1. Donner, si c'est possible, un exemple de polynôme $P \in \mathbb{Z}[X]$ réductible dans $\mathbb{Z}[X]$ mais irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$.

Réponse :

$P(X) = 2X + 2$ convient, en effet P est de degré 1 donc irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$, par contre $P = 2(X + 1)$ et ni 2, ni $X + 1$ ne sont inversibles dans $\mathbb{Z}[X]$.

NB: l'équivalence P irréductible dans $\mathbb{Z}[X] \Leftrightarrow P$ irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$ n'est valable que pour un polynôme $P \in \mathbb{Z}[X]$ **primitif**...

2. Donner des exemples de polynômes $P_1, P_2, P_3 \in (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})[X]$ deux à deux distincts, tels que les fonctions $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \mapsto \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ associées soient toujours la fonction nulle.

Réponse :

$P_1(X) = 0$, $P_2(X) = X(X - 1)$, $P_3(X) = X^2(X - 1)$.

3. Donner des exemples de polynômes $P_1, P_2, P_3 \in \mathbb{Q}[X]$ tous irréductibles, et de degrés deux à deux distincts.

Réponse :

$P_1(X) = X$, $P_2(X) = X^2 - 2$, $P_3(X) = X^3 - 2$: on peut appliquer le critère d'Eisenstein pour montrer que P_2 et P_3 sont irréductibles.

NB: On pouvait aussi citer des polynômes cyclotomiques, comme $\Phi_3 = X^2 + X + 1$ où $\Phi_5 = X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$. A noter également qu'un polynôme constant (non nul), donc inversible, n'est pas irréductible par définition même de ce qu'est un élément irréductible dans un anneau...

4. Donner des exemples de polynômes $P_1, P_2, P_3 \in \mathbb{R}[X]$ tous de degré 2, tels que les anneaux quotients $\mathbb{R}[X]/(P_1)$, $\mathbb{R}[X]/(P_2)$ et $\mathbb{R}[X]/(P_3)$ soient deux à deux non isomorphes.

Réponse :

$P_1(X) = X^2+1$, $P_2(X) = X(X-1)$, $P_3(X) = X^2$. En effet $\mathbb{R}[X]/(P_1)$ est isomorphe au corps $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}[X]/(P_2)$ est isomorphe à l'anneau non intègre $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ qui ne contient pas d'éléments non nul de carré nul, et $\mathbb{R}[X]/(P_3)$ contient un élément non nul de carré nul (la classe de X)

NB: Le quotient $\mathbb{R}[X]/(X^2)$ n'est PAS isomorphe à $\mathbb{R}$, ni à aucun autre anneau usuel. C'est le quotient $\mathbb{R}[X]/(X)$ qui serait naturellement isomorphe à $\mathbb{R}$.