Algèbre linéaire et bilinéaire

Corrigé de l'examen du 9 novembre 2018

Exercice 1

1) Soit $\mathbb{k}$ un corps, et $n \in \mathbb{N}$.

- Si $A \in GL_n(\mathbb{k})$, son inverse A^{-1} est l'unique matrice dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{k})$ telle que pour tout $X, Y \in \mathbb{k}^n$:
$$A \times X = Y \iff X = A^{-1} \times Y.$$
Pour calculer A^{-1}, il suffit donc de résoudre le système
$$A \times \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$
d'inconnues $x_1, \dots, x_n$, où les y_i sont des indéterminées (il est tentant d'appeler système linéaire <u>générique</u> de matrice A ce système).

- En pratique, il est commode de présenter ce système sous forme d'un tableau de nombres, en matérialisant le signe '=' par un trait vertical, et en mettant les coefficients de chaque x_i ou y_i sur une même colonne.

Ainsi, si $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$, le système générique ci-dessus se représente par
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & \cdots & a_{1n} & 1 & 0 \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & 0 & \cdots 0 & 1 \end{array}\right) \quad \text{pour} \quad \begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = y_1 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n = \qquad\qquad y_n. \end{cases}$$

Il s'agit alors ~~donc~~ d'effectuer des opérations élémentaires sur les lignes de ce tableau (celles autorisées pour le pivot de Gauss) pour obtenir la matrice identité à gauche du trait vertical. On aboutit ainsi à
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & & & b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ & & 1 & b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{array}\right) \quad \text{pour} \quad \begin{cases} x_1 = b_{11}y_1 + \cdots + b_{1n}y_n \\ \vdots \\ x_n = b_{n1}y_1 + \cdots + b_{nn}y_n. \end{cases}$$

<u>Conclusion:</u> la partie du tableau à droite du trait vertical est la matrice A^{-1}. $\square$

2) Pour calculer le déterminant, on utilise librement ses propriétés de linéarité et son caractère alterné.

$$\begin{vmatrix} 1/2 & 2 & 3 & 7/2 \\ -2 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & 3 \\ 3 & 4/3 & -2 & -1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\times\frac{1}{3} \begin{array}{c} \begin{vmatrix} 1 & 4 & 6 & 7 \\ -2 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & 3 \\ 9 & 4 & -6 & -3 \end{vmatrix} \end{array} \begin{array}{l} 2L_1 \\ \\ \\ 3L_4 \end{array}$$

$$= \frac{1}{6}\times(-1) \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} C_2 & C_1 & & \end{array} \\ \begin{vmatrix} -1 & 1 & -2 & 3 \\ 4 & 1 & 6 & 7 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \\ 4 & 9 & -6 & -3 \end{vmatrix} \end{array} \begin{array}{l} L_3 \\ L_1 \\ L_2 \\ L_4 \end{array}$$

(permutation sur les lignes : $(1\ 2\ 3)$ paire
sur les colonnes : $(1\ 2)$ impaire)

$$= -\frac{1}{6} \begin{vmatrix} -1 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 5 & -2 & 19 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 13 & -14 & 9 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \\ 4L_1+L_2 \\ L_3 \\ L_4+4L_1 \end{array}$$

$$= +\frac{1}{6} \begin{vmatrix} 5 & -2 & 19 \\ -2 & 3 & 1 \\ 13 & -14 & 9 \end{vmatrix} = \frac{1}{6} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & C_2+C_1 & \end{array} \\ \begin{vmatrix} 5 & 3 & 19 \\ -2 & 1 & 1 \\ 13 & -1 & 9 \end{vmatrix} \end{array} = -\frac{1}{6} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} C_2 & C_3 & C_1 \end{array} \\ \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 3 & 19 & 5 \\ -1 & 9 & 13 \end{vmatrix} \end{array} \begin{array}{l} L_2 \\ L_1 \\ L_3 \end{array}$$

$$= -\frac{1}{6} \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 16 & 11 \\ 0 & 10 & 11 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \\ L_2-3L_1 \\ L_3+L_1 \end{array} = -\frac{1}{6} \begin{vmatrix} 16 & 11 \\ 10 & 11 \end{vmatrix}$$

$$= -\frac{1}{6}\times 11\times 2 \begin{array}{c} \begin{array}{cc} C_1/2 & C_2/11 \end{array} \\ \begin{vmatrix} 8 & 1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} \end{array} = -\frac{11}{3}\times 3 \boxed{= -11.}$$

