Representações de Grupos e Álgebras de Lie

Thiago Brevidelli Garcia – Iryna Kashuba
`pablopie.xyz`
Outubro de 2022

- Ações de grupos

$$G \times X \longrightarrow X$$
$$G \longrightarrow S_X$$

Citação
Até ~~a criança~~ um grupo se dará a conhecer pelas suas ações, ...

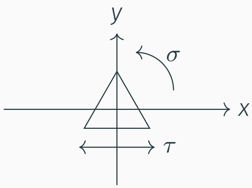
— Provérbios 20,11

Definição
Dados um grupo G e um corpo k, uma representação de G sobre k é um k-espaço vetorial V munido de um homomorfismo de grupos $G \longrightarrow \mathrm{GL}(V)$.

- Representações com estrutura
  - Representações contínuas
  - Representações suaves

Representações: O que são? Onde habitam?

- D_3 age no plano Cartesiano via
- $\mathbb{S}^1$ age naturalmente em $\mathbb{C}$
- $\mathrm{SU}_n \circlearrowright \mathbb{C}^n$



Definição
Um homomorfismo de G–representações é uma aplicação linear $T : V \longrightarrow W$ com

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "T"] \arrow[d, "g"'] & W \arrow[d, "g"] \\ V \arrow[r, "T"'] & W \end{tikzcd}$$

Problema fundamental
Classificar *todas* as G-representações a menos de isomorfismo.

- Representações suaves / $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

Definição
Uma k-álgebra de Lie é um k-espaço vetorial $\mathfrak{g}$ monido de um produto bilinear antissimétrico $[\,,\,] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$ satisfazendo a identidade de Jacobi

$$[X,[Y,Z]] + [Y,[Z,X]] + [Z,[X,Y]] = 0$$

$$V \; k\text{-espaço vetorial} \quad \rightsquigarrow \quad \mathfrak{gl}(V) \; k\text{-alg de Lie}$$

- $\mathfrak{gl}(V) = \mathbf{End}(V)$ com $[X,Y] = XY - YX$

Definição
Uma representação de $\mathfrak{g}$ é um k-espaço vetorial V munido de um operador linear $\rho : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$ que preserva dos colchetes.

$$[\rho(X), \rho(Y)] = \rho([X,Y])$$

Definição
A álgebra de Lie $\mathfrak{g} = \mathsf{Lie}(G)$ é a $\mathbb{R}$-álgebra de Lie dos campos $X \in \mathfrak{X}(G)$ tais que $X_g = (d\ell_g)_e X_e \, \forall g \in G$, com

$$[X, Y]f = XYf - YXf$$
$$X, Y \in \mathfrak{g}, \quad f \in C^\infty(G)$$

- Funtorialidade

$$G \longrightarrow H \quad \rightsquigarrow \quad \mathsf{Lie}(G) \longrightarrow \mathsf{Lie}(H)$$

- Se G é simplesmente conexo

$$G\text{-reps suaves} \,/\, \mathbb{C} \quad \leftrightsquigarrow \quad \mathsf{Lie}(G)\text{-reps} \,/\, \mathbb{C} \quad \leftrightsquigarrow \quad \mathbb{C} \otimes \mathsf{Lie}(G)\text{-reps} \,/\, \mathbb{C}$$

- Funciona também para grupos algébricos e grupos de Lie complexos!

Representações de SU_2

- $\mathbb{C} \otimes \mathbf{Lie}(SU_2) \cong \mathfrak{sl}_2\mathbb{C}$ é a subálgebra dos $X \in \mathfrak{gl}_2\mathbb{C}$ com $\mathbf{Tr}(X) = 0$

$$e = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad f = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$[e, f] = h \qquad [h, f] = -2f \qquad [h, e] = 2e$$

- Toda $\mathfrak{sl}_2\mathbb{C}$-rep V com $\dim V < \infty$ é soma direta de *irredutíveis*!

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r, bend left] & V_{\lambda-2} \arrow[l, bend left] \arrow[r, bend left, "e"] & V_\lambda \arrow[l, bend left, "f"] \arrow[r, bend left, "e"] & V_{\lambda+2} \arrow[l, bend left, "f"] \arrow[r, bend left] & \cdots \arrow[l, bend left]
\end{tikzcd}$$

Representações de SU_2

- Os autovalores de h em V formam uma cadeia ininterrupta de inteiros simétrica ao redor de 0

0

-1 +1

-2 0 +2

$$\begin{tikzcd}
V_{-4} \arrow[r, bend left, "e"] & V_{-2} \arrow[l, bend left, "f"] \arrow[r, bend left, "e"] & V_0 \arrow[l, bend left, "f"] \arrow[r, bend left, "e"] & V_2 \arrow[l, bend left, "f"] \arrow[r, bend left, "e"] & V_4 \arrow[l, bend left, "f"]
\end{tikzcd}$$

- V é completamente caracterizada pelo maior autovalor $\lambda \in \mathbb{Z}$ de h

$$V = \mathsf{Sym}^n\, \mathbb{C}^2$$

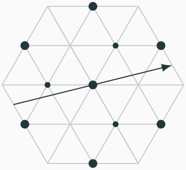
$$g \cdot (v_1 \cdots v_n) = gv_1 \cdots gv_n,\ g \in \mathsf{SU}_2$$

$$\begin{array}{rcl} \mathfrak{sl}_2\mathbb{C} & \rightsquigarrow & \mathfrak{sl}_n\mathbb{C} \\ h & \rightsquigarrow & \mathfrak{h} = \{X \in \mathfrak{sl}_n\mathbb{C} : X \text{ diagonal}\} \\ \lambda \in \mathbb{C} & \rightsquigarrow & \lambda \in \mathfrak{h}^* \end{array}$$

- *Pesos*: “autovalores” da ação de $\mathfrak{h}$

$$H \cdot v = \lambda(H) \cdot v \quad \forall H \in \mathfrak{h}$$

- Os pesos de V estão todos em um reticulado $P \subset \mathfrak{h}^*$ e são congruentes mod um subreticulado $Q \subset P$



- V é determinado por seu maior peso!