

Devoir à rendre en TD la semaine du 7 novembre

On a vu en cours que tout anneau euclidien est principal: cela s'applique à \mathbb{Z} , $K[X]$, $\mathbb{Z}[i]$... Le but du problème qui suit est de montrer que l'anneau $\mathbb{Z}\left[\frac{1+i\sqrt{19}}{2}\right]$ est un exemple d'anneau principal mais non euclidien.

On notera $\alpha = \frac{1+i\sqrt{19}}{2} \in \mathbb{C}$, et $N(z) = z\bar{z}$ pour tout $z \in \mathbb{C}$. Suivant le contexte une barre peut désigner un nombre complexe conjugué, ou une classe dans un quotient, il ne devrait pas y avoir de doute possible...

Première partie : maximalité de l'idéal (2) dans $\mathbb{Z}[\alpha]$

1. Montrer que $\bar{\alpha} = 1 - \alpha$ et que $\alpha\bar{\alpha} = 5$.
2. Montrer que l'anneau $\mathbb{Z}[\alpha]$ est isomorphe à l'anneau $\mathbb{Z}[X]/(X^2 - X + 5)$.
3. Montrer que $X^2 - X + \bar{5}$ est irréductible dans $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})[X]$.
4. Montrer que $\mathbb{Z}[\alpha]/(2)$ est isomorphe à $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})[X]/(X^2 - X + \bar{5})$.
5. En déduire que (2) est un idéal maximal de $\mathbb{Z}[\alpha]$.

Deuxième partie : pseudo-division euclidienne dans $\mathbb{Z}[\alpha]$

Dans cette partie on fixe a, b des éléments non nuls de $\mathbb{Z}[\alpha]$.

1. Montrer qu'il existe un unique couple $u, v \in \mathbb{Q}$ tel que $\frac{a}{b} = u + v\alpha$.
2. Supposons que le nombre v obtenu à la question précédente soit proche d'un nombre entier, au sens qu'il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que $|v - n| \leq 1/3$.
 - (a) Montrer qu'il existe $m \in \mathbb{Z}$ tel que $N(u - m + \alpha(v - n)) < 1$.
 - (b) Montrer qu'il existe q, r dans $\mathbb{Z}[\alpha]$ tel que $a = bq + r$ avec $N(r) < N(b)$.
3. Supposons maintenant que le nombre v est mal approché par les entiers, au sens que pour tout $n \in \mathbb{Z}$ on a $|v - n| > 1/3$.
Montrer qu'il existe q, r dans $\mathbb{Z}[\alpha]$ tel que $2a = bq + r$ avec $N(r) < N(b)$.

Troisième partie : $\mathbb{Z}[\alpha]$ est principal

Soit I un idéal de $\mathbb{Z}[\alpha]$.

1. Montrer qu'il existe un $a \in I \setminus \{0\}$ qui réalise le minimum de $\{N(x); x \in I \setminus \{0\}\}$.

On va montrer par l'absurde que I est un idéal principal, engendré par a . Supposons donc qu'il existe $x \in I \setminus (a)$.

2. Dédurre de la partie 2 qu'il existe $q, r \in \mathbb{Z}[\alpha]$ tels que $x = aq + r$ ou $2x = aq + r$, avec $N(r) < N(a)$.
3. Montrer que le cas $r \neq 0$ est impossible, puis que $x = aq$ est impossible.
4. On traite maintenant le cas $2x = aq$.
 - (a) Montrer qu'il existe $a' \in \mathbb{Z}[\alpha]$ tel que $a = 2a'$.
 - (b) Montrer que l'idéal $(2, q)$ contient 1, et en déduire une relation de Bézout entre 2 et q .
 - (c) Montrer que $a' \in I$.
 - (d) Obtenir une contradiction et conclure.

Quatrième partie : $\mathbb{Z}[\alpha]$ n'est pas euclidien

Supposons $\mathbb{Z}[\alpha]$ euclidien de stathme v , et cherchons une contradiction. Prenons $x \neq 0 \in \mathbb{Z}[\alpha]$ non inversible et minimisant $v(x)$. Soit \bar{y} un élément non nul du quotient $\mathbb{Z}[\alpha]/(x)$ (NB : ici \bar{y} désigne un élément d'un quotient, la barre ici n'a rien à voir avec la conjugaison complexe...). Soit $y = xq + r$ la division euclidienne de y par x par rapport au stathme v .

1. Montrer que r est inversible dans $\mathbb{Z}[\alpha]$, et en déduire que $r = \pm 1$.
2. Montrer que $K = \mathbb{Z}[\alpha]/(x)$ est isomorphe à l'un des deux corps $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.
3. Si $K \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, montrer que $\bar{y} \in K$ est racine de $T^2 + T + 1 \in K[T]$, et obtenir une contradiction.
4. Si $K \simeq \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, montrer que $\bar{y} \in K$ est racine de $T^2 - T - 1 \in K[T]$, et obtenir une contradiction.