(Réalisé avec trucage et vérifié avec une machine).

Exercice ~~2~~ 1

1) E de dimension 2, q non dégénérée.
On suppose qu'il existe $x \neq 0$ vecteur de E tq $q(x) = 0$.

Puisque q est non dégénérée, $\exists y \in E$ tq $P(x,y) \neq 0$, où P désigne la forme polaire associée à q.
$y \notin k \cdot x$, car sinon $P(x,y) = P(x, \lambda x) = \lambda q(x) = 0$ pour un certain $\lambda \in k$.
Donc (x,y) est une famille libre de E, et une base en fait puisque $\dim(E) = 2$.
Dans cette base : $$\mathrm{Mat}(q) = \begin{pmatrix} 0 & P(x,y) \\ P(x,y) & q(y) \end{pmatrix}$$

Pour $\lambda \in k$: $q(x + \lambda y) = \lambda^2 q(y) + 2\lambda P(x,y)$ car $q(x) = 0$
$$q(y + \lambda x) = q(y) + 2\lambda P(x,y)$$
Posons $\lambda_0 = -q(y) \times \dfrac{1}{2P(x,y)}$, de sorte que $q(y + \lambda_0 x) = 0$
(possible car $P(x,y) \neq 0$ et $2 \neq 0$)

$(x, y + \lambda_0 x)$ est manifestement une autre base de E, dans laquelle
$$\mathrm{Mat}(q) = \begin{pmatrix} 0 & P(x,y) \\ P(x,y) & 0 \end{pmatrix}.$$
$\big(P(x, y + \lambda_0 x) = P(x,y) + \lambda_0 q(x) = P(x,y)\big)$

Posons $\tilde{y} = \dfrac{1}{P(x,y)} \cdot y$.
Alors $(x, \tilde{y})$ est une base de E dans laquelle $\mathrm{Mat}(q) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. □

2) a) On raisonne par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$.
Pour $n = 1$, le résultat se déduit de la question précédente puisque toute forme quadratique sur $\mathbb{C}^2$ possède un vecteur isotrope.
Dans le cas qui nous intéresse, q est non dégénérée donc équivalente à
$$(z, w) \longmapsto z^2 + w^2.$$
Cette dernière a un vecteur isotrope ($(1, i)$ par exemple), donc q aussi a un vecteur isotrope.

Soit $n \geq 2$.

En raisonnant comme au cas précédent, on voit que q possède un vecteur isotrope $x \in E$, $x \neq 0$.

En raisonnant comme en 1), on trouve $y \in E$ linéairement indépendant de x tq $\begin{pmatrix} q(x) & P(x,y) \\ P(x,y) & q(y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Soit $E' = \mathrm{Vect}(x,y)$. On a $\mathrm{rad}(E') = \{0\}$, donc $E' \overset{\perp}{\oplus} E'^{\perp} = E$.

D'autre part, $\mathrm{rad}((E')^{\perp}) = (E')^{\perp} \cap (E')^{\perp\perp} = \mathrm{rad}(E') = \{0\}$, donc $q|_{(E')^{\perp}}$ est non dégénérée, et on peut lui appliquer l'hypothèse de récurrence.

