Exercices à maîtriser

Exercice 1. Donner des exemples de :
— groupes abéliens finis non-cycliques ;
— groupes monogènes non-cycliques ;
— groupes abéliens infinis non-monogènes ;
— groupes infinis non-abéliens.

Exercice 2. Montrer que $\mathbf{Z}^2$ n'est pas monogène. En déduire que $\mathbf{Z}^2$ et $\mathbf{Z}$ sont deux groupes non-isomorphes. Sont-ils isomorphes en tant qu'ensembles ?

Exercice 3. 1) Démontrer le théorème de Lagrange : soit G un groupe fini. Pour tout sous-groupe $H < G$, l'ordre de H divise l'ordre de G.

2) En déduire le théorème d'Euler : soit $n > 0$ un entier. Pour tout entier x premier avec n, on a
$$x^{\varphi(n)} \equiv 1 \mod n,$$
où $\varphi(n) = \mathrm{Card}\{i \in [\![1, n]\!] : \mathrm{pgcd}(i, n) = 1\}$ est la *fonction indicatrice d'Euler*.

3) En déduire le petit théorème de Fermat : pour tout entier p premier, et tout entier a, on a $a^p \equiv a \mod p$.

Exercice 4. 1) Soit G un groupe, $K \triangleleft G$ un sous-groupe distingué. Montrer que l'ensemble quotient G/K est muni d'une structure de groupes canoniquement induite par la structure de groupe de G. Montrer que l'application $x \in G \mapsto \bar{x} \in G/K$ est un morphisme de groupes.

2) Soit $\phi : G \to H$ un morphisme de groupes. Montrer que le noyau $K = \ker(\phi)$ est un sous-groupe distingué de G. Montrer que ϕ induit un morphisme injectif $G/K \to H$.

3) Soit G un groupe, $K \triangleleft G$ un sous-groupe distingué. Soit H un groupe, et $\phi : G \to H$ un morphisme. On suppose que $\phi(K) = \{1_H\}$. Montrer qu'il existe un unique morphisme de groupes $\bar{\phi} : G/K \to H$ tel que $\phi = \bar{\phi} \circ \pi$, où π est le morphisme canonique $G \to G/K$.

4) Soit G un groupe. On considère
$$D(G) = \langle aba^{-1}b^{-1},\ a, b \in G\rangle$$
(sous-groupe *dérivé* de G).
a) Montrer que $D(G)$ est un sous-groupe distingué de G, et que le groupe quotient $G^{\mathrm{ab}} := G/D(G)$ est abélien.
b) Soit A un groupe abélien, $\phi : G \to A$ un morphisme de groupes. Montrer qu'il existe un unique morphisme $\bar{\phi} : G^{\mathrm{ab}} \to H$ tel que $\phi = \bar{\phi} \circ \pi$, où π est le morphisme canonique $G \to G^{\mathrm{ab}}$.

Exercice 5. Donner un morphisme de $\mathbf{Z}/3\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/17\mathbf{Z}$ dans $\mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$.

Exercice 6. 1) Démontrer que tout sous-groupe de $\mathbf{Z}$ est monogène. Exhiber un sous-groupe de $\mathbf{R}$ qui n'est pas monogène.

2) Soit $a, b \in \mathbf{Z}$. Démontrer que
$$a\mathbf{Z} + b\mathbf{Z} = \mathrm{pgcd}(a, b)\mathbf{Z} \quad \text{et} \quad a\mathbf{Z} \cap b\mathbf{Z} = \mathrm{ppcm}(a, b)\mathbf{Z}.$$

3) a) Démontrer le théorème de Bezout : deux entiers a et b sont premiers entre eux si et seulement si il existe $u, v \in \mathbf{Z}$ tels que $au + bv = 1$.
b) Soit $d \in \mathbf{Z}$. Est-il vrai que $\operatorname{pgcd}(a, b) = d$ si et seulement si il existe $u, v \in \mathbf{Z}$ tels que $au + bv = d$?

4) Soit a et b deux entiers. On note $d = \operatorname{pgcd}(a, b)$ et $m = \operatorname{ppcm}(a, b)$.
a) Montrer qu'il existe $a', b' \in \mathbf{Z}$ tels que $a = da'$ et $b = db'$.
b) Montrer que $m = ab' = a'b$.
c) Montrer que $md = ab$.

Exercice 7. 1) Démontrer que $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ est un corps si et seulement si n est un nombre premier.

2) Montrer que 18 est inversible pour la multiplication dans $\mathbf{Z}/55\mathbf{Z}$, et déterminer son inverse.

