

# Leçons 153 et 157

Stéphane Lamy

Lundi 22 octobre

## Table des matières

<b>Extraits de rapport du jury sur la leçon 157. Endomorphismes trigonalisables. Endomorphismes nilpotents</b>	<b>1</b>
<b>Extraits de rapport du jury pour la leçon 153. Polynômes d'endomorphisme en dimension finie. Réduction d'un endomorphisme en dimension finie. Applications</b>	<b>2</b>
<b>Preuve express du lemme des noyaux (5 mn chrono)</b>	<b>4</b>
<b>Développements discutés lors de la séance</b>	<b>4</b>
Classification des matrices nilpotentes via les diagrammes de Young . . . .	4
Cardinal du cône nilpotent . . . . .	6
Endomorphismes semi-simples . . . . .	8
<b>Leçons où l'on peut envisager ces développements</b>	<b>10</b>

## Extraits de rapport du jury sur la leçon 157. Endomorphismes trigonalisables. Endomorphismes nilpotents


• « Il est bon de savoir expliquer pourquoi l'application induite par un endomorphisme trigonalisable (respectivement nilpotent) sur un sous-espace stable est encore trigonalisable (respectivement nilpotent). »

Un endomorphisme est trigonalisable (resp. nilpotent) ssi il admet un polynôme annulateur scindé (resp. un polynôme annulateur de la forme  $X^m$ ).

Si  $u \in \mathcal{L}(E)$ ,  $F \subseteq E$  est stable par  $u$ , et  $P$  annule  $u$ , alors  $P$  annule aussi  $u|_F$ .

• « L'utilisation des noyaux itérés est fondamentale dans cette leçon, par exemple pour déterminer si deux matrices nilpotentes sont semblables. »

Les deux matrices suivantes sont nilpotentes, ont même polynôme caractéristique  $X^4$  et même polynôme minimal  $X^2$ , mais elles ne sont pas semblables :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$


Preuve des noyaux itérés : le morphisme surjectif  $f^i: \text{Ker } f^{i+1} \rightarrow \text{Ker } f \cap \text{Im } f^i$  donne un isomorphisme entre  $\text{Ker } f^{i+1}/\text{Ker } f^i$  et  $\text{Ker } f \cap \text{Im } f^i$ , ainsi  $d^{i+1} - d_i = \dim(\text{Ker } f \cap \text{Im } f^i)$  et comme  $\text{Im } f^{i+1} \subset \text{Im } f^i$  on voit que cette suite de dimension est décroissante.

Réinterprétation de quelques faits élémentaires en terme de diagramme de Young :

(i) Le nombre total de cases est la dimension  $n$ , c'est à dire l'exposant du polynôme caractéristique  $X^n$ .

(ii) La hauteur de la première colonne est l'exposant  $p$  du polynôme minimal  $X^p$ .

(iii) Quel rapport entre les diagrammes de Young de  $N$  et  $N^2$ ? Les deux diagrammes ci-dessous sont-ils des diagrammes de matrices nilpotentes  $N^2$ ? Si oui, quel est le diagramme de  $N$ ?

(iv) Quel est le diagramme de Young de  $N$  restreint à l'image de  $N$ ?

- « Il est intéressant de présenter des conditions suffisantes de trigonalisation simultanée »

Matrices trigonalisables qui commutent. Mais les matrices suivantes ne commutent pas! Et deux rotations commutent mais ne sont pas simultanément trigonalisables!

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Plus sophistiqué : matrices dans un groupe résoluble connexe (Lie-Kolchin)

- « L'étude des endomorphismes cycliques a toute sa place dans cette leçon. »

Un bloc de Jordan est un exemple d'endo cyclique?

- « L'étude des nilpotents en dimension 2 débouche naturellement sur des problèmes de quadriques. »

En dimension 2,  $M$  est nilpotente ssi  $\det M = \text{Tr } M = 0$ , ce qui donne

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} \text{ avec } a^2 + bc = 0.$$

- « L'étude sur un corps fini donne lieu à de jolis problèmes de dénombrement. »

cf. développement "Cardinal du cone nilpotent".

- « S'ils le désirent, les candidats peuvent aussi présenter la décomposition de Frobenius, ou des caractérisations topologiques des endomorphismes nilpotents, ou encore des propriétés topologiques de l'ensemble des endomorphismes nilpotents. »

Le calcul clé est le suivant (qui s'étend facilement pour une matrice triangulaire nilpotente de taille quelconque) :

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^{-1} & 0 \\ 0 & b^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{a}{b}t \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On en déduit que si  $N$  est nilpotente alors la matrice nulle est dans l'adhérence de l'orbite de similitude de  $N$ . Réciproquement si la matrice nulle est dans l'adhérence de l'orbite de similitude de  $N$ , alors par continuité du polynôme caractéristique (qui est donnée par une formule polynomiale en les coefficients de  $N$ ), on en déduit que  $\chi_N = X^n$  le polynôme caractéristique de la matrice nulle.

On pourra consulter [CG13, p. 119] pour des prolongements de ce cercle d'idées : l'orbite nulle est la seule fermée, la seule ouverte est celle du bloc de Jordan de taille maximale (toutes les autres sont en fait d'intérieur vide), et on peut comprendre quelles orbites sont dans l'adhérence d'une autre à l'aide de l'ordre "badaboum" sur les diagrammes de Young.