On obtient ainsi $\mathcal{B}^{\perp}$ base de $(E')^{\perp}$ dans laquelle

$$\mathrm{Mat}(q|_{(E')^{\perp}}) = \begin{pmatrix} U & & \\ & \ddots & \\ & & U \end{pmatrix}.$$

La base $(x, y, \mathcal{B}^{\perp})$ répond alors à la question. $\square$

b) Soit $(e_1, \dots, e_{2n})$ une base comme en a).

On réordonne les vecteurs pour fabriquer une nouvelle base :

$$(e_1, e_3, \dots, e_{2n-1}, e_2, e_4, \dots, e_{2n}).$$

Dans cette nouvelle base, la matrice de q est $\left(\begin{array}{c|c} 0 & I_{d_n} \\ \hline I_{d_n} & 0 \end{array}\right)$ comme demandé. $\square$

3) La forme quadratique

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ x_2 \\ y_2 \\ \vdots \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2n} \longmapsto (x_1, y_1, \dots, x_n, y_n) \begin{pmatrix} U & & \\ & \ddots & \\ & & U \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ \vdots \\ x_n \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$= 2 \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \left[(x_i + y_i)^2 - (x_i - y_i)^2 \right]$$

est de signature (n,n).

Puisque deux formes quadratiques sur $\mathbb{R}^{2n}$ sont équivalentes si et seulement si elles ont la même signature, une forme quadratique peut s'écrire

$$\begin{pmatrix} U & & \\ & \ddots & \\ & & U \end{pmatrix}$$

dans une base si et seulement si sa signature est (n,n). $\square$

Exercice 2

1) Si $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{C})$ a α comme unique valeur propre, alors $\chi_A = (X-\alpha)^4$, donc $A - \alpha Id$ est nilpotente.

La classe de similitude de $A - \alpha Id$ est donc déterminée par les dimensions des noyaux des $(A-\alpha Id)^k$, $k = 1, \dots, 4$. Cette suite est soumise aux seules contraintes qu'elle est croissante, et croît de moins en moins vite.

Un moyen commode d'exprimer la même chose est d'utiliser les invariants de similitude : il faut énumérer les 4-uplets d'entiers d_1, d_2, d_3, d_4 tq

$$0 \leq d_1 \leq d_2 \leq d_3 \leq d_4 \quad \text{et} \quad d_1 + d_2 + d_3 + d_4 = 4$$

La liste de ces 4-uplets est la suivante :

$(0,0,0,4)$; $(0,0,1,3)$; $(0,0,2,2)$; $(0,1,1,2)$; $(1,1,1,1)$.

La liste suivante donne un représentant pour la classe de similitude correspondant aux 4-uplets précédents :

$$A_1 = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & & \\ & \alpha & 1 & \\ & & \alpha & 1 \\ & & & \alpha \end{pmatrix} ; \quad A_2 = \begin{pmatrix} \alpha & & & \\ & \alpha & 1 & \\ & & \alpha & 1 \\ & & & \alpha \end{pmatrix} ; \quad A_3 = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & & \\ & \alpha & & \\ & & \alpha & 1 \\ & & & \alpha \end{pmatrix} ; \quad A_4 = \begin{pmatrix} \alpha & & & \\ & \alpha & & \\ & & \alpha & 1 \\ & & & \alpha \end{pmatrix} ;$$

$$A_5 = \begin{pmatrix} \alpha & & & \\ & \alpha & & \\ & & \alpha & \\ & & & \alpha \end{pmatrix}.$$

2) Pour A_1 : • $\chi = (X-\alpha)^4 = \mu$ ($A_1 - \alpha Id$ est la matrice compagnon du polynôme X^4)

• Pour $\beta \neq \alpha$, $A_i - \beta Id$ est inversible pour tout $i = 1, \dots, 5$, donc

$$\dim \ker (A_i - \beta Id)^k = 0 \quad \text{pour tout } k \in \mathbb{N}.$$

• $\dim \ker (A_1 - \alpha Id)^k = 0, 1, 2, 3, 4$ pour $k = 0, 1, 2, 3$ et $k \geq 4$ respectivement.

