Dessiner une "carte des anneaux" qui comportera

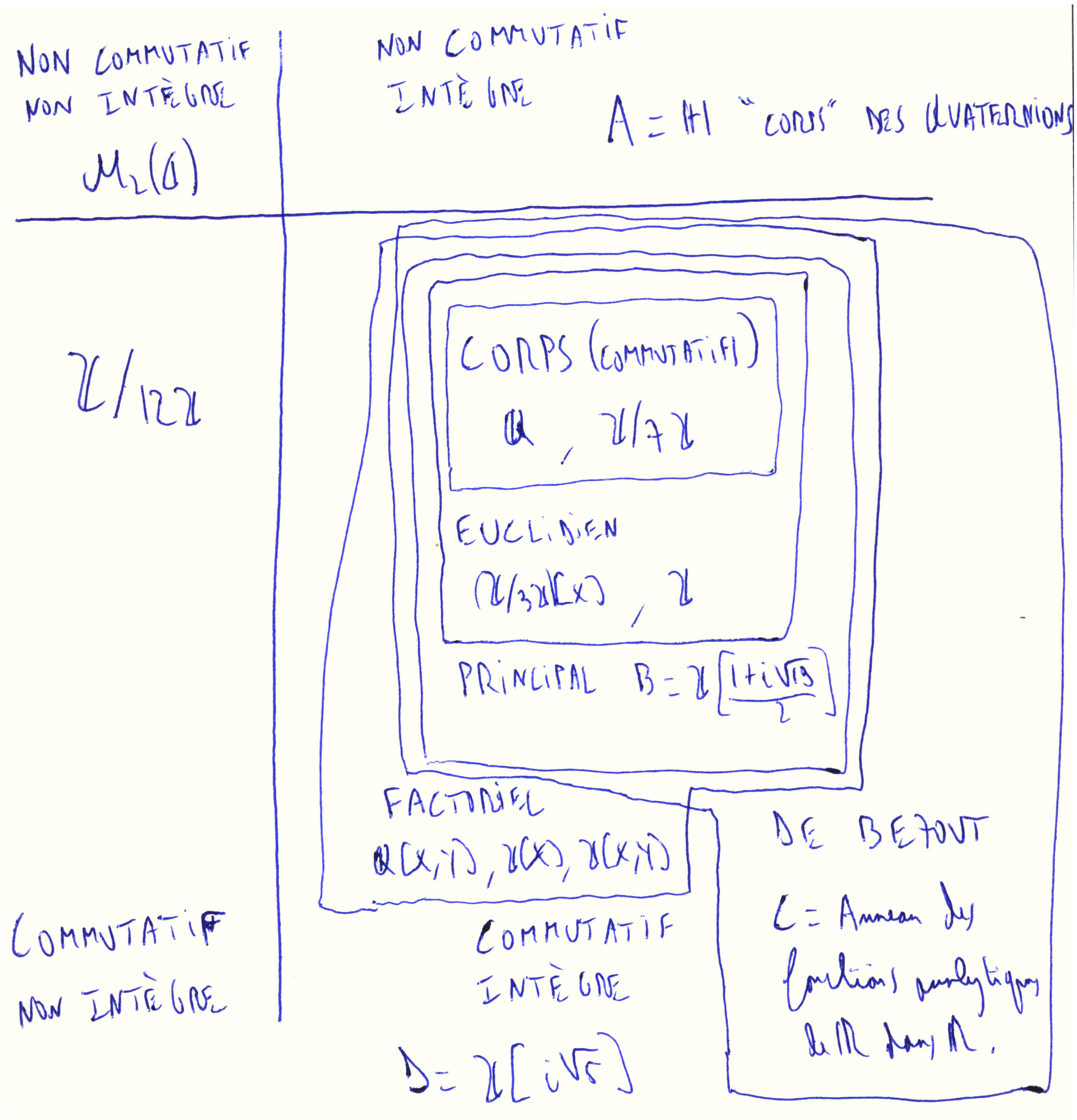
1. Des régions correspondant aux propriétés : commutatif (ou non), intègre (ou non), corps, euclidien, principal, factoriel, de Bézout.
2. Des exemples placés dans les régions adéquates :

$$\mathbb{Z},\ \mathbb{Q}[X,Y],\ \mathbb{Z}/12\mathbb{Z},\ \mathbb{Z}/7\mathbb{Z},\ \mathbb{Q},\ \mathbb{Z}[X],\ (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})[X],\ \mathbb{Z}[X,Y],\ \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$$

   et A, B deux autres anneaux de votre choix que vous préciserez.

Réponse :

Plus de commentaires au verso...



Quelques remarques :

- Un corps est un exemple d'anneau euclidien : en effet comme les divisions tombent toujours juste (pas de reste !), il n'y aura jamais à vérifier que le reste est plus petit que quelque chose, donc on peut prendre un stathme arbitraire (par exemple constant).

- Le "corps" non commutatif des quaternions (je mets des guillemets car j'aurais tendance à réserver le mot corps pour le cas commutatif, et dire ici plutôt "algèbre à division") peut-être vu comme l'anneau des matrices 2×2 à coefficients complexes de la forme $\begin{pmatrix} a & -\bar{b} \\ b & \bar{a} \end{pmatrix}$. On le note souvent $\mathbb{H}$ en honneur de Hamilton leur "inventeur". En considérant parties réelles et imaginaires de a et b on peut aussi y penser comme à une structure d'anneau intègre sur $\mathbb{R}^4$ (tout comme $\mathbb{C}$ consiste à mettre une structure d'anneau intègre sur $\mathbb{R}^2$, au contraire de la structure d'anneau produit).

  Il ne faut pas le confondre avec le groupe quaternionique $\mathbb{H}_8$ à 8 éléments, qui n'est pas un anneau (tout comme $\{1, -1, i, -i\}$ est un sous-groupe fini de $\mathbb{C}^*$ mais pas un sous-anneau de $\mathbb{C}$)...

- Les inclusions des régions correspondent à la suite d'implications

$$\begin{tikzcd}
 & & & \text{Bézout} \\
\text{Corps commutatif} \arrow[r, Rightarrow] & \text{Euclidien} \arrow[r, Rightarrow] & \text{Principal} \arrow[ur, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & \\
 & & & \text{Factoriel}
\end{tikzcd}$$

  Il est crucial de connaitre ces implications, et de savoir situer tout exemple d'anneau par rapport à ces notions...

- Le fait que $\mathbb{Q}[X, Y]$, $\mathbb{Z}[X]$ et $\mathbb{Z}[X, Y]$ soit factoriels vient du théorème

$$A \text{ factoriel} \Rightarrow A[X] \text{ factoriel}.$$

- $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})[X]$ est un exemple d'anneau de polynômes à coefficients dans un corps, donc il est euclidien.