## Extraits de rapport du jury pour la leçon 153. Polynômes d'endomorphisme en dimension finie. Réduction d'un endomorphisme en dimension finie. Applications

- « Le candidat peut s'interroger sur les idempotents et le lien avec la décomposition en somme de sous-espaces caractéristiques »

Un élément  $a$  d'un anneau  $A$  est dit idempotent si  $a^2 = a$  (les puissances de  $a$  sont égales à  $a$ , d'où le nom). Dans le contexte de l'anneau des endomorphismes d'un espace vectoriel, cela correspond à la notion de projecteur. Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$  de polynôme minimal  $\pi_u$ , admettant la factorisation en facteurs irréductibles  $\pi_u = \prod P_i^{\alpha_i}$ . Par le théorème des restes chinois :

$$\mathbf{k}[u] \simeq \mathbf{k}[X]/(P_1^{\alpha_1}) \oplus \dots \oplus \mathbf{k}[X]/(P_s^{\alpha_s}).$$

Un idempotent dans le terme de droite est de la forme  $(a_1, \dots, a_s)$  avec chaque  $a_i$  idempotent dans le facteur  $\mathbf{k}[X]/(P_i^{\alpha_i})$ . Or  $Q(Q-1) = 0 \pmod{P_i^{\alpha_i}}$  implique  $Q = 0 \pmod{P_i^{\alpha_i}}$  ou  $Q-1 = 0 \pmod{P_i^{\alpha_i}}$  (car  $Q \wedge (Q-1) = 1$ , et  $P_i$  irréductible). Donc  $(a_1, \dots, a_s)$  est idempotent ssi chaque  $a_i$  est égal à 0 ou 1.

Faisons le lien avec les projecteurs sur les sous-espaces caractéristiques. On pose  $Q_i = \prod_{j \neq i} P_j^{\alpha_j}$ , et on écrit une relation de Bézout

$$A_1 Q_1 + \dots + A_s Q_s = 1.$$

On sait (voir preuve du lemme des noyaux) que  $A_i(u)Q_i(u)$  est le projecteur sur le sous-espace caractéristique  $\text{Ker } P_i(u)^{\alpha_i}$ , et  $A_i Q_i = 1 \pmod{P_i^{\alpha_i}}$  et pour  $j \neq i$ ,  $A_i Q_i = 0 \pmod{P_j^{\alpha_j}}$ . Ainsi l'idempotent  $(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$  (un seul 1 en  $i$ ème position) correspond au projecteur  $\pi_i$ , et les idempotents de  $\mathbf{k}[u]$  sont exactement les sommes de projecteurs sur les sous-espaces caractéristiques.

• « Il est souhaitable que les candidats ne fassent pas la confusion entre diverses notions de multiplicité pour une valeur propre  $\lambda$  donnée (algébrique ou géométrique) »

Un simple petit tour via [wikipedia](#) peut permettre d'éclaircir les idées. L'ordre de multiplicité géométrique de  $\lambda$  est la dimension du sous-espace propre associé, alors que l'ordre de multiplicité algébrique est la dimension du sous-espace caractéristique associé. Ce dernier est aussi égal à l'ordre de multiplicité de la racine dans le polynôme caractéristique de  $u$ . En terme de diagramme de Young associé à la valeur propre :

• La multiplicité géométrique est le nombre de cases de la ligne de base du diagramme, c'est aussi le nombre de blocs de Jordan ;

• La multiplicité algébrique est le nombre de cases total du diagramme ;

• L'ordre de multiplicité de la racine  $\lambda$  dans le polynôme minimal de  $u$  est le nombre de cases de la colonne de gauche du diagramme, c'est aussi la taille du plus grand bloc de Jordan.

• « Les polynômes d'endomorphismes permettent de calculer les puissances d'un endomorphisme », « Rappelons que pour calculer  $A^k$ , il n'est pas nécessaire en général de faire la réduction de  $A$  (la donnée d'un polynôme annulateur de  $A$  suffit bien souvent) »

Supposons par exemple que  $(X - 1)(X - 2)$  est un polynôme annulateur de  $A$ . Par exemple cela pourrait correspondre à  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$  ou encore à  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ . On veut calculer  $A^{1000}$ . On fait une division euclidienne  $X^{1000} = (X - 1)(X - 2)Q(X) + R(X)$ . Le reste est de la forme  $R(X) = aX + b$ , en remplaçant  $X$  par 1 et 2 et en identifiant on obtient les valeurs de  $a$  et  $b$ , et  $A^{1000} = aA + bId$ .

• « Le jury souhaiterait voir certains liens entre réduction et structure de l'algèbre  $\mathbf{k}[u]$  »

**Proposition** (Semi-simplicité et  $\mathbf{k}[u]$ ). *Un endomorphisme  $u$  est semi-simple si et seulement si  $\mathbf{k}[u]$  est un produit de corps.*

*Preuve.* Si  $u$  est semi-simple, alors le théorème dit que  $\pi_u = Q_1 \dots Q_n$  avec les  $Q_i$  irréductibles deux à deux distincts, donc par le théorème des restes chinois

$$\mathbf{k}[u] \simeq \mathbf{k}[X]/(\pi_u) \simeq \mathbf{k}[X]/(Q_1) \times \dots \times \mathbf{k}[X]/(Q_n)$$

est un produit de corps.

Si  $u$  n'est pas semi-simple, on écrit  $\pi_u = Q^m P$  avec  $m \geq 2$ ,  $Q$  irréductible et  $P$  premier avec  $Q$ , et cette fois

$$\mathbf{k}[u] \simeq \mathbf{k}[X]/(\pi_u)$$

contient un élément nilpotent (la classe de  $QP$ ) donc n'est pas un produit de corps.  $\square$

**Proposition** (Diagonalisabilité et  $\mathbf{k}[u]$ ). *Un endomorphisme  $u$  est diagonalisable si et seulement si  $\mathbf{k}[u] \simeq \mathbf{k}^d$ , où  $d$  est le degré du polynôme minimal  $\pi_u$ .*

*Preuve.* Si  $u$  est diagonalisable,  $\pi_u$  est scindé à racine simple, et le résultat découle du théorème des restes chinois et de la remarque  $\mathbf{k}[X]/(X - \lambda) \simeq \mathbf{k}$ .