3) a) Soit $x = \bar{a} \in \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$. On note $d = \operatorname{pgcd}(a, n)$. Montrer que $\langle x \rangle$ (le sous-groupe de $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ engendré par x) est égal à $\langle \bar{d} \rangle$.
b) Déterminer le sous-groupe engendré par 1038 dans $\mathbf{Z}/1\,000\,000\mathbf{Z}$.

4) Déterminer tous les générateurs du groupe additif $\mathbf{Z}/24\mathbf{Z}$.

5) Montrer que l'ensemble des éléments non nuls de $\mathbf{Z}/19\mathbf{Z}$ constitue un groupe pour la multiplication. Vérifier que ce groupe est cyclique, et trouver tous ses générateurs.

Exercice 8. Soit $a, b \in \mathbf{Z}$.

1) Déterminer le noyau du morphisme de groupes (ou d'anneaux)

$$n \in \mathbf{Z} \mapsto (n \bmod a, n \bmod b) \in \mathbf{Z}/a\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/b\mathbf{Z}.$$

En déduire qu'il existe un morphisme injectif $\mathbf{Z}/\operatorname{ppcm}(a, b)\mathbf{Z} \to \mathbf{Z}/a\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/b\mathbf{Z}$.

2) Si a et b sont premiers entre eux, déduire de la question précédente qu'il existe un isomorphisme $\mathbf{Z}/ab\mathbf{Z} \cong \mathbf{Z}/a\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/b\mathbf{Z}$. (*Indication* : utiliser un argument de cardinalité).

3) On suppose a et b premiers entre eux, et on considère $u, v \in \mathbf{Z}$ tels que $au + bv = 1$. Montrer que l'application

$$(\bar{x}, \bar{y}) \in \mathbf{Z}/a\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/b\mathbf{Z} \mapsto xbv + yau \in \mathbf{Z}/ab\mathbf{Z}$$

est bien définie, et que c'est un morphisme de groupes (d'anneaux en fait). Vérifier que ce morphisme est l'inverse du morphisme $\mathbf{Z}/ab\mathbf{Z} \cong \mathbf{Z}/a\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/b\mathbf{Z}$ des questions précédentes.

4) On ne suppose plus a et b premiers entre eux, et on considère leurs décompositions en produits de facteurs irréductibles : soit $p_1, \ldots, p_r$ des nombres premiers deux à deux distincts, et $a_1, \ldots, a_r, b_1, \ldots, b_r \in \mathbf{N}$ tels que $a = p_1^{a_1} \cdots p_r^{a_r}$ et $b = p_1^{b_1} \cdots p_r^{b_r}$ (certains des b_i ou a_i peuvent être nuls).
a) Montrer que

$$\mathbf{Z}/a\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/b\mathbf{Z} \cong \big(\mathbf{Z}/p_1^{a_1}\mathbf{Z} \times \cdots \times \mathbf{Z}/p_r^{a_r}\mathbf{Z}\big) \times \big(\mathbf{Z}/p_1^{b_1}\mathbf{Z} \times \cdots \times \mathbf{Z}/p_r^{b_r}\mathbf{Z}\big)$$

b) En déduire que $\mathbf{Z}/a\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/b\mathbf{Z} \cong \mathbf{Z}/\operatorname{pgcd}(a, b)\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/\operatorname{ppcm}(a, b)\mathbf{Z}$.

Exercice 9. Déterminer la signature de la permutation σ, ainsi que σ^{10000} dans les cas suivants :
(i) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 7 & 1 & 5 & 2 & 4 & 6 & 3 \end{pmatrix}$;
(ii) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 11 & 5 & 7 & 12 & 10 & 3 & 6 & 4 & 2 & 1 & 9 & 8 \end{pmatrix}$;
(iii) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 8 & 5 & 3 & 9 & 1 & 7 & 6 & 4 \end{pmatrix}$.

Exercice 10. Soient $n \in \mathbf{N}^*$, $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, $a_1, a_2, \ldots, a_k$ k éléments deux à deux distincts de $[\![1, n]\!]$. Montrer que

$$\sigma \circ [a_1, a_2, \ldots, a_k] \circ \sigma^{-1} = [\sigma(a_1), \sigma(a_2), \ldots, \sigma(a_k)].$$

Exercice 11. 1) Déterminer tous les sous-groupes des groupes symétriques $\mathfrak{S}_3$ et $\mathfrak{S}_4$. Lesquels sont des sous-groupes distingués ?

2) Déterminer un morphisme non constant du groupe $\mathfrak{S}_4$ dans le groupe $\mathfrak{S}_3$.

