1. Donner un exemple de corps fini.

Réponse :

Pour tout nombre premier p, l'anneau quotient $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ est un corps.

NB: On peut le justifier soit en disant que $p\mathbb{Z}$ est un idéal maximal de $\mathbb{Z}$, soit en exhibant directement un inverse $\bar{u}$ pour chaque $\bar{a} \neq \bar{0}$ en écrivant une relation de Bézout $au + pv = 1$.

2. Donner deux exemples de polynômes irréductibles de degrés différents dans $\mathbb{R}[X]$.

Réponse :

X et $X^2 + 1$ conviennent.

NB : Les polynômes irréductibles sur $\mathbb{R}$ sont les polynômes de degré 1, et les polynômes de degré 2 avec deux racines complexes conjuguées. Il n'y en a pas d'autre ! Par exemple $X^4 + 1 = (X^2 + \sqrt{2}X + 1)(X^2 - \sqrt{2}X + 1)$ n'est PAS irréductible...

3. Les anneaux quotients $\mathbb{R}[X]/(X^2 + 1)$ et $\mathbb{R}[X]/(X^2 + X + 1)$ sont-ils isomorphes ? (Une phrase de justification attendue).

Réponse :

Ces anneaux sont bien isomorphes, car ils sont tous deux isomorphes à $\mathbb{C}$.

NB: On montre les isomorphismes vers $\mathbb{C}$ en utilisant les morphismes d'évaluation $P(x) \mapsto P(i)$ et $P(X) \mapsto P(j)$ où $i, j = e^{2i\pi/3}$ sont racines respectives de $X^2 + 1$, $X^2 + X + 1$.

4. Notons $\bar{Y}$ la classe du polynôme Y dans l'anneau quotient A/I, ou $A = \mathbb{R}[X, Y]$ et $I = (X)$. Donner trois représentants de $\bar{Y}$ de degrés différents.

Réponse :

Y, $Y + X^2$ et $Y + X^3Y^8$ conviennent (de degrés respectifs 1, 2 et 11).

NB: De façon générale, les représentants de $\bar{Y}$ sont les polynômes de la forme $Y + XP(X, Y)$, avec $P \in \mathbb{R}[X, Y]$ arbitraire.