Si  $\pi_u$  a des facteurs carrés, alors  $\mathbf{k}[u]$  contient des nilpotents donc ne peut être un produit de corps.

Enfin considérons le cas où  $\pi_u = \prod_{i=1}^s P_i$  est sans facteur carré, et au moins un des  $P_i$  est de degré  $\geq 2$ . Dans ce cas  $s < d$ , et donc  $\mathbf{k}[u]$  est un produit de  $s$  corps seulement (de plus ceux correspondant aux facteurs de degré  $\geq 2$  ne sont pas isomorphes à  $\mathbf{k}$ ?).  $\square$

• « Les candidats doivent connaître sans hésiter la dimension de l'algèbre  $\mathbf{k}[u]$ . », « Les propriétés globales pourront être étudiées (dimension, commutant) », « La notion de commutant d'un endomorphisme doit être comprise par les meilleurs »

Concernant la dimension, sans hésiter  $\dim \mathbf{k}[u]$  est le degré du polynôme minimal de  $u$ .

Concernant le commutant, on a par exemple la

**Proposition.** *Le commutant de  $u$  est égal à  $\mathbf{k}[u]$  si et seulement si il existe une base où la matrice de  $u$  est une matrice compagnon.*

*Preuve.* Voir [CG14, p. 83] □

- « On n'exige pas le théorème du bicommutant. »

Ce n'est donc pas exigé, mais ce n'est pas non plus interdit de connaître la définition du bicommutant. Le commutant  $\text{Com}(u)$  est défini comme l'ensemble des endomorphismes de  $E$  commutant avec  $u$ . Le *bicommutant* est défini comme  $\text{Com}(\text{Com}(u))$ , l'ensemble des endomorphismes commutant avec tout élément de  $\text{Com}(u)$ . On a alors :

**Théorème** (du bicommutant). *Pour tout  $u \in \mathcal{L}(E)$ ,  $\text{Com}(\text{Com}(u)) = \mathbf{k}[u]$ .*

*Preuve.* Voir [CG14, p. 87] □

## Preuve express du lemme des noyaux (5 mn chrono)

(inspirée de [CG13, p. 111]).

**Lemme** (Lemme des noyaux). *Soit  $A$  un endomorphisme d'un  $\mathbf{k}$ -espace vectoriel  $E$ , et  $P = \prod P_i$  un polynôme annulateur de  $A$  dont les facteurs  $P_i$  sont deux à deux premiers entre eux. Alors  $E = \text{Ker } P(A) = \bigoplus \text{Ker } P_i(A)$ . Notons  $\pi_i \in \mathcal{L}(E)$  le projecteur sur  $\text{Ker } P_i(A)$  parallèlement aux autres facteurs de la somme directe. Alors  $\pi_i$  est un polynôme en  $A$ .*

*Preuve.* Soit  $Q_i = \prod_{j \neq i} P_j$ . Les  $Q_i$  sont globalement premiers entre eux, donc l'anneau  $\mathbf{k}[X]$  étant principal l'idéal engendré par les  $Q_i$  est l'anneau  $\mathbf{k}[X]$  tout entier, en particulier on a une relation de Bezout

$$\sum_i U_i Q_i = 1$$

pour certains polynômes  $U_i \in \mathbf{k}[X]$ . On applique les deux côtés de cette égalité à  $A$  pour obtenir une identité entre éléments de  $\mathcal{L}(E)$  :

$$\sum_i U_i(A) Q_i(A) = \text{id}.$$

Étant donné un vecteur  $x \in E$ , on évalue en  $x$  pour obtenir

$$\sum_i U_i(A) Q_i(A)(x) = x.$$

Par définition des  $Q_i$ , chaque facteur  $U_i(A) Q_i(A)(x)$  appartient à  $\text{Ker } P_i(A)$ , ce qui montre que  $E$  est la somme des  $\text{Ker } P_i(A)$ .

De plus la somme est directe car si  $x \in \text{Ker } P_k(A) \cap \left( \sum_{j \neq k} \text{Ker } P_j(A) \right)$  pour un certain indice  $k$ , alors pour tout  $i$ ,  $Q_i(A)(x)$  est nul, et donc  $x = 0$  : en effet  $Q_k(A)$  annule tout élément de  $\sum_{j \neq k} \text{Ker } P_j(A)$ , et pour  $i \neq k$  on a  $Q_i(A)$  qui annule tout élément de  $\text{Ker } P_k(A)$ .

Pour finir on remarque au passage que  $\pi_i = U_i(A) Q_i(A)$  est bien un polynôme en  $A$ . □

**Remarque.** On peut se limiter à écrire la preuve du lemme des noyaux dans le cas de deux facteurs : les notations sont un peu plus légères, et on peut par ailleurs en déduire le cas général par récurrence.

## Développements discutés lors de la séance

### Classification des matrices nilpotentes via les diagrammes de Young

[CG13, p. 92]

Leçons :

- 150. Exemples d'actions de groupes sur les espaces de matrices

Ok, mais changer un peu la présentation pour mettre en avant l'action par conjugaison de  $\text{GL}_n$  sur le cône des matrices nilpotentes.

- 151. Dimension d'un espace vectoriel (on se limitera au cas de la dimension finie). Rang. Exemples et applications

S'intéresser à la dimension des noyaux des itérés équivaut à s'intéresser à leur rang...

- 153. Polynômes d'endomorphisme en dimension finie. Réduction d'un endomorphisme en dimension finie. Applications

Ok pour le deuxième aspect de la leçon (réduction d'endomorphismes), par contre pas trace de l'algèbre  $\mathbf{k}[u]$ . Prendre ça en compte pour le choix du 2ème développement...

