Groupes et représentations
12/11/2019

Exercice 1

1) Quitte à renuméroter, on peut supposer $[1,2] \in G$.
Soit $a<b \in [\![1,n]\!]$. Puisque G agit 2-transitivement, il existe $g \in G$ tq
$$g(1)=a \quad \text{et} \quad g(2)=b.$$
Alors $\quad g[1,2]g^{-1} = [a,b] \in G.$
Ainsi G contient toutes les transpositions, donc $\mathfrak{S}_n$ tout entier puisque les transpositions engendrent le groupe symétrique.

2) On a $\displaystyle\sum_{x\in X} |\mathrm{Stab}(x)| = \sum_x \frac{|G|}{|\omega(x)|}$ où $\omega(x)$ désigne l'orbite de x sous l'action $G \circlearrowleft X$

$$= |G| \sum_{\omega \in X/G} \underbrace{\sum_{x\in\omega} \frac{1}{|\omega|}}_{=1}$$

$$= |G| \cdot |X/G|.$$

D'autre part $\displaystyle\sum_{x\in X} |\mathrm{Stab}(x)| = \sum_{\substack{(g,x)\in G\times X \\ \text{tq } g\cdot x = x}} 1 = \sum_{g\in G} |\mathrm{Fix}(g)|$

donc $\displaystyle\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}|\mathrm{Fix}(g)| = \frac{1}{|G|}\sum_{x\in X}|\mathrm{Stab}(x)| = |X/G|.$

3) a) Soit $x \in X$.
Puisque G agit transitivement, l'orbite de x est X tout entier, donc
$$G/\mathrm{Stab}(x) \simeq X$$ comme ensembles munis d'une action de G.

En particulier $\left|G/\mathrm{Stab}(x)\right| = |X|.$

On en déduit: $\displaystyle\frac{1}{|G|}\sum_{x\in X}|\mathrm{Stab}(x)| = \frac{1}{|G|}\sum_x \frac{|G|}{|X|} = \frac{|G|}{|G|}\cdot\frac{|X|}{|X|} = 1.$ $\square$

En effet c'est la formule de Burnside; il y a 1 orbite pour $G \circlearrowleft X$ puisque l'action est transitive.

b) Soit $x, y \in X$. $(x,y) \in \Delta \Leftrightarrow x = y$

Soit $g \in G$. $g \cdot (x,y) \in \Delta \Leftrightarrow (g\cdot x, g\cdot y) \in \Delta$

$$\Leftrightarrow g\cdot x = g \cdot y$$
$$\Leftrightarrow x = y$$
$$\Leftrightarrow (x,y) \in \Delta$$

donc l'action de G laisse stable la diagonale et son complémentaire.

Soit $g \in G$. On a $\mathrm{Fix}_{G \circlearrowleft X\times X}(g) = \{(x,y) \in X\times X : g\cdot(x,y) = x,y\}$

$$= \mathrm{Fix}_{G\circlearrowleft X}(g) \times \mathrm{Fix}_{G \circlearrowleft X}(g)$$

donc $|\mathrm{Fix}_{G\circlearrowleft X\times X}(g)| = f(g)^2$.

Puisque G laisse stable la diagonale et son complémentaire, il y a au moins 2 orbites pour $G \circlearrowleft X\times X$.

D'après la formule de Burnside, le nombre d'orbites est

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g\in G} |\mathrm{Fix}_{G\circlearrowleft X\times X}(g)| = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} f(g)^2,$$

et on vient de voir que ce nombre est ≥ 2.

c) Il y a égalité dans l'équation (hiéroglyphe fancon) ssi il y a exactement 2 orbites pour $G \circlearrowleft X\times X$, Δ et son complémentaire.

Si $X\times X\setminus\Delta$ est une orbite, alors pour tout $(x,y) \in X\times X$, $(x',y') \in X\times X$ $x \neq y$ et $x' \neq y'$

$$\exists g \in G \text{ tq } \quad g\cdot(x,y) = (g\cdot x, g\cdot y) = (x',y')$$

ainsi G agit 2-transitivement sur X

Réciproquement, si G agit 2-transitivement sur X, les calculs ci-dessus montrent que $X\times X\setminus \Delta$ est une orbite. D'autre part G agit transitivement, donc Δ est une orbite aussi. $\square$

d) Si $g \notin G^*$, alors $|\mathrm{Fix}(g)| \neq \emptyset$ donc $f(g) - 1 > 0$

D'autre part, pour tout $g \in G$ $\mathrm{Fix}(g) \subseteq X$ donc $|X| - f(g) \geq 0$.

