

UNIVERSITÉ PAUL SABATIER
L2 PARCOURS SPÉCIAL, ALGÈBRE, 2017-18
CONTRÔLE CONTINU 2
MERCREDI 4 AVRIL 2018, 16H

Durée du contrôle : 1 heure.

Cette évaluation se compose de deux exercices indépendants (une page).

1. On considère l'endomorphisme u de \mathbb{C}^5 donné par la matrice suivante dans la base canonique $\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$:

$$M := \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

- a) Calculer le polynôme caractéristique de u . En déduire que u est nilpotent.
- b) Déterminer l'ordre de nilpotence m de u . (On conseille d'éviter les produits de matrices et de considérer plutôt les images successives des vecteurs de base).
- c) Calculer $\ker u^{m-1}$ et en donner une base.
- d) Déterminer une matrice en forme de Jordan de u . Donner une base de \mathbb{C}^5 dans laquelle la matrice de u est en forme de Jordan.

2. On considère la forme bilinéaire \mathcal{B} sur K^3 donnée par, pour $x = (x_1, x_2, x_3)$, $y = (y_1, y_2, y_3)$,

$$\mathcal{B}(x, y) := x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_1y_3 + x_2y_2 + 2x_2y_3 + x_3y_3.$$

- a) Donner la matrice de \mathcal{B} dans la base canonique $\{(1, 0, 0); (0, 1, 0); (0, 0, 1)\}$.
- b) Déterminer les vecteurs x tels que $\mathcal{B}(x, x) = 0$.
- c) Soit $A := \{x : x_3 = 0\}$. Déterminer ${}^\perp A$ et A^\perp .
- d) Soit $B := \langle (1, -1, 0) \rangle = K \cdot (1, -1, 0)$. Déterminer ${}^\perp B$ et B^\perp .