- 154. Sous-espaces stables par un endomorphisme ou une famille d'endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie. Applications

Les  $\text{Ker } N^i$  sont des sous-espaces stables, et les colonnes du diagramme correspondent à des sous-espaces stables qui donnent la forme de Jordan...

- 157. Endomorphismes trigonalisables. Endomorphismes nilpotents



Soit  $N \in \mathcal{M}_n(\mathbf{k})$  une matrice nilpotente d'ordre  $m$  ( $\mathbf{k}$  est un corps arbitraire). On construit à partir de  $N$  la suite des noyaux itéré  $K_i = \text{Ker } N^i$ . On commence par montrer :

**Lemme.** La suite des  $K_i$  est croissante pour l'inclusion :

$$\{0\} \subsetneq K_1 \subsetneq K_2 \subsetneq \dots \subsetneq K_m = \mathbf{k}^n,$$

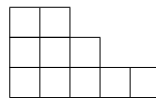
et "s'essoufle", au sens que la suite des  $\lambda_i := \dim K_i - \dim K_{i-1}$  est décroissante.

*Preuve.* Si  $N^i v = 0$  alors  $N^{i+1} v = N \cdot N^i v = N \cdot 0 = 0$ , ce qui montre que la suite des noyaux est croissante.

Le morphisme surjectif  $N^i: \text{Ker } N^{i+1} \rightarrow \text{Ker } N \cap \text{Im } N^i$  donne un isomorphisme entre le quotient  $\text{Ker } N^{i+1} / \text{Ker } N^i$  et  $\text{Ker } N \cap \text{Im } N^i$ , ainsi  $\lambda^{i+1} - \lambda_i = \dim(\text{Ker } N \cap \text{Im } N^i)$  et comme  $\text{Im } N^{i+1} \subset \text{Im } N^i$  on obtient le résultat.  $\square$

On appelle *diagramme de Young* associé à  $N$  un empilement de carrés «justifié à gauche» avec  $\lambda_i$  carrés sur la  $i$ ème ligne.

**Exemple.** Si  $\dim K_1 = 5$ ,  $\dim K_2 = 8$  et  $N \in \mathcal{M}_{10}(\mathbf{k})$  avec  $m = 3$ , on a donc  $\dim K_3 = 10$ ,  $\lambda_1 = 5$ ,  $\lambda_2 = 3$  et  $\lambda_3 = 2$ , et le diagramme associé est



Les hauteurs des cinq colonnes, qui interviennent dans la proposition ci-dessous, sont 3, 3, 2, 1, 1.

On appelle bloc de Jordan de taille  $p$  la matrice  $J_p = \begin{pmatrix} 0 & & 0 \\ 1 & 0 & \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_p(\mathbf{k})$ .

**Proposition.** Soit  $N \in \mathcal{M}_n(K)$  une matrice nilpotente. Notons  $p_1 \geq p_2 \geq \dots \geq p_k$  les hauteurs des colonnes de son diagramme de Young. Alors  $N$  est semblable à la matrice diagonale par bloc, avec blocs égaux à  $J_{p_1}, \dots, J_{p_k}$ .

Il faut reproduire plus ou moins la discussion [CG13, p. 90], et ne pas y passer l'intégralité des 15 minutes... Ci-dessous une tentative.

*Preuve.* (en pratique, faire un dessin de diagramme dont on remplit les cases au fur et à mesure de la discussion).

On va remplir les cases du diagramme de Young avec des vecteurs qui vont former une base de  $\mathbf{k}^n$ , et tel que les vecteurs des  $i$  premières lignes (la ligne 1 est celle du bas) donne une base de  $\text{Ker } N^i$ , et en respectant la règle suivante : si une case contient le vecteur  $v$ , alors la case immédiatement dessous contient le vecteur  $Nv$ .

On commence par choisir un supplémentaire  $F$  de  $K_{m-1}$  dans  $K_m$ , et on remplit la ligne du haut par des vecteurs formant une base de  $F$  (théorème base incomplète). On remplit toutes les cases dessous en appliquant  $N$  à ces vecteurs.

Maintenant supposons les lignes du haut  $i + 1$  à  $m$  remplies. On finit de remplir la ligne  $i$  en utilisant à nouveau le théorème de la base incomplète : on choisit une base de  $\text{Ker } N^{i-1}$  auquel on ajoute les vecteurs de  $\text{Ker } N^i \setminus \text{Ker } N^{i-1}$  provenant des étapes précédentes, puis on applique la règle pour remplir les cases immédiatement dessous.

Par construction, en prenant les vecteurs de haut en bas, chaque colonne de hauteur  $p$  donne un bloc de Jordan  $J_p$ .  $\square$

**Théorème.** Soient  $A, B \in \mathcal{M}_n(K)$  deux matrices nilpotentes. Alors  $A$  et  $B$  sont semblables si et seulement si leurs diagrammes de Young associés sont les mêmes, c'est-à-dire si et seulement si les dimensions de leur noyaux itérés sont les mêmes.

*Preuve.* Supposons  $A$  et  $B$  semblables, et écrivons  $B = PAP^{-1}$ . On déduit l'égalité des tableaux de Young des égalités  $\dim \text{Ker } B^i = \dim \text{Ker } PA^iP^{-1} = \dim \text{Ker } A^i$ .

Réciproquement si  $A$  et  $B$  ont mêmes tableaux de Young, par la proposition elles sont semblables à la même matrice diagonale par bloc et sont donc semblables.  $\square$

S'il reste un peu de temps il est naturel de présenter l'exemple suivant :

**Exemple.** Les deux matrices suivantes sont nilpotentes, ont même polynôme caractéristique  $X^4$  et même polynôme minimal  $X^2$ , mais elles ne sont pas semblables car leur diagrammes de Young (à 4 cases et de hauteur 2) sont distincts :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



### Cardinal du cône nilpotent

[CG14, p. 217]

Leçons :

- 101. Groupe opérant sur un ensemble. Exemples et applications
- 104. Groupes finis. Exemples et applications

Les  $\text{GL}_n(\mathbb{F}_q)$  sont de bons exemples de groupes finis !

