HABILITATION À DIRIGER DES RECHERCHES

"Contributions à la Statistique multidimensionnelle opératorielle"

Yves ROMAIN

Laboratoire de Statistique et Probabilités,

UMR CNRS C5583, Université Paul Sabatier,

118, route de Narbonne, 31062 Toulouse cedex.

Auditorium de l'IRIT, Université Paul Sabatier,

le 11 décembre 2000 à 14h30.

Commission d'examen

D. Bosq	Univ. Paris VI	rapporteur
J. J. Daudin	INA-PG, Paris	rapporteur-examinateur
J. Dauxois	Univ. Toulouse II	directeur de recherche
J. Fine	IUFM, Toulouse	examinatrice
M. Ledoux	Univ. Paul Sabatier	examinateur
A. Pousse	Univ. Pau et Pays de l'Adour	examinateur
J. Ramsay	Mac Gill Univ., Montréal	rapporteur-examinateur
G. Saporta	CNAM, Paris	examinateur
Ph. Vieu	Univ. Paul Sabatier	examinateur

Résumé. Nous pouvons aisément distinguer trois parties qui se succèdent presque chronologiquement tout en s'interférant et se motivant thématiquement.

La première partie est consacrée à la Statistique factorielle considérée dans un cadre fonctionnel et aux études asymptotiques associées lors d'approximation par échantillonnage i.i.d.. Plus précisément, nous avons d'abord étudié l'Analyse en Composantes Principales (ACP) d'une fonction aléatoire hilbertienne et ses approximations par échantillonnage. Sont alors obtenus des résultats généraux de convergence, presque sûre et en loi, concernant les suites des éléments spectraux (valeurs, vecteurs, projecteurs propres) des opérateurs de covariance dont les décompositions spectrales fournissent l'analyse échantillonnée. La méthodologie statistique et les techniques d'obtentions des lois asymptotiques (qui, sous hypothèses elliptiques, sont explicitées dans un langage tensoriel) sont alors transportables aux autres analyses factorielles et à diverses méthodes dérivées (modulo leurs spécificités bien sûr). Nous obtenons ainsi, en dimension infinie, un cadre synthétique d'étude de comportement asymptotique des méthodes de Statistique multidimensionnelle qui se ramènent à l'analyse spectrale d'un opérateur autoadjoint compact positif. Outre l'ACP (centrée ou non) déjà citée, nous avons plus particulièrement travaillé sur l'ACP réduite (les trois réductions possibles sont considérées), sur l'Analyse Canonique de sous-espaces factoriels (qui permet la comparaison de deux populations) et, récemment, sur l'Analyse Canonique de deux sous-espaces fermés relativement à un troisième (dont le coefficient

maximal englobe plusieurs “mesures d'association” connues).

Dans la deuxième partie, notre intérêt se focalise sur l'environnement opératoriel stochastique de méthodes multidimensionnelles et sur l'argumentation, même en dimension finie, d'une approche “fonctionnelle”. À partir d'un problème d'ordre “linguistique” (comment comparer des explicitations matricielles à des écritures fonctionnelles ?), nous avons d'abord élaboré un dictionnaire matriciel-opératoriel dans un cadre réel euclidien. Puis, nous avons tenté de dégager les outils et notions clés d'une telle approche afin de mieux situer le champ de nos études dans la littérature statistique et au delà. La projection orthogonale, en tant que notion pivotale, et les algèbres de Von Neumann, en tant que structure fondamentale (elles sont engendrées par les projections qu'elles contiennent), nous sont apparues essentielles et un travail particulier a été effectué autour des projecteurs orthogonaux et des opérateurs associés utiles en Statistique multidimensionnelle.

Dans la troisième partie, les travaux portent sur des domaines connexes à nos thèmes habituels. Ils sont, pour nous, des conséquences générées par l'approche préconisée précédemment.

Un premier exemple est celui de l'étude d'une “algèbre” engendrée par des opérateurs tensoriels, nommés “ampliations fonctionnelles” et qui permettent de plonger dans un espace commun plusieurs opérateurs, éventuellement aléatoires, définis dans des espaces différents. Cette étude sur des éléments tensoriels fonctionnels (dont la “maniabilité technique” est à souligner, ce qui fournit divers résultats d'ordre calculatoire, spectral, de perturbation...) est motivée, d'une part, par l'étude des extensions tensorielles des analyses (factorielles) d'opérateurs, d'autre part, par le caractère intrinsèquement opératoriel et tensoriel de la Statistique quantique.

Un second exemple est une première approche pour considérer, d'un point de vue statistique, les deux types de principes d'incertitude les plus répandus : pour le premier type, nous étudions l'inégalité de Cramer-Rao dans ses versions classique et quantique, alors que, pour le second type, nous proposons une interprétation de la relation d'incertitude en terme d'une analyse canonique complexe de deux sous-espaces bien choisis.

Un troisième exemple concerne les liens entre les produits (tensoriel et de convolution) de mesures (spectrales et aléatoires) et les ampliations fonctionnelles. Ce travail a donné des développements récents concernant la convolée de deux mesures aléatoires qui s'appliquent aux processus (hilbertiens) stationnaires ; il est intéressant de noter que la mesure aléatoire associée à cette convolée est celle du produit tensoriel des deux processus stationnaires considérés.

En conclusion, la réflexion menée et les résultats obtenus dans les parties précédentes nous confirment la place particulière, tant d'un point de vue théorique qu'appliqué, que devrait jouer la “tensorisation” (opératorielle, stochastique, réelle et complexe) de la Statistique multidimensionnelle dans nos futurs travaux.

Mots-clés : *analyse en composantes principales, fonction aléatoire hilbertienne, analyse canonique, analyse canonique relative, sous-espaces, opérateur de covariance, loi asymptotique de valeurs, vecteurs et projecteurs propres, projection orthogonale, mesure d'association, principe d'incertitude, mesure aléatoire, mesure spectrale, opérateurs autoadjoints, statistique quantique ou non commutative, algèbre de von Neumann, ampliation fonctionnelle, produit, somme et différence tensoriels fonctionnels.*