Ainsi

$$\sum_{g \in G\setminus G^*} (f(g)-1)(|X|-f(g)) \geq 0,$$

ce qui donne la première inégalité.

On calcule

$$\sum_{g\in G} (f(g)-1)(|X|-f(g)) = \sum_{g\in G}\left[-f(g)^2 + f(g)(|X|+1) - |X|\right]$$

$$= -\sum_{g\in G} f(g)^2 + (|X|+1)\sum_{g\in G} f(g) - |X|\sum_{g\in G} 1$$

Or G agit transitivement, donc

$$\sum_{g\in G} f(g)^2 \geqslant 2|G| \qquad \text{par la question b)}$$

$$\sum_{g\in G} f(g) = |G| \qquad \text{par la formule de Burnside (pour } G \circlearrowright X\text{).}$$

Donc

$$\sum_{g\in G} (f(g)-1)(|X|-f(g)) \leqslant -2|G| + (|X|+1)|G| - |X|\cdot|G|$$

$$\qquad\qquad = -2|G| + |G| = -|G|.$$

On a donc $\displaystyle\sum_{g\in G^*} (f(g)-1)(|X|-f(g)) \leqslant -|G|.$

Pour $g\in G^*$: $f(g)=0$ donc cette inégalité se ré-écrit

$$\sum_{g\in G^*} (-|X|) \leqslant -|G|$$

$$\Leftrightarrow \quad |G^*| \geqslant \frac{|G|}{|X|}.$$

Puisque G agit transitivement sur X, on a $|G| \geqslant |X|$ donc $|G^*| \geqslant 1$. $\square$

Exercice 2

1) 18 et 25 sont premiers entre eux donc

$$M \cong \mathbb{Z}/_{15} \times \mathbb{Z}/_{18} \times \mathbb{Z}/_{25}$$
$$\cong \mathbb{Z}/_{15} \times \mathbb{Z}/_{18\times 25} = \mathbb{Z}/_{15} \times \mathbb{Z}/_{450}$$

$$(18\times 25 = 500-50=450)$$

Cette écriture est de la forme voulue puisque $15=3\cdot 5$ divise $450=2\cdot 3^2\cdot 5^2$.

2) $(1,0,1)\in M = \mathbb{Z}/_{18} \times \mathbb{Z}/_{15} \times \mathbb{Z}/_{25}$

est un élément d'ordre ppcm $(18,25)=450$ dans M, qui engendre $\mathbb{Z}/_{18}\times\mathbb{Z}/_{25}$

D'autre part $(0,1,0)$ est d'ordre 15, et engendre $\mathbb{Z}/_{15}$.

Ainsi pour tout $(x,y)\in \left(\mathbb{Z}/_{18}\times\mathbb{Z}/_{25}\right)\times\mathbb{Z}/_{15}$, il existe $m,n\in\mathbb{Z}$ tq

$$x = m\cdot(1,1) \text{ dans } \mathbb{Z}/_{18}\times\mathbb{Z}/_{25} \quad \text{et} \quad y = n\cdot 1 \text{ dans } \mathbb{Z}/_{15}$$

Donc pour tout $(x,y,z)\in M = \mathbb{Z}/_{18}\times\mathbb{Z}/_{15}\times\mathbb{Z}/_{25}$

il existe $m,n\in\mathbb{Z}$ tq

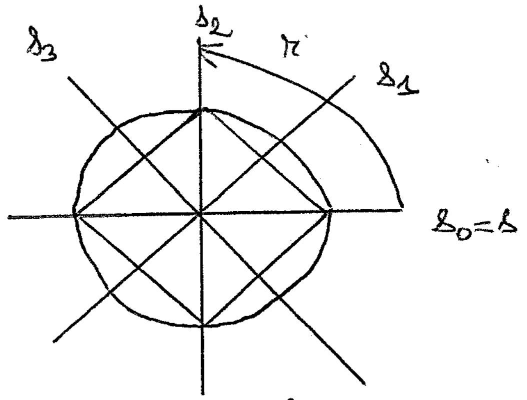
$$(x,y,z) = m\cdot(1,0,1) + n(0,1,0).$$

On en déduit que $a=(1,0,1)$ et $b=(0,1,0)$ engendrent M.

3) 15 et 450 ne sont pas premiers entre eux, donc $\mathbb{Z}/_{15}\times\mathbb{Z}/_{450}$ n'est pas cyclique, et il est impossible d'engendrer M avec un seul élément.