- 150. Exemples d'actions de groupes sur les espaces de matrices
- 154. Sous-espaces stables par un endomorphisme ou une famille d'endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie. Applications
- 157. Endomorphismes trigonalisables. Endomorphismes nilpotents
- 190. Méthodes combinatoires, problèmes de dénombrements



**Théorème.** Soit  $q$  une puissance d'un nombre premier,  $\mathbb{F}_q$  un corps à  $q$  éléments, et  $d \geq 1$ . Alors le nombre  $n_d$  de matrices nilpotentes dans  $\mathcal{M}_d(\mathbb{F}_q)$  est

$$n_d = q^{d(d-1)}.$$

**Lemme (Fitting).** Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension finie, et  $u \in \mathcal{L}(E)$ . Alors il existe  $n \geq 0$  tel que  $E = \text{Ker } u^n \oplus \text{Im } u^n$ , avec  $u|_{\text{Ker } u^n}$  nilpotent et  $u|_{\text{Im } u^n}$  inversible. Réciproquement si  $E = F \oplus G$  avec  $F, G$  stables par  $u$  et  $u|_F$  nilpotent,  $u|_G$  inversible, alors  $F = \text{Ker } u^n$  et  $G = \text{Im } u^n$ .

*Preuve.* Si  $u^i(x) = 0$  alors  $u^{i+1}(x) = u(u^i(x)) = u(0) = 0$ , ce qui montre que la suite des noyaux est croissante.

Pour montrer qu'elle est stationnaire à partir d'un rang  $n$ , supposons  $\text{Ker } u^i = \text{Ker } u^{i+1}$  et montrons  $\text{Ker } u^{i+1} = \text{Ker } u^{i+2}$ . Il suffit de montrer  $\text{Ker } u^{i+1} \supseteq \text{Ker } u^{i+2}$ . Si  $x \in \text{Ker } u^{i+2}$ , alors  $u(x) \in \text{Ker } u^{i+1} = \text{Ker } u^i$ , et donc  $x \in \text{Ker } u^{i+1}$ .

Pour montrer  $E = \text{Ker } u^n \oplus \text{Im } u^n$ , par le théorème du rang il suffit de montrer que  $\text{Ker } u^n \cap \text{Im } u^n = \{0\}$ . Soit  $x \in \text{Ker } u^n \cap \text{Im } u^n$ , on a  $x = u^n(y)$  et  $u^n(u^n(y)) = 0$ . Donc  $y \in \text{Ker } u^{2n} = \text{Ker } u^n$ , et  $x = u^n(y) = 0$ .

$F = \text{Ker } u^n$  est caractérisé comme l'espace caractéristique de la valeur propre 0. Puisque  $\text{Im } u^n$  est un supplémentaire, les valeurs propres de  $u|_{\text{Im } u^n}$  sont toutes non nulles, ce qui revient à dire que  $u|_{\text{Im } u^n}$  est inversible. Reste à voir que si  $G$  est un supplémentaire invariant sur laquelle la restriction de  $u$  est inversible, alors  $G = \text{Im } u^n$ . Soit  $v \in G$ , et posons  $w = (u|_G)^{-n}(v)$ . Alors  $w \in G$ , et  $v = u^n(w) \in \text{Im } u^n$ . Donc  $G \subseteq \text{Im } u^n$ , d'où égalité par égalité des dimensions.  $\square$

**Proposition.** *On a*

$$|\text{GL}_d(\mathbb{F}_q)| \sum_{k=0}^d \frac{n_k}{|\text{GL}_k(\mathbb{F}_q)|} = q^{d^2}.$$

(Par convention  $n_0 = |\text{GL}_0(\mathbb{F}_q)| = 1$ .)

*Preuve.* Notons  $m_{k,d}$  le nombre de couples  $(F, G)$  où  $\mathbb{F}_q^d = F \oplus G$  avec  $\dim F = k$ . Le groupe  $\text{GL}_d(\mathbb{F}_q)$  agit transitivement sur l'ensemble de tels couples par  $A \cdot (F, G) := (A(F), A(G))$ , et le stabilisateur d'un couple est isomorphe à  $\text{GL}_k(\mathbb{F}_q) \times \text{GL}_{d-k}(\mathbb{F}_q)$ . On a donc

$$m_{k,d} = \frac{|\text{GL}_d(\mathbb{F}_q)|}{|\text{GL}_k(\mathbb{F}_q)| |\text{GL}_{d-k}(\mathbb{F}_q)|}.$$

Par ailleurs, un couple  $(F, G)$  étant fixé, on a  $n_k \cdot |\text{GL}_{d-k}(\mathbb{F}_q)|$  matrices qui admettent ce couple comme décomposition de Fitting (ici on utilise la partie "unicité" du lemme). Comme le nombre de matrices  $d \times d$  à coefficients dans  $\mathbb{F}_q$  est  $q^{d^2}$ , en dénombrant les décompositions de Fitting on obtient finalement :

$$q^{d^2} = \sum_{k=0}^d m_{k,d} \cdot n_k \cdot |\text{GL}_{d-k}(\mathbb{F}_q)| = |\text{GL}_d(\mathbb{F}_q)| \sum_{k=0}^d \frac{n_k}{|\text{GL}_k(\mathbb{F}_q)|}. \quad \square$$

*Preuve du théorème.* La proposition donne d'une part :

$$n_d + |\text{GL}_d(\mathbb{F}_q)| \sum_{k=0}^{d-1} \frac{n_k}{|\text{GL}_k(\mathbb{F}_q)|} = q^{d^2}.$$

