Exercice 1

1) q non dégénérée si pour tout vecteur $x \neq 0$
$\exists y \in E$ tq $b(x,y) \neq 0$.

2) a) $F^\perp = \{x \in E : \forall y \in F \quad b(x,y) = 0\}$.

b) Soit $e_1, \ldots, e_p$ base de F, complétée par $e_{p+1}, \ldots, e_n$ en une base de E.

On vérifie aisément, pour tout $x \in E$:

$$x \in F^\perp \iff b(x, e_i) = 0 \text{ pour } i = 1, \ldots, p.$$

Ainsi $F^\perp$ est le noyau de l'application linéaire

$$x \in E \longmapsto \begin{pmatrix} b(x,e_1) \\ \vdots \\ b(x,e_p) \end{pmatrix} \in \mathbb{k}^p.$$

La matrice de cette application linéaire dans les bases $(e_1, \ldots, e_n)$ de E et canonique de $\mathbb{k}^p$ est une sous matrice de la matrice de b dans $(e_1, \ldots, e_n)$:

$$\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} b(e_1,e_1) & \cdots & b(e_n,e_1) \\ \vdots & & \vdots \\ b(e_1,e_p) & \cdots & b(e_n,e_p) \end{matrix}} \\ \begin{matrix} \vdots & & \vdots \\ b(e_1,e_n) & \cdots & b(e_n,e_n) \end{matrix} \end{pmatrix}$$

c'est une sous-matrice $p \times n$ d'une matrice qui est inversible puisque q est non-dégénérée, donc elle est de rang p.

Du coup son noyau a dimension $n-p$. □

3) a) On vérifie sans mal que la matrice est inversible.

b) i) $\mathrm{Mat}(q|F)_{(e_1)} = (0)$

$F^\perp = \mathrm{Vect}(e_1, e_2, e_4)$ (ces 3 vecteurs sont dans $F^\perp$, et $\dim(F^\perp) = 3$)

$F \cap F^\perp = \mathrm{Vect}(e_1)$.

ii) $\mathrm{Mat}(q|F)_{(e_1,e_2)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$F^\perp = \mathrm{Vect}(e_1, e_2)$

$F \cap F^\perp = \mathrm{Vect}(e_1, e_2)$

iii) $\mathrm{Mat}_{(e_1,e_3)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$F^\perp = \mathrm{Vect}(e_2, e_4)$

$F \cap F^\perp = \{0\}$

iv) $\mathrm{Mat}_{(e_1,e_2,e_3)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$F^\perp = \mathrm{Vect}(e_2)$

$F \cap F^\perp = \mathrm{Vect}(e_2)$.

4) a) $\boxed{(i) \Rightarrow (ii)}$

Soit $x \in F$. Par (i), $x \notin F^\perp$ donc $\exists\, y \in F$ tq $b(x,y) \neq 0$.
Par définition, $q|F$ n'est pas dégénérée.

$\boxed{(ii) \Rightarrow (i)}$

Raisonnement analogue au précédent.

$\boxed{(i) \Leftrightarrow (iii)}$

Vient de ~~l'égalité~~ l'inégalité $\dim F + \dim F^\perp \geq \dim E$. [*]

b) $q|F$ est non-dégénérée dans le cas (iii) seulement (on regarde les matrices et si elles sont inversibles).

---

[*] Si q non dégénérée, c'est une égalité par 2b).
En général, l'argument du 2b) donne $\dim F^\perp \geq n - \dim F$ (le rang de la matrice $p \times n$ est $\leq p$).

Exercice 2

1) a) Notons $\mathcal{B}' = (e_1, \dots, e_p)$
$\mathcal{B}'' = (e_{p+1}, \dots, e_n)$

$$A = \left(b(e_i,e_j)\right)_{1\leq i,j\leq p} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(q_{|F}) \quad ; \quad B = \left(b(e_i,e_j)\right)_{p+1\leq i,j\leq n} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}''}(q_{|G})$$

$$C = \left(b(e_i,e_j)\right)_{\substack{1\leq i\leq p\\ p+1\leq j\leq n}}$$

b) $F \perp G \iff \forall i = 1, \dots, p \quad e_i \in G^{\perp}$
$\iff$ ——— $\forall j = p+1, \dots, n \quad b(e_i,e_j) = 0$
$\iff C = 0.$

2) a) $q(x) \neq 0$ donc $x \neq 0$.
Pour $F = \mathrm{Vect}(x)$, $q_{|F}$ non dégénérée donc $F \oplus F^{\perp} = E$ par 4) de l'Exercice 1.
N'importe quelle base de F concaténée avec n'importe quelle base de $F^{\perp}$ convient, par la question 1).

b) Si $q \equiv 0$ c'est trivial, sinon on trouve x non isotrope et par a) il suffit d'appliquer l'hypothèse de récurrence à $x^{\perp}$.