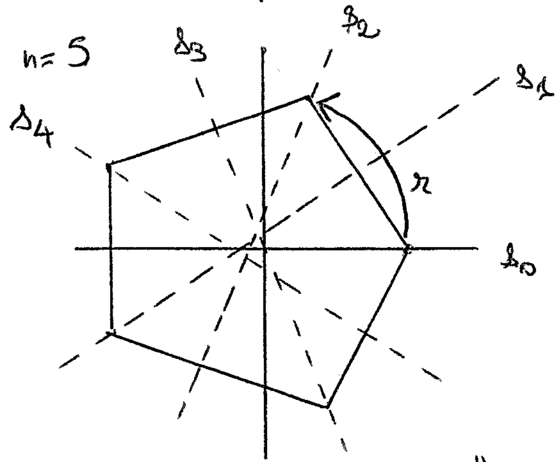
Exercice 3

1) a) $n=4$



$r^2 = -id$

$n=5$



$r^4 = r^{-1}$
$r^2 = r^{-3}$

b) La composée de deux réflexions orthogonales (dans le plan) par rapport aux droites L et M est une rotation d'angle $2\cdot(L,M) \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$.
On a ainsi pour tout $\ell \in \mathbb{Z}$ $\quad r = s_{\ell+1} s_\ell$.
Pour $k \in \mathbb{Z}$:
$$r^k s = (s_k s_{k-1}) \cdots (s_1 s_0) s_0 = s_k$$
puisque $s_\ell^2 = 1$ pour tout ℓ.

(on peut supposer $k \geq 0$ puisque $r^k = r^{k'}$ si $k \equiv k' \bmod n$)

c) Par conjugaison, si s est une réflexion orthogonale par rapport à une droite L,
$$rsr^{-1}$$
est la réflexion orthogonale par rapport à $r(L)$.
Ainsi $\quad r s_k r^{-1} = s_{k+2}$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$.

d) Par conjugaison, puisque les réflexions changent l'orientation, si R est une rotation de centre O d'angle θ, pour tout réflexion orthogonale σ
$$\sigma R \sigma^{-1} = \sigma R \sigma$$
est une rotation de centre O d'angle $-\theta$.

Ainsi $s_k r s_k = r^{-1}$.

(Sinon : $r s_k r s_k = (s_{k+1} s_k) s_k \cdot (s_{k+1} s_k) s_k$ comme en b)

$= s_{k+1} \cdot s_{k+1}$ car $s_k^2 = 1$

$= 1$

donc $s_k r s_k = r^{-1}$).

Pour la seconde identité on peut à nouveau raisonner par conjugaison.
Sinon :
$$s s_k s = s_0 s_k s = \mathrm{rot}\left(O, -\frac{2k\pi}{n}\right) \cdot s$$
$$= r^{-k} s = s_{-k} \quad \text{d'après b).}$$

e) D'après b), r et s engendrent D_n, donc s'il existe un morphisme f_a comme dans la question il est unique, donné par $r^k s^\varepsilon \longmapsto r^{ak} s^\varepsilon$.

Montrons que
$$f_a : D_n \longrightarrow D_n$$
$$r^k s^\varepsilon \longmapsto r^{ak} s^\varepsilon \quad \text{pour tout } k \in \mathbb{Z},\ \varepsilon \in \{0,1\}$$
est un morphisme de groupes.

Soit $g_1, g_2 \in D_n$. On veut montrer que $f_a(g_1 g_2) = f_a(g_1) f_a(g_2)$.

On distingue quatre cas possibles

i) $g_1 = r^k$, $g_2 = r^l$. Alors $f_a(r^k r^l) = r^{a(k+l)} = f_a(r^k) \cdot f_a(r^l)$

ii) $g_1 = r^k$, $g_2 = r^l s$ Alors $f_a(r^k r^l s) = r^{a(k+l)} s = f_a(r^k) f_a(r^l s)$

iii) $g_1 = r^k s$, $g_2 = r^l$ Alors $f_a(r^k s r^l) = f_a(r^{k-l} s) = r^{a(k-l)} s$

$$\Big(r^k s r^l = s_k r^l = s_k (s_k s_{k-1}) \cdots (s_{k-l+1} s_{k-l}) \quad (*)$$
$$= s_{k-l} = r^{k-l} s \Big)$$

$$f_a(r^k s) f_a(r^l) = r^{ak} s r^{al} = r^{ak-al} s$$

par le même calcul.

iv) $g_1 = r^k$, $g_2 = r^l s$ Alors $f_a(r^k r^l s) = r^{a(k+l)} s = f_a(r^k) f_a(r^l s)$.