Appliquée aux matrices de taille  $d-1$ , la même proposition donne :

$$|\text{GL}_{d-1}(\mathbb{F}_q)| \sum_{k=0}^{d-1} \frac{n_k}{|\text{GL}_k(\mathbb{F}_q)|} = q^{(d-1)^2}.$$

On obtient donc :

$$\begin{aligned} n_d &= q^{d^2} - \frac{|\text{GL}_d(\mathbb{F}_q)|}{|\text{GL}_{d-1}(\mathbb{F}_q)|} |\text{GL}_{d-1}(\mathbb{F}_q)| \sum_{k=0}^{d-1} \frac{n_k}{|\text{GL}_k(\mathbb{F}_q)|} \\ &= q^{d^2} - q^{(d-1)^2} \frac{|\text{GL}_d(\mathbb{F}_q)|}{|\text{GL}_{d-1}(\mathbb{F}_q)|}. \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned} |\text{GL}_d(\mathbb{F}_q)| &= (q^d - 1)(q^d - q) \dots (q^d - q^{d-1}) \\ &= (q^d - 1)q^{d-1}(q^{d-1} - 1) \dots (q^{d-1} - q^{d-2}) \\ &= (q^d - 1)q^{d-1} |\text{GL}_{d-1}(\mathbb{F}_q)|. \end{aligned}$$

Et finalement

$$n_d = q^{d^2} - q^{(d-1)^2+d-1}(q^d - 1) = q^{d^2} - q^{d^2} + q^{(d-1)^2+d-1} = q^{d(d-1)}. \quad \square$$

**Remarque.** Le cas des matrices  $2 \times 2$  peut se faire directement comme suit. Une matrice  $M \in \mathcal{M}_2(\mathbf{k})$  est nilpotente ssi son polynôme caractéristique est  $X^2$ , ce qui revient à demander  $\det M = \text{Tr } M = 0$ . Donc  $M$  est nilpotent ssi il existe  $a, b, c \in \mathbf{k}$  tel que

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} \text{ avec } a^2 + bc = 0.$$

Maintenant si  $\mathbf{k}$  est un corps fini à  $q$  éléments, il s'agit de compter les points sur la conique affine d'équation  $a^2 + bc = 0$ , et on trouve

- (1)  $q$  telles matrices avec  $b = 0$  ( $a = 0$  et  $c$  arbitraire);  
 (2)  $q(q - 1)$  telles matrices avec  $b \neq 0$  ( $q - 1$  choix pour  $b$ , et  $q$  choix pour  $a$ );  
 et donc finalement  $q^2$  possibilités comme attendu.

### Endomorphismes semi-simples

[BMP05, p. 324], [CG14, p. 79-80]

Leçons :

- 141. Polynômes irréductibles à une indéterminée. Corps de rupture. Exemples et applications.

Plausible en adaptant un peu la présentation.

- 153. Polynômes d'endomorphisme en dimension finie. Réduction d'un endomorphisme en dimension finie. Applications

Remarquer que  $u$  semi-simple équivaut à  $\mathbf{k}[u]$  produit de corps...

- 154. Sous-espaces stables par un endomorphisme ou une famille d'endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie. Applications

- 155. Endomorphismes diagonalisables en dimension finie

Plausible, mais en incluant la remarque que (disons sur un corps de caractéristique 0, ou même simplement sur  $\mathbb{R}$ ),  $u$  semi-simple équivaut à  $u$  diagonalisable sur la clôture algébrique de  $K$ .



On note  $E$  un espace vectoriel sur un corps  $\mathbf{k}$  arbitraire.

Rappelons qu'un endomorphisme  $u \in \mathcal{L}(E)$  est dit *semi-simple* si tout sous-espace stable admet un supplémentaire stable.

**Lemme.** Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$  un endomorphisme, et  $\pi_u$  le polynôme minimal de  $u$ . Si  $\pi_u$  est irréductible, alors  $u$  est semi-simple.

*Preuve.* Comme  $\pi_u$  est irréductible, l'anneau  $\mathbf{k}[u] \simeq \mathbf{k}[X]/(\pi_u)$  est un corps (c'est le corps de rupture de  $\pi_u$ ). Soit  $F \subset E$  un sous-espace stable par  $u$ .  $E$  et  $F$  sont munis d'une structure naturelle de  $\mathbf{k}[u]$ -espace vectoriel, en posant pour tous  $P(u) \in \mathbf{k}[u]$  et  $x \in E$  :

$$P(u) \cdot x := P(u)(x).$$

Par le théorème de la base incomplète,  $F$  admet un supplémentaire  $G$ , et ce  $\mathbf{k}[u]$ -sous-espace vectoriel  $G$  correspond à un sous-espace de  $E$  stable par  $u$ , comme attendu.  $\square$

**Théorème.** Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$  un endomorphisme, et  $\pi_u$  le polynôme minimal de  $u$ . L'endomorphisme  $u$  est semi-simple si et seulement si  $\pi_u$  n'a pas de facteur carré, c'est à dire  $\pi_u = Q_1 \cdots Q_n$  avec les  $Q_i \in \mathbf{k}[X]$  irréductibles et 2 à 2 distincts.