En effet : $(A_1 - \alpha Id)^0 = Id$.

$\ker (A_1 - \alpha Id) = Vect(e_1)$

$\ker (A_1 - \alpha Id)^2 = Vect(e_1, e_2)$

$\ker (A_1 - \alpha Id)^3 = Vect(e_1, e_2, e_3)$

$(A_1 - \alpha Id)^k = 0$ pour $k \geq 4$.

(on appelle $(e_1, \dots, e_4)$ la base canonique de $\mathbb{C}^4$)

Ceci donne une autre preuve du fait que $\mu_{A_1} = (X-\alpha)^4$.

• les invariants de similitude de A_1 sont $(1,1,1,(X-\alpha)^4)$.

Pour A_2 : $\dim \ker(A_2-\overset{\beta\neq\alpha}{\beta}\, Id)^k$ a déjà été calculé ;

$$\dim \ker(A_2-\alpha Id)^k = \begin{cases} 0 & \text{pour } k=0 \\ 2 & \text{——— } 1 \quad (\text{engendré par } e_1, e_2) \\ 3 & \text{——— } 2 \quad (\text{———— } e_1, e_2, e_3) \\ 4 & \text{——— } k \geq 3 \end{cases}$$

$\chi = (X-\alpha)^4$; $\mu = (X-\alpha)^3$

invariants de similitude : $(1, 1, X-\alpha, (X-\alpha)^3)$

Pour la suite, on ne répétera plus

- $\chi = (X-\alpha)^4$
- $\dim \ker(A-\beta Id)^k = 0$ pour $\beta \neq \alpha$.

Pour A_3 : $$\dim \ker(A_3-\alpha Id)^k = \begin{cases} 0 & \text{pour } k=0 \\ 2 & \text{pour } k=1 \quad (\text{engendré par } e_1, e_3) \\ 4 & \text{pour } k\geq 2 \end{cases}$$

$\mu = (X-\alpha)^2$

invariants : $(1, 1, (X-\alpha)^2, (X-\alpha)^2)$.

Pour A_4 : $$\dim \ker(A_4-\alpha Id)^k = \begin{cases} 0 & \text{pour } k=0 \\ 3 & \text{——— } 1 \\ 4 & \text{——— } k\geq 2 \end{cases}$$

$\mu = (X-\alpha)^2$

invariants : $(1, X-\alpha, X-\alpha, (X-\alpha)^2)$

Pour A_5 : $$\dim \ker(A_5-\alpha Id)^k = \begin{cases} 0 & \text{pour } k=0 \\ 4 & \text{pour } k\geq 1 \end{cases}$$

$\mu = X-\alpha$

invariants : $(X-\alpha, X-\alpha, X-\alpha, X-\alpha)$.

3) La condition (i) dit que A' et A'' doivent avoir un plan stable sur lequel elles agissent comme

$$\begin{pmatrix}\alpha & 1\\ 0 & \alpha\end{pmatrix}.$$

La condition (ii) dit qu'elles n'ont pas de valeur propre $\beta \neq \alpha$.

Les deux matrices diagonales par blocs

$$A' = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix}\alpha & 1\\ 0 & \alpha\end{matrix}} & \\ & \boxed{\begin{matrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{matrix}} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A'' = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix}\alpha & 1\\ 0 & \alpha\end{matrix}} & \\ & \boxed{\begin{matrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{matrix}} \end{pmatrix}$$

$$\theta \not\equiv 0 \mod \frac{\pi}{2}$$

répondent à la question.
En effet, elles ne sont pas semblables car

$$\chi_{A'} = (X-\alpha)^2(X^2+1)$$
$$\neq \chi_{A''} = (X-\alpha)^2\left(X^2 - 2\cos\theta X + 1\right) \quad \text{pour } \theta \not\equiv 0 \mod \frac{\pi}{2}.$$

<u>Remarques</u> Les blocs inférieurs sont des matrices de rotation.
Une rotation de $\mathbb{R}^2$ d'angle $\not\equiv 0 \mod \pi$ ne possède aucun sous-espace stable non-trivial (en particulier, elle n'a pas de valeur propre).

