Fiche de rappels : Espace Projectif

Exercice 1 *S*oient $C = \mathbf{V}(Y - X^3) \subset \mathbb{C}^2$ (i.e C est égale au lieu des zéros du polynôme $Y - X^3$) et $\overline{C} \subset \mathbb{P}^2$ la courbe projective correspondante. Quel est le polynôme homogène qui définit $\overline{C}$? Quels sont les points singuliers de $\overline{C}$?

Exercice 2 *T*rouver les points d'intersection dans $\mathbb{P}^2$ des courbes suivantes (définies sur $\mathbb{C}^2$ de coordonnées x, y) :

1. les droites $y = 1$ et $y = 2$.
2. la droite $x = 0$ et la parabole $y = x^2$.
3. Les "cercles" de rayon 2 centrés respectivement en $(-1,0)$ et $(1,0)$.

Exercice 3 *O*n admet le *théorème de Bézout* : "si C_1 et C_2 sont deux courbes dans $\mathbb{P}^2$ de degrés respectifs d_1 et d_2, alors $C_1 \cap C_2 = d_1.d_2$ points comptés avec multiplicité." En déduire que le groupe des automorphismes de $\mathbb{P}^2$ est isomorphe à $\mathrm{PGL}(3,\mathbb{C})$. Quels sont les automorphismes de $\mathbb{P}^2$ qui envoient la droite à l'infini sur l'axe des y, et le point $[1:0:0]$ sur $[0:0:1]$? Quelle est l'image de la droite $y = \alpha$ par un tel automorphisme ? Quelle est l'image de $\mathbf{V}(x - y^2)$?

Exercice 4 *D*ans $\mathbb{P}^2$ de coordonnées homogènes $[X:Y:Z]$ on identifie le plan $\mathbb{C}^2$ de coordonnées x, y à la carte $Z \neq 0$.

Soient $C_1 = \{y^2 - x = 0\}$, $C_2 = \{xy - 1 = 0\}$, et $\overline{C_1}$, $\overline{C_2}$ les courbes projectives correspondantes.

1. Ecrire les équations homogènes qui définissent $\overline{C_1}$ et $\overline{C_2}$ et déterminer $\overline{C_1} \cap \overline{C_2}$.
2. Soit $p = [0:0:1]$ et $\overline{D} = \{Z = 0\}$ la droite à l'infini. On considère l'application
$$f : [a:b:0] \in \overline{D} \to [f_1 : f_2 : f_3] \in \overline{C_1}$$
qui à tout point $q \in \overline{D}$ associe le point d'intersection de $\overline{C_1}$ avec la droite passant par p et q.

   Expliciter f_1, f_2 et f_3 et montrer que f est bijective.
3. Existe-t-il un automorphisme g de $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ tel que $g(\overline{C_1}) = \overline{D}$? (Si oui expliciter g, si non donner un court argument).
4. Existe-t-il un automorphisme g de $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ tel que $g(\overline{C_1}) = \overline{C_2}$? (Si oui expliciter g, si non donner un court argument).

Exercice 5 Soit $C = \{y^2 = x^3\} \subset \mathbb{C}^2$. On dit que C est une *cubique cuspidale*.

1. Montrer que le point $p = (0,0)$ est l'unique point singulier de C, et dessiner l'allure de la partie réelle de C.
2. En s'inspirant de l'exercice précédent, montrer que la projection π par rapport à p de C vers une droite (ne passant pas par p) est une bijection.
3. Choisir une droite, et écrire explicitement l'inverse de π : constater que π n'est pas un isomorphisme.

Exercice 6 Soit $f : x \in \mathbb{C} \to (x^3, x^2, x) \in \mathbb{C}^3$. On note C l'image de f, et $\overline{C} \in \mathbb{P}^3$ la courbe projective correspondante. On dit que $\overline{C}$ est une *cubique gauche*.

1. Trouver deux polynômes de degré 2 $P_1, P_2 \in \mathbb{C}[x,y,z]$ tel que $C = \{P_1 = P_2 = 0\}$.
2. Expliciter $\overline{f} : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^3$ tel que $\overline{f}(\mathbb{P}^1) = \overline{C}$.
3. Ecrire les polynômes homogènes $\overline{P_1}$ et $\overline{P_2}$, et montrer que $\overline{\mathbb{C}} \neq \{\overline{P_1} = \overline{P_2} = 0\}$.
4. Trouver un troisième polynôme quadratique P_3 tel que $\overline{\mathbb{C}} = \{\overline{P_1} = \overline{P_2} = \overline{P_3} = 0\}$.

Exercice 7 On considère l'application

$$\sigma : [x : y : z] \to [yz : xz : xy]$$

appelée *application quadratique standard*. Quel est le domaine de définition de σ ? Montrer que σ induit un isomorphisme entre deux ouverts de Zariski. Quel est l'inverse de σ ? Exprimer σ dans la carte affine canonique (i.e. sur $\mathbb{C}^2 = \{z \neq 0\}$). Quelle est l'image d'une droite par σ (plusieurs cas à distinguer) ?

Exercice 8 Soit $f : (x,y) \in \mathbb{C}^2 \to (x,y,xy) \in \mathbb{C}^3$.

1. Expliciter l'application $\overline{f} : \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^3$ qui prolonge f.
2. Montrer que l'image S de $\overline{f}$ est une surface définie par une équation de degré 2.
3. Expliciter deux familles de droites dans $\mathbb{P}^3$ qui soient contenues dans S.
4. Pouvez-vous trouver une surface de $\mathbb{P}^3$ définie par une équation de degré 2 qui ne soit pas isomorphe à $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$?