*Preuve.* Montrons d'abord que  $u$  semi-simple implique  $\pi_u$  sans facteur carré. Par l'absurde, supposons que  $\pi_u = P^2Q$  avec  $P$  irréductible. Soit  $F = \text{Ker } P(u)$ , c'est un sous-espace stable par  $u$  (immédiat en se souvenant que  $u$  et  $P(u)$  commutent) donc il existe  $G$  supplémentaire de  $F$  également stable par  $u$ . Montrons que  $PQ$  est un polynôme annulateur pour  $u$ , ce qui donnera la contradiction attendue. D'une part comme  $P(u) \circ (PQ)(u)(G) = \{0\}$  on a  $(PQ)(u)(G) \subset F$ , et comme  $G$  est stable par  $u$ , on a aussi  $(PQ)(u)(G) \subset G$ , d'où  $(PQ)(u)(G) = \{0\}$ . D'autre part  $(PQ)(u)(F) = Q(u)P(u)(F) = Q(u)(0) = \{0\}$ . Ainsi  $(PQ)(u)$  est nulle sur  $E = F \oplus G$  comme annoncé.

Réciproquement si  $\pi_u = Q_1 \cdots Q_n$  est sans facteur carré, montrons que  $u$  est semi-simple. Par le lemme des noyaux on a  $E = \bigoplus \text{Ker } Q_i(u)$ . Si  $F \subset E$  est un sous-espace stable alors  $F = \bigoplus \text{Ker } Q_i(u) \cap F$ . Comme le polynôme minimal de  $u|_{\text{Ker } Q_i(u)}$  est le polynôme irréductible  $Q_i$ , par le lemme on a  $u|_{\text{Ker } Q_i(u)}$  semi-simple, et donc il existe  $G_i \subset \text{Ker } Q_i(u)$  un supplémentaire stable de  $\text{Ker } Q_i(u) \cap F$ . Alors  $G = \bigoplus G_i$  est un supplémentaire de  $F$  stable par  $u$ .  $\square$

C'est déjà bien comme ça, mais si on un peu de temps on peut choisir d'ajouter l'un des compléments suivants :



**Proposition** (Lien avec algèbre des polynômes en  $u$ ). *Soit  $E$  un espace vectoriel, et  $u \in \mathcal{L}(E)$  un endomorphisme. alors  $u$  est semi-simple si et seulement si  $\mathbf{k}[u]$  est un produit de corps.*

*Preuve.* Si  $u$  est semi-simple, alors le théorème dit que  $\pi_u = Q_1 \dots Q_n$  avec les  $Q_i$  irréductibles deux à deux distincts, donc par le théorème des restes chinois

$$\mathbf{k}[u] \simeq \mathbf{k}[X]/(\pi_u) \simeq \mathbf{k}[X]/(Q_1) \times \dots \times \mathbf{k}[X]/(Q_n)$$

est le produit des corps de rupture des  $Q_i$ .

Si  $u$  n'est pas semi-simple, on écrit  $\pi_u = Q^m P$  avec  $m \geq 2$ ,  $Q$  irréductible et  $P$  premier avec  $Q$ , et cette fois

$$\mathbf{k}[u] \simeq \mathbf{k}[X]/(\pi_u)$$

contient un élément non nul nilpotent (la classe de  $QP$ ) donc n'est pas un produit de corps.  $\square$

**Proposition** (Lien avec diagonalisabilité). *Soit  $E$  un espace vectoriel sur  $\mathbf{k}$  un corps de caractéristique 0, et  $u \in \mathcal{L}(E)$  un endomorphisme. Alors  $u$  est semi-simple si et seulement si  $u$  est diagonalisable sur  $\bar{\mathbf{k}}$  la clôture algébrique de  $\mathbf{k}$ .*

*Preuve.* Le polynôme minimal  $\pi$  reste inchangé quand on passe de  $\mathbf{k}$  à  $\bar{\mathbf{k}}$  (Clairement  $\pi_{\bar{\mathbf{k}}}$  divise  $\pi_{\mathbf{k}}$ , comme ces deux polynômes sont unitaires par définition, il suffit de montrer qu'ils sont de même degré. Or le degré de  $\pi_{\mathbf{k}}$ , ou de  $\pi_{\bar{\mathbf{k}}}$ , est le rang de la famille  $I, A, A^2, \dots, A^{n-1}$ , qu'on peut voir comme le rang d'une grande matrice  $n^2 \times n^2$  (on peut s'arrêter à  $A^n$  si on admet Cayley-Hamilton, mais ce n'est pas vraiment utile). Or le rang d'une matrice est invariant par extension de corps : cela se voit par exemple par la caractérisation en terme de plus grand mineur non nul.)

Le fait de ne pas avoir de multiplicité dans sa décomposition en irréductible est invariant par extension de corps en caractéristique 0 (et c'est encore plus facile à voir pour  $\mathbf{k} = \mathbb{R}$  et  $\bar{\mathbf{k}} = \mathbb{C}$ ). En effet si  $P$  est non constant,  $P'$  est non nul (car  $\deg P' = \deg P - 1$ , ce qui ne serait plus toujours vrai en caractéristique  $p > 0$ , penser à  $P = X^p \dots$ ), et le PGCD de  $P$  et  $P'$  (qui vu l'algorithme d'Euclide ne change pas par extension de corps) est 1 ssi  $P$  n'a pas de multiplicité.  $\square$

**Proposition** (Machine à exemples). *Soit  $P(X) \in \mathbf{k}[X]$  un polynôme irréductible de degré  $\geq 2$ , et  $C(P)$  sa matrice compagnon. Alors l'endomorphisme  $u$  de matrice  $C(P)$  est semi-simple (et même simple, voir ci-dessous) mais non diagonalisable.*

On dit qu'un endomorphisme  $u \in \mathcal{L}(E)$  est *simple* si ses seuls sous-espaces stables sont  $E$  et  $\{0\}$ .

**Proposition** ([CG14, Proposition 1.3 p. 79]). *Un endomorphisme est simple si et seulement si son polynôme caractéristique est irréductible.*

*Preuve.* Si  $F \subsetneq E$  est un sous-espace stable propre et non réduit à  $\{0\}$ , alors en complétant une base de  $F$  on obtient une base pour laquelle la matrice de  $u$  est triangulaire par blocs, et donc le polynôme caractéristique admet au moins deux facteurs.