Invariants de similitude :

pour A' : $\left(1, 1, X-\alpha, (X-\alpha)(X^2+1)\right)$

pour A'' : $1, 1, X-\alpha, (X-\alpha)(X^2 - 2\cos\theta X + 1)$.

Exercice 3

1) $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{k})$, $B \in \mathcal{M}_{r,s}(\mathbb{k})$.

Le produit $A \times B$ est défini si et seulement si $q = r$.

Dans ce cas, notons $A = \begin{pmatrix} A_1 & \Big| & \cdots & \Big| & A_q \end{pmatrix}$ et $B = (b_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq q \\ 1 \leq j \leq s}}$

La matrice $A \times B$ possède s colonnes ; sa j-ème colonne, $1 \leqslant j \leqslant s$, est la combinaison linéaire

$$b_{1s} A_1 + \cdots + b_{qs} A_q \in \mathbb{k}^p.$$

$\square$

2) $M \in GL_n$

$M' \in \mathcal{M}_{n,a}$.

Notons $M'_1, \dots, M'_a \in \mathbb{k}^n$ les colonnes de M'.

Puisque $M \in GL_n$, ses colonnes constituent une base B_M de $\mathbb{k}^n$. Donc pour chaque $i \in [\![1, a]\!]$, M'_i est combinaison linéaire (C.L.) des colonnes de M, de manière unique.

Soit $H_i = \begin{pmatrix} h_{1i} \\ \vdots \\ h_{ni} \end{pmatrix} \in \mathbb{k}^n$ les coordonnées de $M'_i \in \mathbb{k}^n$ dans la base B_M.

On a $M'_i = MH_i$.

Ainsi

$$M' = \left(M'_1 \middle| \cdots \middle| M'_a \right) = M \left(H_1 \middle| \cdots \middle| H_a \right)$$

donc la matrice

$$H = \left(H_1 \middle| \cdots \middle| H_a \right) \in \mathcal{M}_{n,a}$$

est telle que $M' = MH$.

Réciproquement, si H est une matrice telle que $M' = MH$, alors H est nécessairement de taille $n \times a$, et sa i-ème colonne, $1 \leq i \leq a$, contient les coordonnées de M'_i dans la base B_M. Ceci prouve l'unicité.

De façon plus matricielle, et peut-être plus rapide, on peut constater que

$$H = M^{-1}M'.$$

3) $i) \Rightarrow ii)$ Supposons $i)$.

Puisque $M' = MH$, on a pour $i = 1, \dots, r$ $M'_i = M \cdot H_i$ où H_i est la i-ème colonne de H, ce qui implique que M'_i est C.L. de $M_1, \dots, M_r$ et donc $M'_i \in \mathrm{Vect}(M_1, \dots, M_r)$.

Ainsi on a $\mathrm{Vect}(M'_1, \dots, M'_r) \subseteq \mathrm{Vect}(M_1, \dots, M_r)$.
Ces deux espaces ont tous les deux $\dim = r$ puisque $\mathrm{rg}(M) = \mathrm{rg}(M') = r$, donc on peut en déduire qu'ils sont égaux.

$\square$

<u>ii) $\Rightarrow$ i)</u> Supposons ii)

Pour $i = 1, \dots, r$, $M'_i \in \mathrm{Vect}(M_1, \dots, M_r)$, donc M'_i est CL de $M_1, \dots, M_r$, ce qui se traduit par l'existence de $H_i \in \mathbb{k}^r$ tq

$$M'_i = MH_i.$$

Ainsi, posant

$$H = \left(H_1 \middle| \cdots \middle| H_r \right)$$

on a $M' = MH$.

Alors $\mathrm{rg}(M') = \mathrm{rg}(MH) \leq \mathrm{rg}(H)$, donc $\mathrm{rg}(H) \geq r$, ce qui implique que H est inversible.