3) Vérifier que le groupe alterné $\mathfrak{A}_5$ possède deux sous-groupes isomorphes à $\mathfrak{A}_4$ et $\mathbf{Z}/5\mathbf{Z}$ respectivement, et tels que l'application de multipliciation

$$(\sigma', \sigma'') \in \mathfrak{A}_4 \times \mathbf{Z}/5\mathbf{Z} \mapsto \sigma' \circ \sigma'' \in \mathfrak{A}_5$$

réalise une bijection. Les groupes $\mathfrak{A}_4 \times \mathbf{Z}/5\mathbf{Z}$ et $\mathfrak{A}_5$ sont-ils isomorphes ?

4) Vérifier l'existence des suites de sous-groupes distingués suivantes :

a) $\{1\} = \mathfrak{A}_2 \triangleleft \mathfrak{S}_2 \cong \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$;

b) $\{1\} \triangleleft \mathfrak{A}_3 = \mathbf{Z}/3\mathbf{Z} \triangleleft \mathfrak{S}_3$;

c) $\{1\} \triangleleft \mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \triangleleft V_4 \triangleleft \mathfrak{A}_4 \triangleleft \mathfrak{S}_4$ (V_4 est le groupe de Klein $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$).

Exercice 12. On considère le plan euclidien orienté $\mathbf{E}^2$, muni d'un repère orthonormal direct. On note pour tout $\alpha \in \mathbf{R}/(2\pi\mathbf{Z})$, r_α la rotation vectorielle d'angle α, et pour tout $\gamma \in \mathbf{R}/(\pi\mathbf{Z})$, s_γ la réflexion orthogonale par rapport à la droite D_γ formant un angle γ avec l'axe des abscisses.

1) Montrer que $R : \alpha \in \mathbf{R}/(2\pi\mathbf{Z}) \mapsto r_\alpha \in \mathrm{GL}(\mathbf{E})$ est un morphisme de groupes. Montrer que l'image de R est le noyau du morphisme $\det : u \in \mathrm{O}(\mathbf{E}) \mapsto \det(u) \in \mathbf{R}$. En déduire que l'image de R est un sous-groupe distingué de $\mathrm{O}(\mathbf{E})$. Est-ce un sous-groupe distingué de $\mathrm{GL}(\mathbf{E})$?

2) a) Soit $\gamma, \gamma' \in \mathbf{R}/(\pi\mathbf{Z})$. Montrer que $s_{\gamma'} \circ s_\gamma = r_{2(\gamma'-\gamma)}$. Faire un dessin.

b) L'ensemble $\mathbf{R}/(\pi\mathbf{Z})$ des réflexions orthogonales est contenu dans $\mathrm{GL}(E)$. L'injection correspondante $\mathbf{R}/(\pi\mathbf{Z}) \to \mathrm{GL}(\mathbf{E})$ est-elle un morphisme de groupes ?

3) Calculer $r_\alpha \circ s_\gamma$ et $s_\gamma \circ r_\alpha$ pour tout $\alpha \in \mathbf{R}/(2\pi\mathbf{Z})$ et $\gamma \in \mathbf{R}/(\pi\mathbf{Z})$. (*Indication* : écrire $r_\alpha = s_{\alpha/2+\gamma} \circ s_\gamma$ et $r_\alpha = s_\gamma \circ s_{\gamma-\alpha/2}$).

4) Soit $\alpha \in \mathbf{R}/(2\pi\mathbf{Z})$, $\gamma, \gamma' \in \mathbf{R}/(\pi\mathbf{Z})$. Vérifier les relations (faire des dessins) :

a) $s_\gamma r_\alpha s_\gamma = r_{-\alpha}$;

b) $r_\alpha s_\gamma r_{-\alpha} = s_{\gamma+\alpha}$;

c) $s_\gamma s_{\gamma'} s_\gamma^{-1} = s_{2\gamma-\gamma'}$ (réflexion orthogonale par rapport à la droite $s_\gamma(D_{\gamma'})$.

5) On considère l'ensemble D_4 à huit éléments

$$D_4 = \{r_0, r_{\pi/2}, r_\pi, r_{3\pi/2}, s_0, s_{\pi/4}, s_{\pi/2}, s_{3\pi/2}\}.$$

a) Montrer que D_4 est le groupe des isométries du carré formé des points d'affixe une racine 4-ème de l'unité dans l'identification $E^2 \cong \mathbf{C}$ donnée par le choix de notre repère.

b) On note $r = r_{\pi/2}$ et $s = s_0$. Montrer que

$$D_4 = \{1, r, r^2, r^3, s, sr, sr^2, sr^3\}.$$

c) Montrer que D_4 est le groupe donné par générateurs et relations

$$\langle \mathsf{r}, \mathsf{s} : \mathsf{s}^2 = \mathsf{r}^4 = \mathsf{srsr} = 1 \rangle.$$

d) Déterminer les cinq classes de conjugaison de D_4.

e) Déterminer tous les sous-groupes de D_4. Lesquels sont distingués ?