3) On note (x,y,z) les coordonnées dans (e_1,e_2,e_3) :

$$q\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = 2(xy+yz) = 2(x+z)y = \frac{1}{2}\left[(x+z+y)^2 - (x+z-y)^2\right]$$

Les 3 formes linéaires $x+y+z$, $x-y+z$, z forment une base de $E^{\vee}$.
La base duale est une base de E, on vérifie qu'elle est constituée des trois vecteurs :

$$\begin{pmatrix}1/2\\1/2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1/2\\-1/2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$$

[pour les trouver, résoudre les trois systèmes

$$\begin{pmatrix}1&1&1\\1&-1&1\\0&0&1\end{pmatrix}\left(\begin{array}{c|c|c}x_1&x_2&x_3\\y_1&y_2&y_3\\z_1&z_2&z_3\end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c|c}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{array}\right)$$
]

N'importe quelle base constituée de vecteurs multiples de ces 3 vecteurs est orthogonale pour q, par exemple

$$\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$$

Exercice instructif : vérifier que ces vecteurs sont bien 2 à 2 orthogonaux pour q (on en profite pour vérifier qu'on ne s'est pas trompé dans les calculs)

Exercice 3

1) a) Il existe une droite sur laquelle q est définie positive (deux en fait, $\mathrm{Vect}(e_1)$ et $\mathrm{Vect}(e_2)$) donc a priori la signature de q est du type (a,b) avec $a \geq 1$ et $a+b = \mathrm{rg} \leq 2$.

$\mathrm{rg}=2$: • $(2,0)$ est possible, exemple $q(x,y) = x^2+y^2$
$e_1 = (1,0)$, $e_2 = (0,1)$

• $(1,1)$ est possible, exemple $q(x,y) = x^2 - y^2$
$e_1 = (1,0)$, $e_2 = (2,1)$

ou $q(x,y) = xy$
$e_1 = (1,1)$, $e_2 = (2,1)$

$\mathrm{rg}=1$: • $(1,0)$ est possible, exemple $q(x,y) = x^2$
$e_1 = (1,0)$, $e_2 = (1,1)$.

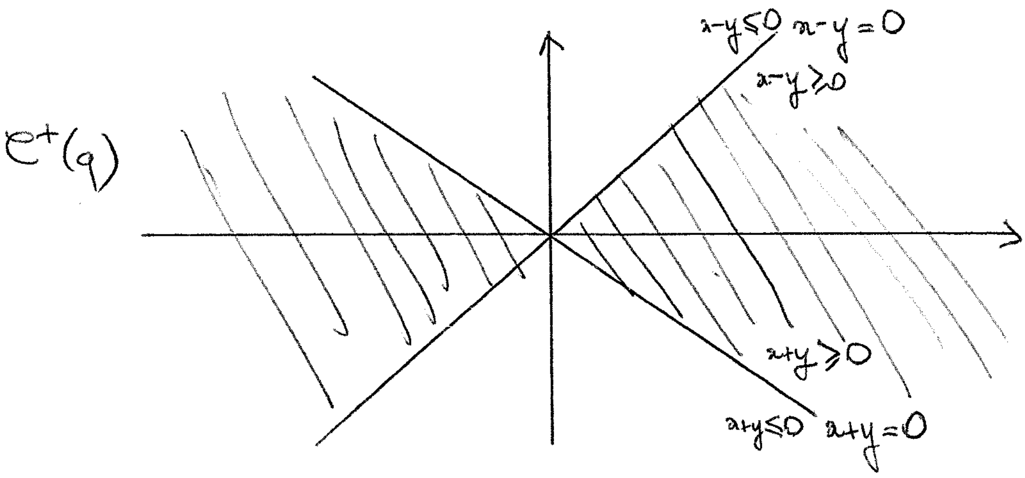
Conclusion : toutes les signatures de la forme $(1+\varepsilon, b)$ avec $\varepsilon, b \in \mathbb{N}$, $\varepsilon + b \leq 1$ sont possibles.

b) Si $b(e_1,e_2)=0$ alors la matrice de q dans cette base est $\begin{pmatrix} q(e_1) & 0 \\ 0 & q(e_2) \end{pmatrix}$, la signature lue dans cette base orthogonale est $(2,0)$. $\square$

2) a) $q(x,y) = x^2-y^2 = (x-y)(x+y)$ a signature $(1,1)$, lue dans la base canonique qui est orthogonale pour q.

$$\mathcal{C}^+(q) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; x^2 - y^2 > 0\}$$

$$= \{ \underline{\qquad\qquad} ; \; x-y \text{ et } x+y \text{ ont le même signe}\}$$



$$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; |y| \leq |x|\}$$

<u>Remarque</u> $\mathcal{C}^+(q)$ est bien un cône, délimité par les deux droites isotropes $x+y=0$ et $x-y=0$, il contient le point $(1,0)$ puisque $q(1,0)>0$.

