3. Actions de groupes, groupes commutatifs

Rappel : Formule des classes
Si G est un groupe fini opérant sur un ensemble fini X, pour tout $x \in X$ on a l'égalité :

$$|Orb(x)| = \frac{|G|}{|Stab(x)|}$$

Exercice 1. Soit $G = \left\{ f = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \in GL(2, \mathbb{R}) \right\}$.

On fait agir G sur $\mathbb{R}^2$ de façon naturelle. Décrire les orbites et les stabilisateurs.

Exercice 2. On fait agir S_3 sur S_3 par conjugaison. Décrire les orbites et les stabilisateurs.

Exercice 3. Un groupe de 35 éléments opère sur un ensemble de 19 éléments en ne laissant fixe aucun d'eux. Combien y a t-il d'orbites ?

Exercice 4. Soit G un groupe de $143 = 11.13$ éléments opérant sur un ensemble de 108 éléments. Montrer qu'il existe un point fixe.

Exercice 5. Soit G un groupe d'ordre n et q un diviseur de n. On fait agir G sur G par conjugaison. Montrer que si $g \in G$ est d'ordre q alors $|Orb(g)|$ divise n/q.

Exercice 6. En considérant l'action par conjugaison de A_5 sur l'ensemble des 5-cycles montrer qu'il existe deux classes de conjugaisons de 5-cycles dans A_5.

Rappel : Formule de Burnside
Si G est un groupe fini opérant sur un ensemble fini X, on a :

$$|G| \times (\text{nombre d'orbites}) = \sum_{g \in G} |\mathrm{Fix}(g)|.$$

Exercice 7. Soit G le groupe des isométries directes de $\mathbb{R}^3$ préservant un cube.

1. Montrer que G est isomorphe à S_4.
2. Décrire géométriquement les classes de conjugaison de G.
3. A l'aide de la formule de Burnside, déterminer le nombre de façons de colorier les faces d'un cube avec au plus trois couleurs à disposition.

Exercice 8. Soit G un groupe fini, et soit p le plus petit facteur premier de $|G|$. Montrer que tout sous-groupe H d'indice p de G est distingué. *Indication : considérer le morphisme de groupe $G \to S_p$ provenant de l'action de G sur les classes à gauche G/H.*

Exercice 9. Rappelons que pour p un nombre premier, on appelle p-groupe un groupe dont le cardinal est une puissance de p. Le but de cet exercice est de démontrer que le centre d'un p-groupe n'est pas réduit à l'élément neutre.

1. Soit G un p-groupe opérant sur un ensemble X, notons X^G l'ensemble des points fixes de X sous G, c'est-à-dire $X^G = \{x \in X \text{ tel que } g \cdot x = x \text{ pour tout } g \in G\}$.
   Montrer que $|X| \equiv |X^G| \pmod{p}$.
   Indication : écrire X comme réunion disjointe de ses orbites sous l'action de G.

2. Conclure : présenter le centre du groupe comme les points fixes sous une action convenable de G. (Préciser l'action et l'ensemble sur lequel G agit).

Exercice 10. Donner la liste complète des groupes abéliens d'ordre 360 (à isomorphisme près), en précisant la décomposition en groupes cycliques primaires (c'est-à-dire de la forme $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ où p est un nombre premier).

Exercice 11.
1. Exprimer les groupes suivants comme produits directs de groupes cycliques primaires : $\mathbb{Z}/24\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/30\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/24\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/30\mathbb{Z}$.

2. Pour quels nombres premiers p a-t-on un p-groupe non trivial dans $\mathbb{Z}/24\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/30\mathbb{Z}$? Pour chacun de ces p donner l'ordre du p-groupe correspondant.