$ donné par $\gamma(e_j) = e_{j+1}$, $1 \leq j \leq d-1$, $\gamma(e_d) = e_1$.

a) Quel est le polynôme minimal de γ ?

b) On suppose que $K = \mathbb{C}$. Quelles sont les valeurs propres possibles de γ ?

c) Toujours pour $K = \mathbb{C}$, montrer que γ est diagonalisable.

4.4. Soit P un polynôme. Montrer que :

$P(u)$ est inversible si et seulement si $\text{pgcd}(P, M_u) = 1$.

Indication : vous aurez besoin de l'identité de Bézout.

4.5. Ici E est un \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension finie. On suppose qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que u^p soit diagonalisable. Montrer que u est diagonalisable si et seulement si $\text{Ker } u = \text{Ker } u^p$.

4.6. Soient P et Q deux polynômes. On écrit $D := \text{pgcd}(P, Q)$ and $M := \text{ppcm}(P, Q)$. Notre but est de montrer que

$$\text{Ker } P(u) + \text{Ker } Q(u) = \text{Ker } M(u).$$

a) Montrer que $\text{Ker } P(u) + \text{Ker } Q(u) \subset \text{Ker } M(u)$.

b) On note P_0, Q_0 les polynômes tels que $P = DP_0$, $Q = DQ_0$. Montrer que pour tout $x \in \text{Ker } M(u)$, $P_0(u)(x) \in \text{Ker } Q(u)$.

c) On suppose que $x \in \text{Ker } M(u)$. En utilisant le fait que $\text{pgcd}(P_0, Q_0) = 1$, montrer qu'il existe $y \in \text{Ker } P(u)$, $z \in \text{Ker } Q(u)$ tels que $x = y + z$.

4.7. On considère $\mathcal{I} := \{P \in \mathbb{K}[X] : P(u) \text{ nilpotent}\}$.

a) Montrer que \mathcal{I} est un idéal.

b) Montrer que \mathcal{I} est engendré par \tilde{M}_u , qui est le produit des facteurs irréductibles distincts de M_u (par ex., si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, $M_u(X) = \prod_j (X - \lambda_j)^{\beta_j}$ et $\tilde{M}_u(X) = \prod_j (X - \lambda_j)$).