<u>Remarque 2</u> Il est facile de trouver une base (e_1, e_2) comme à la question 1).

b) La FQ proposée a signature $(1,1)$

En effet 1 : $q(1,0) > 0$ et $q(0,1) < 0$

En effet 2 : $q(1,0) > 0$ et le déterminant est < 0

donc le cône positif aura la même allure qu'en a).

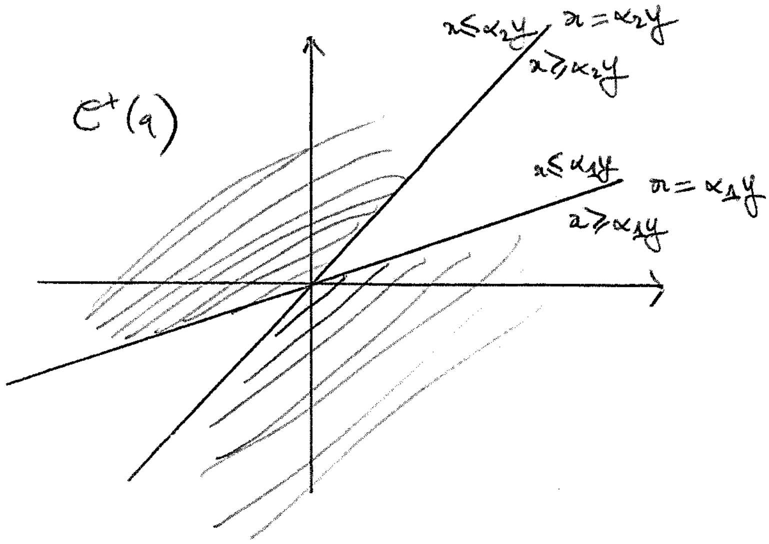
Soit α_1, α_2 les deux racines réelles de $x^2 + 2ax - 1$.

Alors $x^2 + 2ax - 1 = (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)$

et $(x - \alpha_1 y)(x - \alpha_2 y) = x^2 - (\alpha_1 + \alpha_2) xy + \alpha_1\alpha_2 y^2$

$$= x^2 + 2a\, xy - y^2$$

Donc $\mathcal{C}^+(q) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; x - \alpha_1 y \text{ et } x - \alpha_2 y \text{ ont le même signe}\}$



NB : pour être sûr d'avoir un dessin correct, il faudrait étudier le signe de α_1 et α_2 pour avoir celui des pentes des droites.

3) En s'inspirant du 1), on prétend que toutes les signatures $(1+a, b)$ avec $a+b \leq n-1$ sont possibles.

Une telle signature est certainement nécessaire, par le même argument qu'en 1).
Montrons qu'elle est aussi suffisante : il suffit de trouver une base de vecteurs positifs pour q pour la forme quadratique

$$q(x_1, \dots, x_n) = x_1^2 + a_2 x_2^2 + \dots + a_n x_n^2$$

avec les a_i quelconques.

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dots \quad e_i = \begin{pmatrix} |a_i| + 1 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

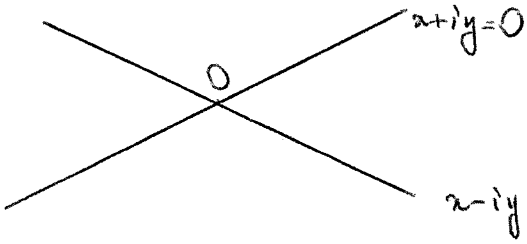
est une base qui convient. $\square$

Exercice 4

1) Cônes isotropes sur $\mathbb{C}$.

a) $x^2+y^2=0 \iff (x+iy)(x-iy)=0$

$\to Z(q)$ réunion des deux droites $x+iy=0$ et $x-iy=0$



b) $x^2=0 \iff x=0$

$\to Z(q)$ est la droite $x=0$

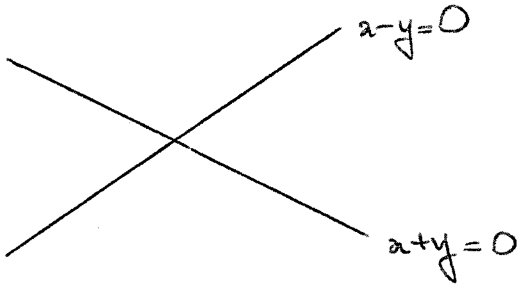
(on a très envie de la compter avec multiplicité 2, non ?)