$\square$

4) a) • $Id_{n+1} \in P$ donc $P \neq \emptyset$.

• Il suit des règles de produit par blocs que $M \times M' \in P$ si $M, M' \in P$ puisque GL_p et GL_{n+1-p} sont des groupes.

• Soit $M = \left(\begin{array}{c|c} A & B' \\ \hline 0 & B \end{array}\right) \in P$. On a $\det(M) = \det(A) \cdot \det(B) \neq 0$

donc M est inversible.

Écrivons son inverse par blocs : $M^{-1} = \left(\begin{array}{c|c} X & Y \\ \hline Z & W \end{array}\right)$

On a $M \times M^{-1} = \left(\begin{array}{c|c} AX + B'Z & AY + B'W \\ \hline BZ & BW \end{array}\right) = Id_{n+1}$,

donc $BZ = 0$ et par suite $Z = 0$ puisque B inversible.

Ainsi $M^{-1} = \left(\begin{array}{c|c} X & Y \\ \hline 0 & W \end{array}\right)$ où X et Y sont inversibles puisque

$\det(X) \cdot \det(W) = \det(M^{-1}) \neq 0$, donc $M^{-1} \in P$.

Les trois points ci-dessus prouvent que P est un sous-groupe de GL_{n+1}. $\square$

b) <u>i) $\Rightarrow$ ii)</u> Supposons i),

On a
$$M' = \left(M'_1 \middle| \cdots \middle| M'_p \middle| \cdots \middle| M'_{n+1} \right) = M \left(H_1 \middle| \cdots \middle| H_{n+1} \right)$$

en notant $H_1, \dots, H_{n+1}$ les colonnes de H.

On en déduit
$$\left(M'_1 \middle| \cdots \middle| M'_p \right) = M \left(H_1 \middle| \cdots \middle| H_p \right)$$
d'après les règles rappelées à la question 1).

Autrement dit

$$\left(M_1'\,\middle|\,\cdots\,\middle|\,M_p'\right) = M\left(\begin{array}{c} A \\ \hline O \end{array}\right)\updownarrow p$$

$$= \left(M_1\,\middle|\,\cdots\,\middle|\,M_p\,\middle|\,\cdots\,\middle|\,M_{n+1}\right) \times \left(\begin{array}{c} A \\ \hline O \end{array}\right)$$

$$= \left(M_1\,\middle|\,\cdots\,\middle|\,M_p\right) \times A$$

avec $A \in GL_p(k)$.

D'après 3), ceci équivaut à la Prop. ii). $\square$

<u>ii) $\Rightarrow$ i)</u> Réciproquement, supposons ii).

Comme on vient de le rappeler, il existe $A \in GL_p$ telle que

$$(*) \quad \left(M_1'\,\middle|\,\cdots\,\middle|\,M_p'\right) = \left(M_1\,\middle|\,\cdots\,\middle|\,M_p\right) \times A = M \times \left(\begin{array}{c} A \\ \hline O \end{array}\right)$$

D'autre part, puisque $rg(M) = n+1$, il existe d'après la question 2) une matrice $B \in \mathcal{M}_{n+1,\, n+1-p}$ telle que

$$(**) \quad \left(M_{p+1}'\,\middle|\,\cdots\,\middle|\,M_{n+1}'\right) = M \times B.$$

En concaténant les matrices $(*)$ et $(**)$, on obtient l'identité

$$M' = M \times \left(\begin{array}{c|c} A & \\ \cline{1-1} 0 & B \end{array}\right).$$

Notons $H = \left(\begin{array}{c|c} A & B' \\ \hline O & B'' \end{array}\right)$. Puisque M et M' sont inversibles, H l'est aussi,

ce qui implique B'' inversible par les mêmes arguments qu'en 4) a).

Ainsi H est de la forme voulue, i.e., $H \in P$. $\square$