Réciproquement supposons  $u \in \mathcal{L}(E)$  simple. Pour tout  $v \neq 0$ , le sous-espace engendré par les  $u^i(v)$  est stable, et donc égal à  $E$ . Ainsi  $u$  est un endomorphisme cyclique, ce qui est équivalent à l'égalité entre polynômes minimal et caractéristique. Il suffit donc de montrer que le polynôme  $\pi_u$  est irréductible. Soit  $P$  un facteur irréductible de  $\pi_u$ , et écrivons  $\pi_u = P^k Q$  avec  $k \geq 1$  et  $Q$  premier avec  $P$ . Par le lemme des noyaux,  $E = \text{Ker } P^k(u) \oplus \text{Ker } Q(u)$ . Par simplicité, l'un des deux facteurs est  $E$  tout entier, et comme on suppose que  $P$  est un facteur de  $\pi_u$ , cela donne  $\pi_u = P^k$ . Mais alors  $P(u)$  est nilpotente, donc son noyau est un sous-espace stable non réduit à  $\{0\}$ , donc  $\text{Ker } P(u) = E$  par simplicité et  $\pi_u = P$  comme attendu.  $\square$

## Leçons où l'on peut envisager ces développements

- 101. Groupe opérant sur un ensemble. Exemples et applications
  - [Cardinal du cône nilpotent](#)
  - ...
- 102. Groupe des nombres complexes de module 1. Sous-groupes des racines de l'unité. Applications
  - ...
- 103. Exemples de sous-groupes distingués et de groupes quotients. Applications
  - ...
- 104. Groupes finis. Exemples et applications
  - [Cardinal du cône nilpotent](#)
  - ...
- 105. Groupe des permutations d'un ensemble fini. Applications
  - ...
- 106. Groupe linéaire d'un espace vectoriel de dimension finie  $E$ , sous-groupes de  $GL(E)$ . Applications
  - ...
- 107. Représentations et caractères d'un groupe fini sur un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel. Exemples
  - ...
- 108. Exemples de parties génératrices d'un groupe. Applications
  - ...
- 110. Structure et dualité des groupes abéliens finis. Applications
  - ...
- 120. Anneaux  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ . Applications
  - ...
- 121. Nombres premiers. Applications
  - ...
- 122. Anneaux principaux. Applications
  - ...
- 123. Corps finis. Applications
  - ...
- 125. Extensions de corps. Exemples et applications
  - ...
- 126. Exemples d'équations en arithmétique
  - ...
- 141. Polynômes irréductibles à une indéterminée. Corps de rupture. Exemples et applications.
  - [Endomorphismes semi-simples](#)
  - ...
- 142. PGCD et PPCM, algorithmes de calcul. Applications
  - ...
- 144. Racines d'un polynôme. Fonctions symétriques élémentaires. Exemples et applications
  - ...
- 150. Exemples d'actions de groupes sur les espaces de matrices
  - [Classification des matrices nilpotentes via les diagrammes de Young](#)
  - [Cardinal du cône nilpotent](#)
  - ...

- 151. Dimension d'un espace vectoriel (on se limitera au cas de la dimension finie).  
Rang. Exemples et applications
  - Classification des matrices nilpotentes via les diagrammes de Young
  - ...
- 152. Déterminant. Exemples et applications
  - ...
- 153. Polynômes d'endomorphisme en dimension finie. Réduction d'un endomorphisme en dimension finie. Applications
  - Classification des matrices nilpotentes via les diagrammes de Young
  - Endomorphismes semi-simples
  - ...
- 154. Sous-espaces stables par un endomorphisme ou une famille d'endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie. Applications
  - Classification des matrices nilpotentes via les diagrammes de Young
  - Endomorphismes semi-simples
  - Cardinal du cône nilpotent
  - ...
- 155. Endomorphismes diagonalisables en dimension finie
  - Endomorphismes semi-simples
  - ...
- 156. Exponentielle de matrices. Applications
  - ...
- 157. Endomorphismes trigonalisables. Endomorphismes nilpotents
  - Cardinal du cône nilpotent
  - Classification des matrices nilpotentes via les diagrammes de Young
  - ...
- 158. Matrices symétriques réelles, matrices hermitiennes
  - ...
- 159. Formes linéaires et dualité en dimension finie. Exemples et applications
  - ...
- 160. Endomorphismes remarquables d'un espace vectoriel euclidien (de dimension finie)
  - ...
- 161. Distances et isométries d'un espace affine euclidien
  - ...
- 162. Systèmes d'équations linéaires ; opérations élémentaires, aspects algorithmiques et conséquences théoriques
  - ...
- 170. Formes quadratiques sur un espace vectoriel de dimension finie. Orthogonalité, isotropie. Applications
  - ...
- 171. Formes quadratiques réelles. Coniques. Exemples et applications
  - ...
- 181. Barycentres dans un espace affine réel de dimension finie, convexité. Applications
  - ...
- 182. Applications des nombres complexes à la géométrie.
  - ...
- 183. Utilisation des groupes en géométrie
  - ...
- 190. Méthodes combinatoires, problèmes de dénombrements
  - Cardinal du cône nilpotent
  - ...

## Références

- [BMP05] V. Beck, J. Malick & G. Peyré. *Objectif agrégation*. H&K, 2005. 8
- [CG13] P. Caldero & J. Germoni. *Histoires hédonistes de groupes et de géométries, Tome premier*. Calvage & Mounet, 2013. 2, 4, 5
- [CG14] P. Caldero & J. Germoni. *Histoires hédonistes de groupes et de géométries, Tome second*. Calvage & Mounet, 2014. 4, 6, 8, 9