Examen final

Durée: 3 heures

Documents, calculatrice ou téléphone interdits. Le barême sur 21 est indicatif.

I - Exemples. (7 points)

1. Donner deux exemples typiques d'anneaux euclidiens.
2. Donner deux exemples typiques d'anneaux factoriels mais non principaux, en donnant à chaque fois un exemple d'idéal non principal (on ne demande pas de justifier).
3. L'anneau quotient $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})[X]/(X^2+\bar{1})$ est-il un exemple de corps à 4 éléments ?
4. Donner un exemple d'anneau commutatif dont tous les idéaux sont principaux, et qui pourtant n'est pas un anneau principal.
5. Dans l'anneau $\mathbb{R}[[T]]$ des séries formelles à coefficients réels, donner un exemple d'élément non nul et non inversible.
6. Expliciter le polynôme cyclotomique $\Phi_{11}(X) \in \mathbb{Z}[X]$.
7. Donner une base de l'espace des polynômes homogènes de degré 2 dans $\mathbb{C}[X, Y]$, puis une base de l'espace des polynômes homogènes *symétriques* de degré 2 dans $\mathbb{C}[X, Y]$.

II - Questions de cours (7 points)

1. Démontrer qu'un anneau euclidien est principal.
2. Considérons les six anneaux suivants :

   $$\mathbb{R} \times \mathbb{R},\ \mathbb{C},\ \mathbb{R}[X]/(X^2+1),\ \mathbb{R}[X]/(X^2),\ \mathbb{R}[X]/(X^2+X),\ \mathbb{R}[X]/(X^2-1).$$

   Établir ceux qui sont isomorphes, en explicitant les isomorphismes, et en justifiant que votre liste d'isomorphismes est complète.
3. Factoriser 10 puis $10i$ en facteurs irréductibles dans l'anneau $\mathbb{Z}[i]$.
4. Si $P, Q \in \mathbb{Z}[X]$ sont deux polynômes de contenu égal à 1, montrer que le produit PQ est encore de contenu égal à 1.
5. Soit A un anneau commutatif intègre. Montrer que si $a \in A$ est premier alors a est irréductible (on commencera par énoncer les définitions de ces deux notions).

TSVP ⇒

III - Polynômes (7 points)

1. Énoncer (sans la démontrer) une condition sur un polynôme $Q \in \mathbb{Z}[X]$ pour avoir l'équivalence : "Q irréductible dans $\mathbb{Z}[X]$ si et seulement si Q est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$", et donner un contre-exemple quand cette condition n'est pas satisfaite.

2. Montrer que le polynôme $X^3 + X \in (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})[X]$ admet trois racines.

3. Le polynôme $P(X) = X^3 - 5X^2 + 11X - 4$ est-il irréductible dans $\mathbb{Z}[X]$?

Soit $\phi\colon \mathbb{Z}[X] \to (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})[X]$ le morphisme qui consiste à réduire les coefficients d'un polynôme modulo 3. Dans les questions qui suivent on considère le polynôme $\bar{P} = \phi(P)$, où P est le polynôme de la question précédente.

4. Donner la décomposition en facteurs irréductibles de $\bar{P}$ dans $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})[X]$.

5. Quel est le cardinal de l'anneau quotient $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})[X]/(\bar{P})$?

6. Déterminer tous les éléments $a \in (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})[X]/(\bar{P})$ vérifiant $a^2 = 0$.