2) Cônes isotropes sur $\mathbb{R}$.

a) $x^2+y^2=0 \iff x=y=0$

$Z(q)$ est un point (l'origine).

b) $x^2-y^2=0 \iff \begin{cases} x-y=0 \\ \text{ou } x+y=0 \end{cases}$ $\to Z(q)$ est réunion de deux droites



c) $-x^2-y^2=0 \iff x=y=0 \to Z(q)$ réduit à l'origine

d) $Z(x^2)$ est la droite $x=0$ " avec multiplicité 2 ".

e) $Z(-x^2)=Z(x^2)$.

3) a) Par définition, q et q' sont congruentes s'il existe $g \in GL(E)$ tq $q' = q \circ g$.

Dans ces conditions, $Z(q') = g\big(Z(q)\big)$.

(C'est presque le "principe de conjugaison").

b) D'après les résultats de la question 2) :
(en fait il vaut mieux écrire vraiment la démonstration)

$rg(q) = 2 \Leftrightarrow Z(q)$ constitué de deux droites distinctes

$\_\_\_\_ = 1 \Leftrightarrow Z(q)$ droite double

$\_\_\_\_ = 0 \Leftrightarrow Z(q) = \mathbb{C}^2$

d'où le résultat, puisque deux FQ sur $\mathbb{C}^2$ sont congruentes ssi elles ont même rang. (Et pour $g \in GL(E)$: Z = 2 droites $\Leftrightarrow gZ$ = 2 droites ;
Z = 1 droite $\Leftrightarrow gZ$ = 1 droite
$Z = \{0\} \Leftrightarrow gZ = \{0\}$)

c) NON : x^2+y^2 et $-x^2-y^2$ ont même cône isotrope mais des signatures différentes.

4) a) Si $a \neq 0$, le polynôme $ax^2 + bx + c$ a deux racines α_1 et α_2, éventuellement égales, et

$$ax^2 + bxy + cy^2 = a(x - \alpha_1 y)(x - \alpha_2 y) \qquad \text{(voir p. 6)}$$

Le cône isotrope est constitué des deux droites $x = \alpha_1 y$ et $x = \alpha_2 y$, éventuellement confondues (ssi $\Delta = 0$)

Conclusion : $rg(q) = \begin{cases} 2 & \text{si } \Delta \neq 0 \\ 1 & \text{si } \Delta = 0 \end{cases}$ (par la question 3) disons)

Si $a = 0$: $ax^2 + bxy + cy^2 = bxy + cy^2$
$= y(bx + cy)$

Le cône isotrope est constitué des deux droites $y = 0$ et $bx + cy = 0$, qui sont confondues ssi $b = 0 \Leftrightarrow \Delta = 0$ puisque $a = 0$

$rg(q) = \begin{cases} 2 & \text{si } \Delta \neq 0 \\ 1 \text{ ou } 0 & \text{si } \Delta = 0 \leadsto 1 \text{ puisque } a, b, c \text{ non tous nuls.} \end{cases}$

(Évidemment, ces résultats sont à voir à travers le fait que

$$\begin{vmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{vmatrix} = -\frac{1}{4}\Delta. \qquad)$$

b) Si $\Delta \geqslant 0$, le cône isotrope se détermine comme en a)

Si $\Delta < 0$, $ax^2+bx+c \neq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$,

donc pour $y \neq 0$: $ax^2+bxy+cy^2 = y^2\underbrace{\left(a\left(\frac{x}{y}\right)^2+b\left(\frac{x}{y}\right)+c\right)}_{\neq 0}$

d'autre part pour $y=0$: $ax^2+bxy+cy^2 = ax^2$

et $a \neq 0$ puisque $\Delta = b^2-4ac < 0$

Conclusion : le cône isotrope est ~~la droite~~ réduit à l'origine.

<u>Signature :</u>

- $\Delta > 0 \Rightarrow Z$ constitué de deux droites $\neq$, donc sign $= (1,1)$.
- $\Delta = 0 \Rightarrow Z$ ——— d'une droite double, donc sign $= (1,0)$ ou $(0,1)$ selon le signe de a
- $\Delta < 0 \Rightarrow Z = \{0\}$ donc sign $= (2,0)$ ou $(0,2)$ selon le signe de a.

<u>Remarque</u> On retrouve le critère de Sylvester : $\begin{pmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{pmatrix}$ définie positive

$$\Leftrightarrow a > 0 \text{ et } \det = -\frac{1}{4}\Delta > 0.$$