$(*)$ si on préfère : $r^k s r^l = r^k s r^l s s$
$$= s_k s_l s = r^{k-l} s$$

2) a) Seul 1 est conjugué à 1, comme dans n'importe quel groupe.
r et $r^{-1} = r^4$ sont conjugués par s ou toute autre réflexion, et r est conjugué à lui-même par n'importe quelle rotation.

De même r^2 est conjugué à $r^{-2} = r^3$ par les réflexions, et à lui-même par les rotations.

$s = s_0$ est conjugué à toutes les réflexions s_{2k} (par les rotations), $k \in \mathbb{Z}$, qui sont toutes les réflexions de D_5 puisque 2 engendre $\mathbb{Z}/5$. Tout conjugué d'une réflexion est une réflexion.

Ainsi on trouve quatre classes de conjugaison
$$\{1\}, \ \{r, r^4\}, \ \{r^2, r^3\}, \text{ et } \{s_0, s_1, s_2, s_3, s_4\}.$$

b) Le déterminant donne un morphisme de groupes
$$D_5 \longrightarrow (\mathbb{C}^*, \times) \simeq GL_1(\mathbb{C}),$$
qui est une représentation de dimension 1. Pour raisons de dimension, celle-ci est nécessairement irréductible.

c) La trace d'une rotation d'angle θ (resp. d'une réflexion) est $2\cos\theta$ (resp. 0).
On trouve donc :

	$\{1\}$	$\{r, r^4\}$	$\{r^2, r^3\}$	réflexions
$\chi_{st.}$	2	$2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = 2\cos\left(-\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$	$2\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) = 2\cos\left(-\frac{4\pi}{5}\right) = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$	0

On a
$$\langle \chi_{st.}, \chi_{st.} \rangle = \frac{1}{10}\left[1 \cdot 2^2 + 2\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 + 5 \cdot 0\right]$$
$$= \frac{1}{10}\left[4 + \frac{2}{4}\left(1 - 2\sqrt{5} + 5 + 1 + 2\sqrt{5} + 5\right)\right]$$
$$= \frac{1}{10}\left[4 + \frac{1}{2}\, 12\right] = 1$$

donc la représentation standard est irréductible.

d) Par f_2, on a :

$$1 \longmapsto 1$$
$$\{r, r^4\} \longmapsto \{r^2, r^8 = r^3\}$$
$$\{r^2, r^3\} \longmapsto \{r^4, r^6 = r\}$$

$$\{\text{réflexions}\} \longmapsto \{\text{réflexions}\}$$

donc

	$\{1\}$	$\{r, r^4\}$	$\{r^2, r^3\}$	$\{\text{réflexions}\}$
$\chi_{\rho_{st} \circ f_2}$	2	$2\cos\frac{4\pi}{5} = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$	$2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$	0

On a $\langle \chi_{\rho_{st}\circ f_2}, \chi_{\rho_{st}\circ f_2} \rangle = 1$ par le même calcul qu'en c), donc $\rho_{st} \circ f_2$ est irréductible.

3) On calcule le caractère de $\rho_{st} \circ f_2$:

Par f_2 :

$$1 \longmapsto 1$$
$$-1 = r^2 \longmapsto 1$$
$$\{r, r^3\} \longmapsto \{-1\}$$
$$\{s, r^2 s\} \longmapsto \{s\}$$
$$\{rs, r^3 s\} \longmapsto \{r^2 s\}$$

donc

	$\{1\}$	$\{-1\}$	$\{r, -r\}$	$\{s, -s\}$	$\{rs, -rs\}$
$\chi := \chi_{\rho_{st}\circ f_2}$	2	$2 = \chi_{st}(1)$	$-2 = \chi_{st}(-1)$	$0 = \chi(s)$	$0 = \chi(-s)$

$$\langle \chi_a, \chi \rangle = \frac{1}{8}\left[1\cdot(2\cdot 1) + 1\cdot(2\cdot 1) + 2\cdot(-2\cdot -1) + 2\cdot(0\cdot 1) + 2\cdot(0\cdot -1)\right]$$
$$= \frac{1}{8}\left[2+2+4+0+0\right] = 1$$

et de même

$$\langle \chi_{a'}, \chi \rangle = 1$$

On en déduit que $\rho_{st}\circ f_2$ contient $\rho_a \oplus \rho_{a'}$, donc ces représentations sont égales car de même dimension. $\square$