1. Donner un exemple d'anneau commutatif non intégre, puis un exemple d'anneau commutatif intègre qui soit différent de son corps des fractions.

Réponse :

$\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ est un anneau commutatif non intégre, car $\bar{2} \cdot \bar{3} = \bar{0}$

$\mathbb{Z}$ est un anneau intègre, dont le corps des fractions est $\mathbb{Q}$.

2. Écrire une relation de Bezout entre les éléments suivants de $\mathbb{R}[X]$:

$$P(X) = (X-1)(X+1) \text{ et } Q(X) = (X-1)(X+2).$$

Réponse :

$Q(X) - P(X) = X - 1$.

NB: il n'était pas obligatoire de repasser par un algorithme d'Euclide pour constater que $(X+2) - (X+1) = 1$...

3. Dans l'anneau $\mathbb{R}[X]$, donner un exemple de sous-anneau $B \subsetneq \mathbb{R}[X]$, et un exemple (non trivial) d'idéal $I \subsetneq \mathbb{R}[X]$.

Réponse :

$\mathbb{Z}[X], \mathbb{Q}[X]$ ou $\mathbb{R}$ sont des exemples de sous-anneaux de $\mathbb{R}[X]$.

$I = (X) = \{P \in \mathbb{R}[X]; P(0) = 0\}$ est un idéal de $\mathbb{R}[X]$, ou plus généralement l'ensemble des multiples du polynôme de votre choix.

4. Soit A, B des anneaux commutatifs, et $\varphi\colon A \to B$ un morphisme d'anneaux tel que $\operatorname{Ker}\varphi = \{0\}$. Montrer que φ est injectif (trois lignes devraient suffire).

Réponse :

Soit a, a' dans A tels que $\varphi(a) = \varphi(a')$.

On a $\varphi(a - a') = \varphi(a) - \varphi(a') = \varphi(a) - \varphi(a) = 0$, donc $a - a' \in \operatorname{Ker}\varphi = \{0\}$.

Ainsi $a = a'$, ce qui prouve que φ est injective.